教 育 部 高 等 教 育 司 推 荐

国外优秀信息科学与技术系列教学用书

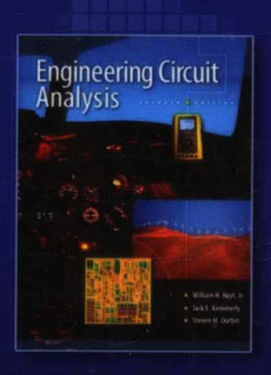


工程电路分析

（第七版）

Engineering Circuit Analysis

Seventh Edition



William H. Hayt, Jr.
［美］ Jack E. Kemmerly 著
Steven M. Durbin

周玲玲 蒋乐天 等译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

"十一五"国家重点图书　　计算机科学与技术学科

计算机科学与技术学科研究生系列教材

面向对象的系统设计

（第2版）

邵维忠　杨芙清　著

清华大学出版社

北京

内容简介

本书是一本论述面向对象设计方法的专著，其第1版于2003年由清华大学出版社出版，被国内许多大学用作研究生或高年级本科生教材，并被许多软件开发单位作为工程技术用书。本次再版，根据国内外面向对象领域理论与技术的最新发展做了不少修改。

本书是作者的另一本著作《面向对象的系统分析》(第2版)的姊妹篇，二者构成完整的OOA&D方法体系。

本书的主要内容是论述如何在面向对象的分析(OOA)基础上进行面向对象的设计(OOD)。全书分为7章，第1章介绍OOD的发展历史、现状和几种典型的OOA&D方法，论述OOA和OOD的关系。第2章介绍本书提出的OOD方法概貌。第3～6章分别介绍OOD模型各个组成部分的设计方法。第7章介绍统一建模语言(UML)，并分析和讨论其优点与缺点。

读者对象：计算机软件专业的教师、研究生和本科生，软件技术培训教师与学员，计算机软件领域的研究人员和工程技术人员。

关键词：软件工程，面向对象的系统设计，UML

图书在版编目(CIP)数据

面向对象的系统设计/邵维忠，杨芙清著. —2版. —北京：清华大学出版社，2007.5
(计算机科学与技术学科研究生系列教材)
ISBN 978-7-302-14798-5

Ⅰ. 面… Ⅱ. ①邵… ②杨… Ⅲ. 面向对象语言—程序设计—研究生—教材 Ⅳ. TP312

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第029513号

责任编辑：焦 虹 顾 冰
责任校对：时翠兰
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175
投稿咨询：010-62772015
地 址：北京清华大学学研大厦A座
邮 编：100084
邮购热线：010-62786544
客户服务：010-62776969
印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张**：14.25 **字 数**：340千字
版 次：2007年5月第2版 **印 次**：2007年5月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：29.00元

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个"国外电子与通信教材系列"项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝"国外电子与通信教材系列"项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

"国外电子与通信教材系列"出版委员会主任

出 版 说 明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套“国外计算机科学教材系列”，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进“国外电子与通信教材系列”，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，“国外电子与通信教材系列”的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过“教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会”的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了“教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书”。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、南京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学、中山大学、哈尔滨工业大学、西南交通大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

前　言

尽管本书的写作在学术上必须做到严谨而精确,但我们几位作者仍试图使阅读本书成为一种乐趣。我们希望和读者共享这样一个观念：电路分析充满乐趣。电路分析不仅是工程研究领域必不可少的技术,而且对于培养逻辑思维也是一种很好的方式,甚至对于那些在其职业生涯中不需要进行电路分析的人们也很有益。许多学生在学完本课程后都惊奇地发现，所有优秀的分析工具都是从3个简单的科学定律推导得出的，即欧姆定律、基尔霍夫电压定律和电流定律。

在许多大学和学院中,总是将介绍电磁基本概念的物理课程安排在电气工程课程之前或与其同时进行，并且往往是从场的角度来介绍电磁概念。但是，这样的背景知识并不是必要的，而是应该根据需要讨论(或复习)一些必要的电磁基本概念。只有一些基本的微积分课程才是阅读本书所需的预修课程或并修课程。本书通过电路方程来介绍和定义电路元件,与场有关的知识仅仅偶尔在注释中提到。以前，我们曾尝试过用3周至4周的电磁场理论做前导，从而介绍基本电路分析课程，希望因此可以用麦克斯韦方程精确地定义电路元件。最后的结果是：这种尝试的效果并不好，特别是从学生接受的情况来看。

希望本书能够使学生自学并掌握电路分析的知识。这是一本为学生而写的教材,并不是为教师而写的,因为学生阅读本书所花的时间可能远远大于教师所花的时间。每个新术语在第一次出现时都尽可能给出了清晰的定义。基本知识都安排在每一章的开始部分并给出了详尽的解释；书中结合一些实例给出了一般结果。每一章中都贯穿了比较简单的练习题并给出了答案。比较难的习题放在每一章的末尾,并且与文中讲述的内容次序相对应。这些习题有时是为了循序渐进地引入一些不太重要的或更高级的内容,有时是为了引入后续章节中的内容。对于学习过程来说，概念的引入和重复都是非常重要的。本书除了提供大量的练习题和170多个例题以外，还有1200多个章后习题。在这个版本中，许多练习都是新增的。在一些同事的帮助下，每道题都经过了手工计算求解并尽可能用计算机进行了验证。

如果本书有时显得不那么正式,甚至有些轻松诙谐,那是因为我们不想让学生觉得教学过程很枯燥。让学生脸上呈现笑容并不会阻碍学生汲取知识。如果写这本书是一种快乐，那么为什么阅读这本书不能如此呢？本书中的许多材料基于在普度大学、加州州立大学富勒敦分校、路易斯堡学院和新西兰坎特伯雷大学所讲授的课程,以及佛罗里达州立大学和佛罗里达A&M大学的联合工程项目。这些学校的学生首先使用了本书，非常感谢他们提出的许多建议和意见。

我非常荣幸能够成为本书的作者之一。《工程电路分析》于1962年首次出版，现在已是第七版了。本书既在稳步发展，又在电路分析教学方式上做了很大改变。我在普度大学读本科时就使用了这本书，并有幸聆听Bill Hayt本人讲授的电路课程。毫无疑问，Bill教授是我所见过的最好的教授之一。

本书的成功得益于其具有几个非常有价值的特点。首先,本书不仅是一本结构组织非常好并经过时间考验的书籍，而且其重要概念以很好的逻辑方式给出，可以被无缝连接到更大的框架中。其次，本书的讨论设置十分合理，并且有大量的实例和练习。当给出特定内容的理论知识或给出数学证明时并不会令人感到畏惧。每项内容都经过了仔细设计以帮助学生学习怎样进行电路分析。Bill

Hayt 和 Jack Kemmerly 为第一版的创作注入了大量心血，他们希望在每一章中都能够将自己的无限热情传递给每一位读者。

第七版新增内容

当正式决定开始编写本书的第七版时，制作小组的每位成员都希望能充分利用这次难得的机会。大家通过网络给出了大量的草稿、修订、模型和模板，我们努力使本书能够发挥最大的优势。最后，我们的努力获得了成功。与第六版相比，第七版有许多变化，但是从教师的角度考虑，还是尽量保持了一些关键特点、基本过程以及总体内容。因此，书中使用了一些不同的图标：

Ⓓ 一个设计题目，答案可能不唯一。

表示该题目需要计算机辅助分析。

要牢记，基于工程的软件包可以在学习过程中提供帮助，但不应把它作为主要分析工具，那些标有图标的章后习题总是注明能用适当的软件来检查结果，但不能用该软件来计算结果。

对于许多教师来说，他们会按照自己的电路课程选择所需的内容，因此可能会跳过一些章节。对于运算放大器尤其如此，因此从写作上采取了把关于运算放大器的一章以及随后几章略去而不会影响连贯性的结构。把第6 章直接放在直流分析内容后面是为了使运算放大电路可以作为前面章节中所学电路分析技术的强化应用。瞬态效应和频率响应（除了转换速率）包含在相关章节的最后，这样既可以避免内容过多，又有更多机会把运算放大电路作为电路分析概念的实例。

复频率的问题也值得注意。Bill Hayt 强调拉普拉斯变换是傅里叶变换的特例——直观的数学练习。但是，许多情况下只有到信号与系统课程中才会出现基于傅里叶的概念。因此Bill Hayt 和 Jack Kemmerly 在给学生介绍复频率时将其看成相量概念的扩展。这种为学生考虑的方法在第七版中继续保留，比如从关于拉普拉斯分析的这一章开头就介绍积分变换，这也是本书的一个重要特点。

第七版更新内容

1. 增加了许多新例子并修改了许多例子，特别是在瞬态分析章节中（第7章、第8章和第9章）。
2. 在第6章中，对集成运算放大器内容进行了重要扩充和重写。现在的内容包括利用集成运算放大器构建电流源和电压源的讨论、转换速率的讨论、比较器和仪表放大器的讨论。这里详细分析了几种不同类型的配置，但将一些变化形式留给学生们自己处理。
3. 增加了几百个章后习题。
4. 增加了一些新的表格，以便于参考。
5. 对每个例子进行了仔细检查，确保有简洁的解释、足够的中间步骤以及合适的图。与第六版类似，对于每个例子都以测试题的方式措辞以辅助解题，但并不解释概念。
6. 根据许多学生的建议，增加了大量章后习题，包括直观的有助于“树立信心”的习题。
7. 每章开始时给出重要概念，以便给出该章内容的快速参考。
8. 增加了一些新的实际应用章节，并且更新了现有内容。
9. 本书附带新的多媒体软件，包括期待已久的对 COSMOS 习题库解答系统的更新[①]。

① 这些资料是为采用本书作为教材的教师准备的，详见本书末尾所附教学支持说明。——编者注

Bill Hayt先生在本书第六版修订工作刚开始时就去世了，这对我来说是始料未及的重大打击。我一直没有机会与他探讨本书的修改事宜。我希望本书的修订有助于其面向新一代聪明的年轻工科学生，同时我们（durbin@ieee.org和McGraw-Hill的编辑们）欢迎学生和教师提出意见和反馈，无论是正面的还是负面的，我们都非常感谢。

本书的完成是团队的工作成果，有许多人参与其中，还有许多人提供了帮助。非常感谢McGraw-Hill的编辑和工作人员长期以来的支持，其中包括Melinda Bilecki，Michelle Flomenhoft，Kalah Cavanaugh，Michael Hackett，Christina Nelson, Eric Weber，Phil Meek和Kay Brimeyer。还要感谢我们当地的McGraw-Hill院校代表Nazier Hassan，他来我们学校拜访时非常关心本书的进展。与他们一起工作是一件美好的事情。

对于本书第七版的出版，还要感谢下列人员，他们花了很多时间和精力来审阅本书：

Miroslav M. Begovic, *Georgia Institute of Technology*
Maqsood Chaudhry, *California State University, Fullerton*
Wade Enright, *Viva Technical Solutions, Ltd.*
Rick Fields, *TRW*
Victor Gerez, *Montana State University*
Dennis Goeckel, *University of Massachusetts, Amherst*
Paul M. Goggans, *University of Mississippi*
Riadh Habash, *University of Ottawa*
Jay H. Harris, *San Diego State University*
Archie Holmes, Jr. *University of Texas, Austin,*
Sheila Horan, *New Mexico State University*
Douglas E. Jussaume, *University of Tulsa*
James S. Kang, *California State Polytechnic University, Pomona*
Chandra Kavitha, *University of Massachusetts, Lowell*
Leon McCaughan, *University of Wisconsin*
John P. Palmer, *California State Polytechnic University, Pomona*
Craig S. Petrie, *Brigham Young University*
Mohammad Sarmadi, *The Pennsylvania State University*
A.C. Soudack, *University of British Columbia*
Earl Swartzlander, *University of Texas, Austin*
Val Tereski, *North Dakota State University*
Kamal Yacoub, *University of Miami.*

非常感谢佛罗里达 A&M 大学和佛罗里达州立大学电气与计算机工程系 Jim Zheng, Reginald Perry, Rodney Roberts 和 Tom Harrison 博士的建议。感谢新西兰坎特伯雷大学 Bill Kennedy 付出的大量工作和热情，他对每一章进行了校对并提出了许多建议。特别要感谢Ken Smart和Dermot Sallis提供照相设备，Duncan Shaw-Brown 和 Kristi Durbin 提供摄影服务。还要感谢 Richard Blaikie 在 h 参数实际应用方面提供的帮助，感谢 Wade Enright 提供了许多变压器方面的照片。Cadence公司和Mathworks公司提供了计算机辅助分析软件。非常感谢Phillipa Haigh和Emily Hewat在本书不同

阶段提供的技术支持以及校对方面的帮助。还要感谢我所在的系准许我休假，使我能够开始本书的修订——这意味着我的同事们要帮助我处理许多日常事务。

在过去许多年间，许多人都对我的教学风格产生了影响，包括 Bill Hayt 教授、David Meyer 教授、Alan Weitsman 教授以及我的论文指导教师 Jeffery Gray，还包括我遇到的第一位电气工程师——我的父亲 Jesse Durbin，他是印第安纳理工学院的毕业生。也非常感谢家庭中其他成员的支持和鼓励，包括我的母亲 Roberta、兄弟 Dave, John 和 James 以及我的岳父母 Jack 和 Sandy。最后，感谢我的妻子 Kristi 的耐心、理解、支持和建议。同时还要感谢我的儿子 Sean，他为我带来了许多快乐。

Steven M. Durbin
新西兰基督堂市

目　　录

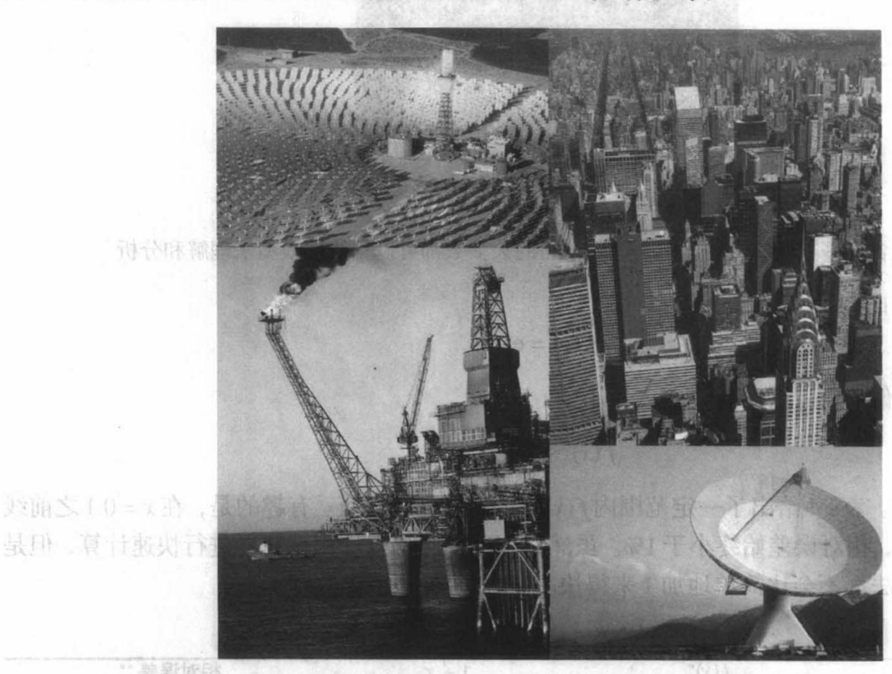
第1章 概 论

主要概念

- 电路分析的内容：直流分析、瞬态分析、交流分析和频率响应
- 分析和设计
- 计算机辅助分析
- 解题方法

1.1 引言

今天的工科毕业生不再只从事工程技术设计工作，他们的工作范围已经超出了创建更好的计算机和通信系统的领域，扩展到了解决社会经济问题的范畴，如空气和水污染治理、城市规划、公共交通、新能源开发、自然资源（特别是石油和天然气）保护等。



不是所有的电气工程师都使用电路分析，但是在他们的职业生涯中，会经常用到早期学到的分析和解决问题的技巧。电路分析课程是接触这些概念最早的课程之一

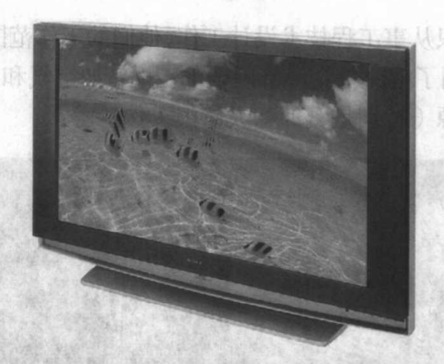
为了解决这些工程问题，工程师必须掌握包括电子电路分析在内的更多技术。如果我们已经进入或者即将进入电气工程专业，那么电路分析很可能是我们所选择领域的先导课程之一。如果选择其他的工程专业，那么电路分析可能是有关电气工程方面的主要课程，它是电子仪器设备、电力供电机器和大规模系统的基础。最重要的是它为拓宽知识面提供了可能，使我们可以成为一个队伍中

见多识广的成员。这样的队伍在组成上越来越呈现多学科交叉的特点，在其成员熟悉所用的语言和定义的情况下，他们之间才能有效地交流。

本章是对本书将要涉及的技术问题的预览，其中简要讨论了分析与设计的关系以及现代电路分析中计算机工具所发挥的重要作用。

1.2 本书概要

本书的基本主题是线性电路分析，这可能会使读者产生疑问："是否有非线性电路分析？"答案当然是肯定的。我们每天都会碰到非线性电路：电视和收音机信号的接收和解码电路；微处理器中每秒百万次的运算电路；电话线上语音到电信号的转换电路以及我们视野范围外的实现其他许多功能的电路。在设计、测试和实现这些非线性电路时，详细的分析是不可避免的。读者可能会问："为什么要学习线性电路分析？"一个非常好的问题！简单的事实是没有一个实际系统（包括电子电路）是完全线性的，但庆幸的是大量的系统在有限范围内均以非常好的线性方式工作，这就使人们可以为其建立线性系统的模型，只是要牢记限制范围。



电视机包含许多非线性电路，但是这些电路的大多数都可以用线性模型来理解和分析

例如，考虑下面的函数：

$$f(x) = e^x$$

对该函数的线性近似为

$$f(x) \approx 1 + x$$

下面进行测试。表 1.1 给出了一定范围内 $f(x)$ 的精确值和近似值。有趣的是，在 $x = 0.1$ 之前线性近似值非常精确，相对误差始终小于 1%。虽然许多工程师可以使用计算器进行快速计算，但是毫无疑问，任何方法都不会比简单地加 1 来得快。

表 1.1 e^x 的线性模型与精确值的比较

x	$f(x)$*	$1+x$	相对误差 **
0.0001	1.0001	1.0001	0.000 000 5%
0.001	1.0010	1.001	0.000 05%
0.01	1.0101	1.01	0.005%
0.1	1.1052	1.1	0.5%
1.0	2.7183	2.0	26%

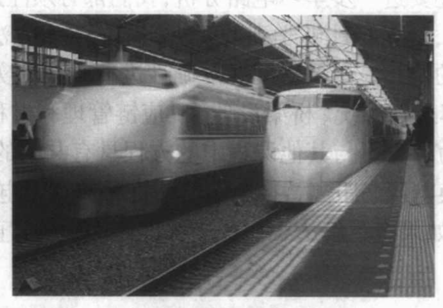
* 4 位有效位

** 相对误差 $\triangleq \left| 100 \times \frac{e^x - (1+x)}{e^x} \right|$

由于线性问题本质上比非线性问题容易解决，因此我们通常为实际情况寻找合理精确的线性近似（或模型）。线性模型更容易处理和理解，从而使设计成为更加直接的过程。

在后面几章中所涉及的电路都是实际电子电路的线性近似。适当的时候，我们会对存在的误差或模型的局限性进行简单讨论，但一般说来会认为近似对大多数应用已足够精确。当实际情况需要更高的精度要求时，将采用非线性模型，当然这将显著增加解题的复杂性。第2章将详细讨论线性电子电路的组成。

线性电路分析可以分为4部分内容：直流分析，瞬态分析，交流分析，频率响应分析。本书将从电阻电路开始，它包括一些简单的例子，如手电筒或烤面包机。这可以让我们有很好的机会来学习许多强有力的工程电路分析方法，比如节点分析、网孔分析、叠加定理、电源变换、戴维南定理、诺顿定理以及几种串并联元件网络的简化方法。电阻电路一个最重要的特点是任何变量的时间相关性都不影响分析过程。换句话说，如果要求得到电阻电路某一时刻的参数值，不必对电路做所有时刻的分析。所以，我们首先只考虑直流电路——这些电路的参数不随时间变化。



现代火车用电力机车驱动，分析这些电力系统的最好方法就是交流或相量分析技术

虽然诸如手电筒或汽车后窗除雾器等直流电路在日常生活中发挥着重要的作用，但是突然发生变化的事情更会引起人们的兴趣（可以想象，安静了100年的鞭炮突然发生爆炸的情形）。在电路分析中，我们把研究突然加上能量或去掉能量的电路的技术称为瞬态分析。为了使这种电路更有意思，需要在电路中增加对电气变量的变化率产生响应的元件，这些元件的加入将导致电路方程中包含导数和积分。幸运的是，可以使用本书第一部分将要学到的简单方法来得到这些方程。



与频率相关的电路存在于许多电子设备中，设计这些设备会带来许多乐趣

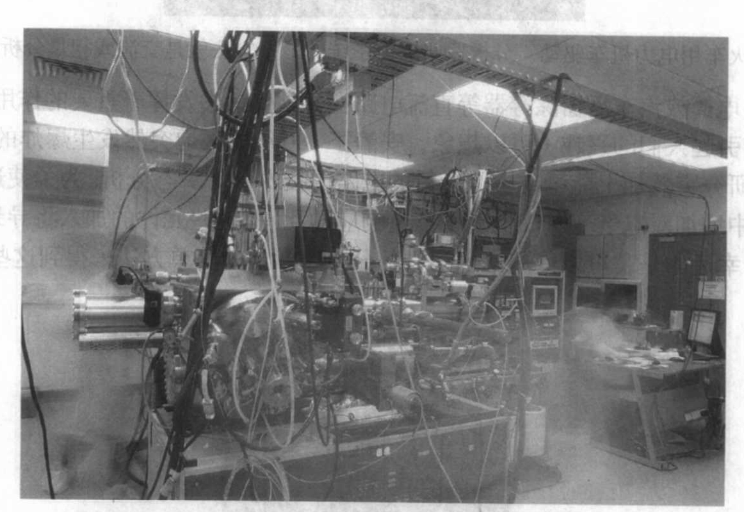
但是并不是所有的时变电路都是突然开启或突然关闭的。空调、电风扇和荧光灯只是日常生活中的几个例子，在这些情形中，基于微积分的方法会非常烦琐和耗时。幸运的是，有更好的方法来分析这些设备的瞬态响应，也许瞬态响应需要很长时间才会消失，但这类分析方法通常称为交流分析，有时也称为相量分析。

最后介绍频率响应的内容。直接对时域分析中得到的微分方程进行运算可以帮助我们理解包含储能元件（比如，电容和电感）的电路的工作特性。然而也会看到，即使包含少量元件的电路的分析有时也会非常困难，所以人们开发出了许多更简单的方法。这些方法包括拉普拉斯和傅里叶分析，利用这些方法可以将微分方程转换成代数方程。这些方法还使我们能够设计对特定频率具有指定响应的电路。我们每天都在使用与频率相关的电路，比如拨电话、选择喜欢的电台或上网等。

1.3 电路分析与工程的关系

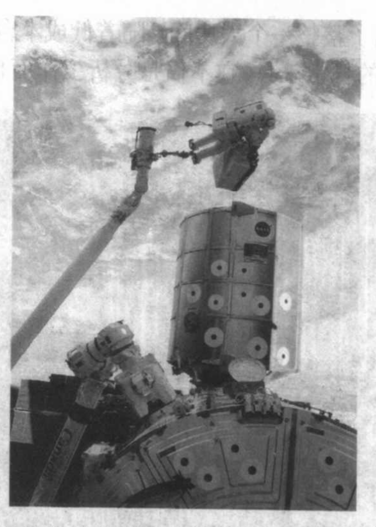
不管学完本课程后是否还要进一步学习电路分析，我们都必须注意这些概念包含许多深层次的内容。除了电路分析技术本身，还包括能够学到的解决问题的系统方法，明确具体问题的目标能力，收集对结果产生影响的信息的技巧，以及对问题准确性进行验证的实践。

熟悉诸如液体流动、机车悬置系统、桥梁设计、供应链管理和过程控制等工程题目的学生将会发现，许多描写各种电路行为的方程与其他课程中的方程具有共同的形式。只需学会怎样“翻译”有关的变量（例如，用力替换电压、距离替换电荷、摩擦系数替换电阻等），就可知道怎样处理其他类型的问题。事情往往是：如果有了解决类似或有关问题的经验，直觉会引导人们找到一个全新问题的答案。



一个分子束外延增长设备。其控制方程与描述简单线性电路的方程非常类似

我们将要介绍的有关线性电路分析的内容是许多后续电气工程课程的基础。电子学研究建立在对二极管和晶体管电路分析的基础上，用二极管和晶体管可以组成电源、放大器和数字电路。本书所要培养的技巧被电气工程师熟练而系统地应用，有时他们甚至不用笔就可以分析一个复杂电路！本书有关时域和频域的章节直接引出信号处理、电力传输、控制理论和通信的讨论。读者将会发现频域分析是一种特别有效的方法，很容易应用于时变激励下的任何物理系统。

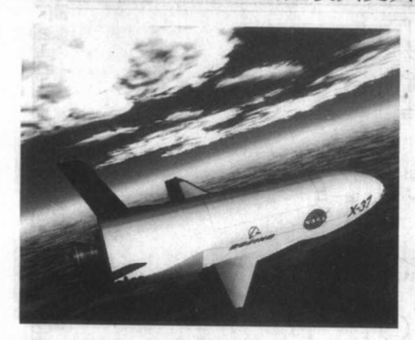


一个机器人操作的实例。可以利用线性电路元件对该反馈控制系统建立模型来确定系统不稳定时的情况

1.4 分析和设计

工程师们对科学原理有基本的理解，他们经常用数学术语表示实际知识，然后再与创造性结合起来从而得到具体问题的解决方法。分析是一种过程，通过这个过程可以确定问题的范围，可以得到理解该问题必需的信息以及计算感兴趣的参数。设计也是一个过程，通过这个过程可以对解决问题的方法进行综合。通常来说，设计问题的答案不唯一，而分析的答案通常唯一。因此，设计的最后一步总是对结果进行分析来确定是否满足要求。

本书主要集中在分析和解决问题的能力拓展上，因为它是任何工程问题的出发点。本书的思想是通过明确的解释、合理布置的例题以及大量的练习来提高这种能力。因此，设计部分嵌入在章后习题以及后面几章中，这样做的目的是使其更具吸引力。



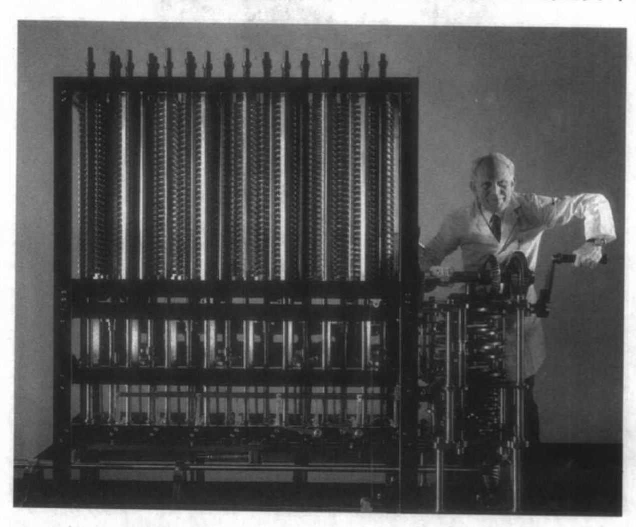


下一代航天飞机的两种不同的设计。尽管两者包含相同的元件，但它们都是独一无二的

1.5 计算机辅助分析

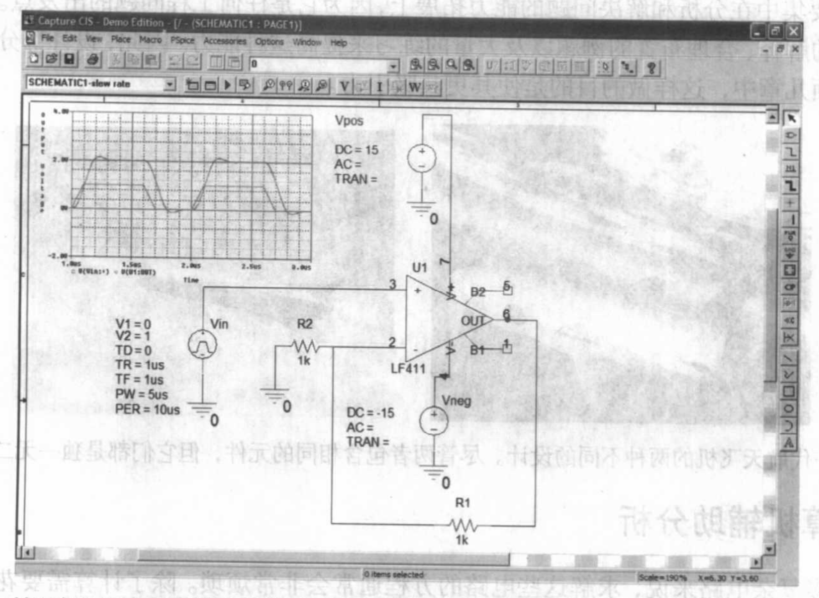
对于许多复杂电路来说，求解这些电路的方程通常会非常烦琐。除了计算需要花费大量的时间以外，还很有可能造成错误。早在电子计算机问世以前，人们就迫切希望能够找到一种工具来帮助求解复杂电路方程，如Charles Babbage在19世纪80年代设计的纯机械的计算机“分析引擎”（Analytical Engine）就是一个可能的解决方法。最早成功用于微分方程求解的电子计算机大概是

20世纪40年代的ENIAC，它占据了整整一个大房间。随着低成本台式计算机的出现，计算机辅助电路分析已发展成一个非常有价值的日常工具，它不仅是分析工作而且也是设计工作的一个组成部分。



Charles Babbage 的“微分引擎 2”，由伦敦科学博物馆在 1991 年完成

计算机辅助设计的一个最重要的方面是最近实现的对用户透明的多任务集成。它可以使人们在计算机屏幕上很快画出电路图，并自动转换为分析程序（如将在第 4 章介绍的 SPICE）所要求的格式。其输出结果能够自动传递给第三个程序，该程序可以对描述电路的各种感兴趣的量进行绘图。一旦工程师对设计的仿真结果感到满意，该软件就可以用元件库中的几何参数输出印制电路板。软件的集成化水平正在不断提高，最终将达到：工程师画出电路图后再按几下按键，就能得到制造完成的电路样板，然后测试！



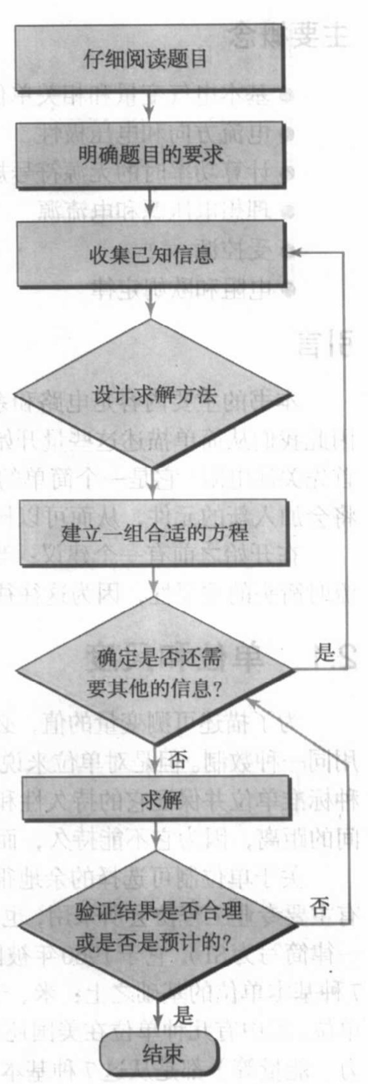
利用商用的原理图捕获软件包画出的放大电路。截图：随时间变化的仿真输出

读者必须意识到电路分析软件虽然好用，但却不能替代传统的纸笔分析。我们需要的是对电路工作原理透彻的理解，这样才能培养设计电路的能力。只是简单地通过运行某个软件包来得到答案

有点像玩彩票一样：用户可能会出现输入错误，菜单选项中存在隐含的默认参数，编写的代码可能出错，这些都可能导致无法替代电路运行的近似估计。因此如果仿真结果与期望的不一致，就可以较早发现问题，而不至于等到发现时已为时过晚。

当然，计算机辅助分析依然是一个强大的工具，它可以改变参数值来仿真电路性能的变化，能够以简单的方式来考虑不同的设计，从而可以减少重复性工作，可以将更多时间集中到工程细节上。

1.6 成功解题策略



当被问及什么是描述电路分析中最令人头痛的部分时，大多数学生的回答是如何着手解题。第二个最困难的部分是怎样得到一组完整的方程并将其组织成可以操作的形式。

基本的直觉是快速浏览题目的具体内容，然后在课本中搜索合适的方程。人们习惯于给定圆的直径求其周长或是确定一个棱锥体的体积。尽管快速解题方法很吸引人，但从长远看，始终如一的系统解题方法才更可取。

右侧的流程图可以用来帮助解决最常见的两个困难：习题入手和解答过程。有的步骤似乎是显然的，但正是每个任务的次序安排以及执行情况才能决定成功与否。

然而电路分析成功的关键是实践。经验是最好的老师，一名成功工程师的成长离不开从错误中积累经验。

深入阅读

下面这本书很便宜，并且卖得很好，它将告诉读者在面对似乎不可能解决的习题时如何制定取胜的策略：

G. Polya, *How to Solve It*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.

第2章　基本元件和电路

主要概念

- 基本电气变量和相关单位：电荷、电流、电压和功率
- 电流方向和电压极性
- 计算功率时的无源符号规则
- 理想电压源和电流源
- 受控源
- 电阻和欧姆定律

引言

本书的主要内容是电路和系统分析。在进行具体分析时，通常需要求指定电流、电压或功率，因此我们从简单描述这些量开始介绍。我们有非常多的可以用来构建电路的器件。为了避免混淆，首先关注电阻（它是一个简单的无源元件），再就是一些理想的电压源和电流源。随着讨论的进展，将会加入新的元件，从而可以构建更加复杂的电路。

在开始之前有一个建议：当标注电压时，请密切注意“+”和“-”符号的作用，以及定义电流时箭头的重要性，因为这往往是产生错误的原因。

2.1　单位和尺度

为了描述可测变量的值，必须同时给出数值和单位，例如3英寸（in.）。幸运的是，大家都使用同一种数制。但是对单位来说却不是如此，需要花一点时间熟悉合适的单位制。人们必须遵守一种标准单位并保证它的持久性和公认性。例如，标准长度单位不应定义为某种橡胶带上两个标记之间的距离，因为它不能持久，而且每个人都有自己的标准。

关于单位制可选择的余地很小。本书采用美国国家标准局于1964年所采用的单位制，它为所有主要专业工程协会所采用，也是当今教科书所采用的单位制，这就是国际单位制（在各种语言中一律简写为SI），它于1960年被国际度量衡会议所采纳。此后国际单位制经过数次修订，它建立在7种基本单位的基础之上：米、千克、秒、安培、开尔文、摩尔和坎德拉（见表2.1）。这是“公制”单位，其中有几种单位在美国还未广泛使用，但在大多数国家已广泛使用。其他量的单位（如体积、力、能量等）都是从这7种基本单位导出的。

表2.1　SI基本单位

基本变量	名称	符号
长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电子电流	安培	A
热力学温度	开尔文	K
物质量	摩尔	mol
光强度	坎德拉	cd

说明： 用人名命名的单位（比如，开尔文是用Glasgow大学教授Lord Kelvin的名字命名的）写成小写字母，但是缩写为大写字母。

功或能量的基本单位是焦耳（J）。1焦耳（在国际单位制里为1 kg m²s⁻²）等价于0.7376英尺磅–力（ft-lbf）。其他能量单位有卡路里（cal），1卡路里等于4.187 J。英国热量单位（Btu）是1055 J。1千瓦小时（kWh）等于3.6×10^6 J。功率定义为做功或能量消耗的速率。功率的基本单位是瓦（W），定义为1 J/s。1瓦等价于0.7376 ft-lbf/s或1/745.7马力（hp）。

说明： 用在食物、饮料、健身中的“卡路里”其实是千卡，即4.187 J。

国际单位制用十进制将较大和较小的单位与基本单位相联系，用前缀指明10的各次幂。表2.2列出了前缀及其相应的符号。加灰衬的部分是工程中最常见的情况。

表2.2 SI前缀

因子	名称	符号	因子	名称	符号
10^{-24}	幺[科托](yocto)	y	10^{24}	尧[它](yotta)	Y
10^{-21}	仄[普托](zepto)	z	10^{21}	泽[它](zetta)	Z
10^{-18}	阿[托](atto)	a	10^{18}	艾[可萨](exa)	E
10^{-15}	飞[母托](femto)	f	10^{15}	拍[它](peta)	P
10^{-12}	皮[可](pico)	p	10^{12}	太[拉](tera)	T
10^{-9}	纳[诺](nano)	n	10^{9}	吉[咖](giga)	G
10^{-6}	微(micro)	μ	10^{6}	兆(mega)	M
10^{-3}	毫(milli)	m	10^{3}	千(kilo)	k
10^{-2}	厘(centi)	c	10^{2}	百(hecto)	h
10^{-1}	分(deci)	d	10^{1}	十(deka)	da

必须记住这些前缀，因为它们会经常出现在本书以及其他科技图书中。几个前缀的结合（如毫微秒）是不能接受的。值得指出的是：在表示距离的单位中，“micron（μm）”比“micrometer”更常见，而10^{-10} m常用埃（Å）表示。在电路分析和一般工程中，往往用所谓的“工程单位”来表示数值。在工程表示法中，某个量被表示为介于1～999之间的数字和一个适当的能被幂次3整除的公制单位。例如，人们更愿意将0.048 W表示成48 mW，而不是4.8 cW，4.8×10^{-2} W或48 000 μW。

练习

2.1 Krf激光器发射的光波长为248 nm，它等同于：(a) 0.0248 mm; (b) 2.48 μm; (c) 0.248 μm; (d) 24 800 Å吗？

2.2 在某数字集成电路中，逻辑门从开态转到关态的时间为1 ns。这对应于：(a) 0.1 ps; (b) 10 ps; (c) 100 ps; (d) 1000 ps？

2.3 一个白炽灯的功率为60 W，如果一直开着，那么它一天消耗的能量为多少焦耳？如果每千瓦小时收费12.5分，那么每周所花的费用为多少？

答案： 2.1 (c)；2.2 (d)；2.3 5.18 MJ，$1.26。

2.2 电荷、电流、电压和功率

电荷

电路分析中一个最基本的概念是电荷守恒。从基本物理学可知，有两类电荷：正电荷（对应于质子）和负电荷（对应于电子）。在本书的大部分电路中，考虑的只是电子流动。有许多器件（如

电池、二极管和晶体管），其正电荷的运动对于理解器件内部的工作原理是非常重要的，但是对于器件外部，一般只关心电子在连接导线上的流动。尽管电荷在电路的不同部分之间不断地传输，但是电荷的总数保持不变。换句话说，电路运行过程中，电子（或质子）既不会被产生，也不会被消灭[①]。运动的电荷产生电流。

说明：从表2.1可知，国际单位制中的基本单位不是从基本物理量导出的，而是与历史上的测量相一致，因此有时可能导致似乎逆向的定义。如根据物理意义应该用电子电荷来定义电流。

在国际单位制中，电荷的基本单位是库仑（C），它通过安培来定义，指单位时间内通过导线的任意横截面的总电荷量。1 C为运载1 A电流的导线每秒钟流过的电荷量（见图2.1）。在该单位制中，电子电荷量为 -1.602×10^{-19} C，质子电荷量为 $+1.602 \times 10^{-19}$ C。

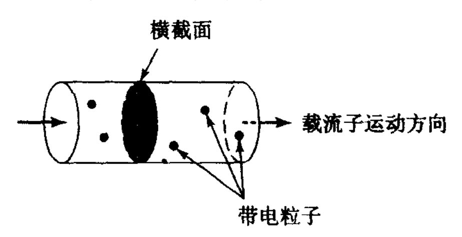


图2.1　利用流过导线的电荷来解释电流的定义。1 A的电流相当于1 C的电荷在1 s内流过任意选择的横截面

不随时间变化的电荷量一般用 Q 来表示。瞬时电荷量（可能随时间变化，也可能不随时间变化）用 $q(t)$ 表示，或简记为 q。本书后面的论述都遵循这个约定：大写字母表示常（时不变）量，而小写字母表示更一般的量，因此，常数电荷可以用 Q 或 q 表示，但是随时间变化的电荷必须用小写字母 q 表示。

电流

"电荷传输"或"电荷运动"对于学习电路的人而言是一个非常重要的基本概念，因为电荷从一个地方移到另一个地方时伴随着能量从一点传输到另一点。人们熟悉的跨区域的电力输送线就是传送能量的一个实例。同样重要的还有改变传递信息的电荷的传输速率的可能性，这个过程是通信系统（如收音机、电视和遥测）的基础。

存在于分立路径（如金属线）上的电流既有数值又有与之相关的方向，它是电荷以一定方向流过给定参考点的速率的度量。

一旦规定了参考方向，就可以设 $q(t)$ 是从任意时刻（$t = 0$）开始以规定方向流过参考点的总电荷。负电荷以规定方向运动时则形成负电流；正电荷以相反方向运动也形成负电流。例如，图2.2表示流经一段导线（比如图2.1中的导线）中给定参考点的电荷总量随时间变化的情况。

我们把在特定位置、特定方向的电流定义为净的正电荷流经该点的瞬时速率。遗憾的是，人们直到后来才意识到这个被广泛使用的定义是不正确的，实际上电流是由负电荷而不是由正电荷的流动产生的。电流用符号 I 或 i 来表示：

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad [1]$$

电流的单位是安培（A），以法国物理学家A. M. Ampère的名字命名。安培通常缩写成"amp"，但这是一种非正式的写法。1 A等于1 C/s。

① 出现冒烟的现象时则另当别论。

利用式[1]计算出瞬时电流，并得到图 2.3 所示的曲线。小写字母 i 表示瞬时值，大写字母 I 表示常（时不变）量。

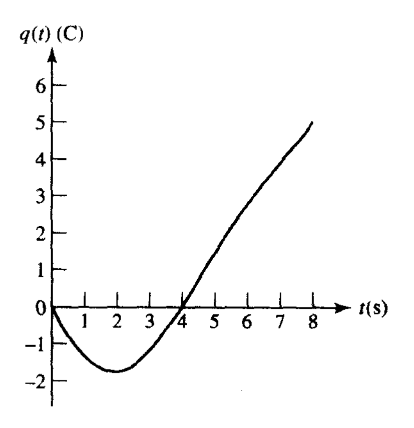


图 2.2　从 $t=0$ 开始，流经给定参考点的总电荷 $q(t)$ 的瞬时值

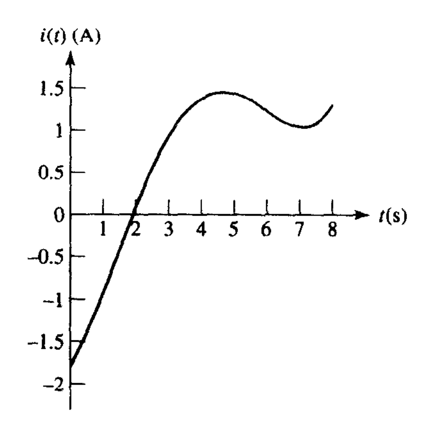


图 2.3　瞬时电流 $i=dq/dt$，其中 q 如图 2.2 所示

从 t_0 到 t 传输的电荷可以用定积分表示为

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^{t} i\, dt'$$

因此在整个时间段上传输的总电荷为

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i\, dt' + q(t_0) \qquad [2]$$

图 2.4 中给出了几种不同类型的电流。不随时间变化的电流称为直流电流，简写为 dc，如图 2.4(a) 所示。可以发现许多随时间按正弦规律变化的电流的实例［见图 2.4(b)］，普通家庭中使用的电路中流过的都是这种类型的电流。该电流通常被称为交流电流或 ac。以后还将讲到指数电流和衰减正弦电流［见图 2.4(c)和图 2.4(d)］。

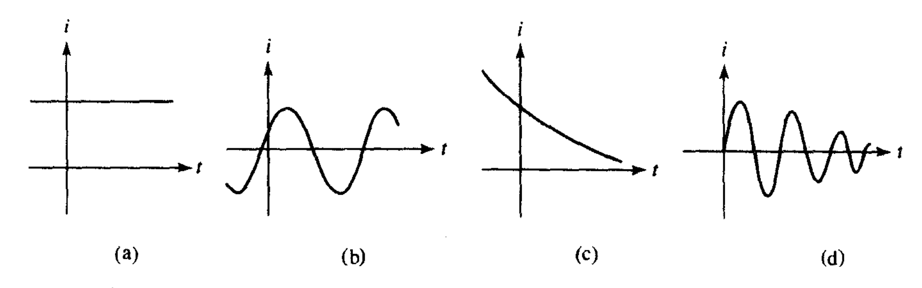


图 2.4　几种类型的电流：(a) 直流电流（dc）；(b) 正弦电流（ac）；(c) 指数电流；(d) 衰减正弦电流

在导体边上附加箭头可表示电流，因此图 2.5(a)中的箭头和数值 3 A 表示净正电荷正以 3 C/s 的速度向右移动，或者净负电荷以 −3 C/s 的速度向左移动。图 2.5(b)中也有两种可能，要么以 −3 A 的大小流向左边，要么以 +3 A 的大小流向右边。上述文字与两张图表示的电流在电效果上是等效的，我们称它们相等。一个更容易想象的非电类的类比是将电流设想为个人储蓄账户：一笔存款可以认为是负的现金流出你的账户，或者正的现金流入你的账户。

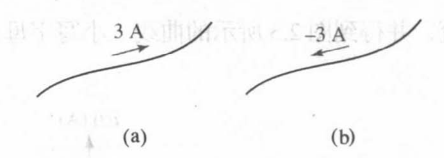


图 2.5 同一个电流的两种表示方法

尽管金属导体中的电流源于电子运动，但把电流看成正电荷的运动会带来很多便利。在电离化气体、电解质以及某些半导体材料中，正电荷的运动构成部分或全部的电流，因此电流的两种定义都只能部分地符合电流的物理性质。我们所采用的电流的定义和符号是标准的。

必须认识到箭头并不表示实际的电流方向，它不过是一个约定，目的是为了避免在讨论“导线中的电流”时产生歧义。箭头是电流定义中的一个基本方面！因此，讨论电流 $i_1(t)$的数值而没有规定方向就如同讨论没有定义的东西一样。比如，图 2.6(a)和图 2.6(b)表示的电流 $i_1(t)$是没有意义的，而图 2.6(c)是电流 $i_1(t)$的确切表示。

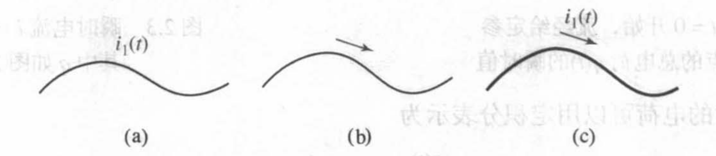


图 2.6 (a, b) 不完整、不适当和不正确的电流定义；(c) 电流 $i_1(t)$的正确定义

练习

2.4 在图 2.7 所示的导线中，电子从左向右移动形成 1 mA 的电流，求 I_1 和 I_2。

图 2.7

答案：$I_1 = -1$ mA；$I_2 = +1$ mA。

电压

现在开始讨论电路元件，我们从一般性定义开始。诸如保险丝、灯泡、电阻、电池、电容、发电机和火花线圈，都可以表示为简单电路元件的组合。用一个无定形物体表示一般的电路元件，它有两个可以连接其他元件的端点（参见图 2.8）。

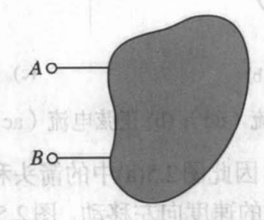


图 2.8 一般的二端电路元件

电路元件有两条可供电流流入或流出的通路。在下面的讨论中将定义具体的电路元件，其性能可以通过观测端子上的电特性来描述。

在图2.8中，假设直流电流从端子A流入，经过元件，然后从端子B返回。同时假定推动电荷流过元件的过程需要消耗能量，因此在两个端子之间就存在电压（或电势差），即电压跨接在元件上。这样，跨接在一对端子上的电压是推动电荷流过元件所需做功的度量。电压的单位是伏特①，1伏特就是1 J/C。电压用V或v表示。

电压可以存在于一对电极之间，无论电极之间是否有电流流过。例如，无论有没有东西接到电极上，汽车电池的两极之间都有12 V的电压。

根据能量守恒原理，迫使电荷穿过元件所花费的能量必定在别处出现。在以后讲到电路元件时会注意到，那些能量或是以某种形式储存起来并可以方便地以电的形式获得，或者以不可逆的形式转变为热、声或其他非电形式。

现在必须建立一种约定以区分提供给元件的能量和元件所提供的能量，这可以通过选择电极A相对于电极B的电压符号来实现，如果正电流流进元件电极A，而且外加电源必须要花费能量以建立这一电流，那么电极A相对于电极B的电压为正，或者也可以说电极B相对于电极A的电压为负。

电压的意义由一对正负代数符号表示。比如，在图2.9(a)中，将电极A标为正号(+)，表示电极A相对于电极B的电压为正v伏特。如果后来发现v的数值正巧是−5 V，则说明A相对于B是−5 V，或者说B相对于A是5 V。其他情况如图2.9(b)、图2.9(c)和图2.9(d)所示。

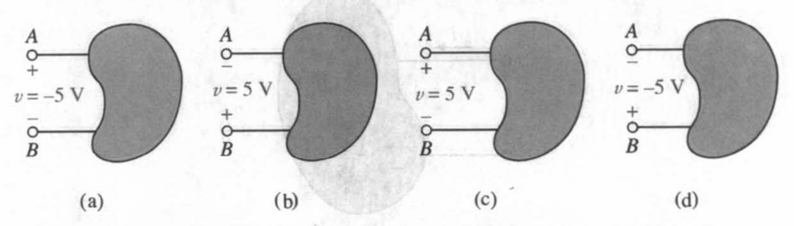


图2.9　(a, b) 端子B相对于端子A为5 V；(c, d)端子A相对于端子B为5 V

正如定义电流时一样，必须认识到代数符号的正负并不表明电压的实际极性，这只不过是一种约定，使得讨论“加在电极两端的电压”时不至于产生混淆。注意，任何电压的定义必须包含一对正负号！如果只给出变量$v_1(t)$的大小而未标出正负号的位置，就如同使用未定义的量一样。图2.10(a)和图2.10(b)不能用做$v_1(t)$的定义，图2.10(c)才是正确的。

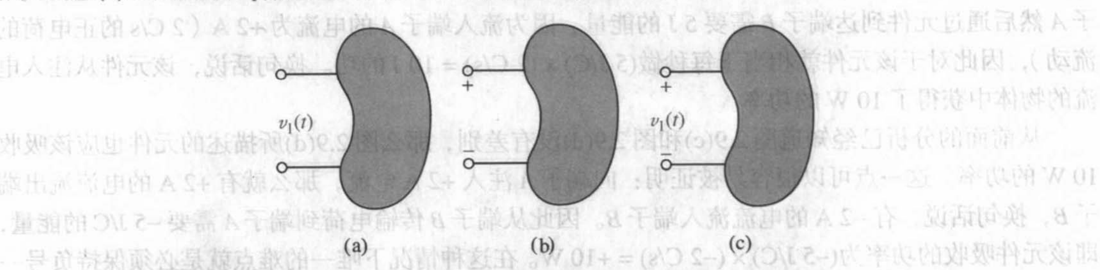


图2.10　(a, b) 不充分的电压定义；(c) 正确的定义，包含变量符号和一对正负符号

练习

2.5　已知图2.11所示元件的$v_1 = 17$ V，求v_2。

① 我们可能要庆幸没有用18世纪印度物理学家Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta的名字作为电势差的单位。

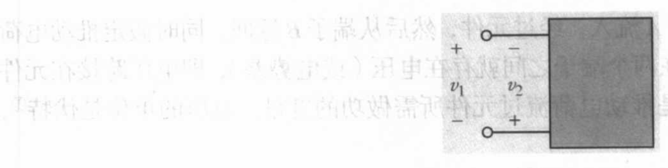


图 2.11

答案：$v_2 = -17$ V。

功率

我们已经定义了功率，并用 P 或 p 表示。如果在 1 s 内通过某个设备传输 1 C 的电荷需要用 1 J 的能量，那么能量的传输速率定义为 1 W。所吸收的功率必须与每秒传输的库仑数（电流）和通过元件传输 1 C 电荷所需要的能量（电压）都成正比，因此，

$$p = vi \qquad [3]$$

从量纲上讲，上式右边为焦尔每库仑（J/C）和库仑每秒（C/s）的乘积，得到的量纲是焦尔每秒（J/s）或瓦特（W）。图 2.12 给出了电流、电压和功率的约定。

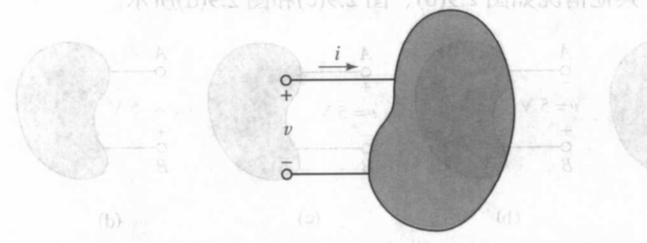


图 2.12 元件所吸收的功率为 $p = vi$。或者说元件产生或提供的功率为 $-vi$

我们已通过电路元件两端的电压和流过元件的电流得到了该电路元件所吸收的功率的表达式。电压通过能量消耗来定义，而功率则是能量消耗的速率。但是，只有在确定电流方向后，才能说明图 2.9 所示的 4 种情况下的能量传输。假设每个元件上面的导线存在一个方向向右、大小为 +2 A 的电流，首先考虑图 2.9(c)所示的情况，端子 A 相对于端子 B 为 +5 V，这意味着传输 1 C 正电荷到端子 A 然后通过元件到达端子 B 需要 5 J 的能量。因为流入端子 A 的电流为 +2 A（2 C/s 的正电荷的流动），因此对于该元件就相当于每秒做(5 J/C) × (2 C/s) = 10 J 的功。换句话说，该元件从注入电流的物体中获得了 10 W 的功率。

从前面的分析已经知道图 2.9(c)和图 2.9(d)没有差别，那么图 2.9(d)所描述的元件也应该吸收 10 W 的功率。这一点可以很容易被证明：向端子 A 注入 +2 A 电流，那么就有 +2 A 的电流流出端子 B，换句话说，有 −2 A 的电流流入端子 B。因此从端子 B 传输电荷到端子 A 需要 −5 J/C 的能量，即该元件吸收的功率为(−5 J/C) × (−2 C/s) = +10 W。在这种情况下唯一的难点就是必须保持负号一致，但正确答案与正参考端子的选择无关［图 2.9(c)中的端子 A 和图 2.9(d)中的端子 B］。

现在看图 2.9(a)的情况，流入端子 A 的电流同样为 +2 A。因为从端子 A 传输电荷到端子 B 需要 −5 J/C 的能量，因此吸收的功率为(−5 J/C) × (2 C/s) = −10 W。这意味着什么呢？怎么会吸收负的功率呢？如果从能量传输角度来考虑，2 A 的电流流入端子 A，那么每秒就有 −10 J 的能量传输到该器件。该器件实际上以 10 J/s 的速率失去能量。换句话说，它可以为其他物体提供 10 J/s（即 10 W）的功率，因此吸收负的功率就等于提供正的功率。

概括一下，图 2.12 表明，如果某元件的一个端子相对于其他端子为正 v 伏特，并且通过该端子流入元件的电流为 i，那么该元件吸收功率为 $p = vi$，也可以说将 $p = vi$ 的功率传递给该元件。如

果电流箭头指向元件带正号的端子，那么可以说符合无源符号规则。我们必须仔细研究、理解和牢记这个规则。换句话说，如果电流箭头和电压极性符号的设置使得电流进入元件标正号的端子，那么就可以用指定的电压和电流的乘积表示该元件吸收的功率。如果乘积为负，那么该元件吸收负的功率，或者说实际上产生功率并传递给外部其他的器件。比如，在图 2.12 中，$v = 5$ V，$i = -4$ A，那么该元件或者吸收 –20 W 的功率或者产生 20 W 的功率。

说明：如果电流箭头指向元件标有“+”号的端子，那么得到的 $p = vi$ 是吸收功率。如果结果为负表明该元件实际上产生功率，这时定义电流流出“+”端子可能更合适。

如果可以用多种方法来完成某件事情，当采用不同方法的人试图交流时就有可能产生混淆，这时就需要某种规则。比如，我们规定地图上方为北是相当随意的，指北针并不总是指向上方。那么如果和一个将地图上方定义为南的人进行交流，那就会产生混乱。因此就产生了一个通常的约定，即总是将电流的方向定为指向电压正端，而不管该元件是吸收功率还是产生功率。虽然有时会导致在电路图中标注的电流与直觉相反，但该约定本身是正确的。更自然的方法应当是将正电流标成流出一个电压或电流源，为一个或多个电路元件提供正功率。

说明：如果电流箭头从元件标有“+”号的端子流出，那么 $p = vi$ 为产生的功率。如果结果为负表明该元件实际上是吸收功率。

例题 2.1　计算图 2.13 中各个部件吸收的功率。

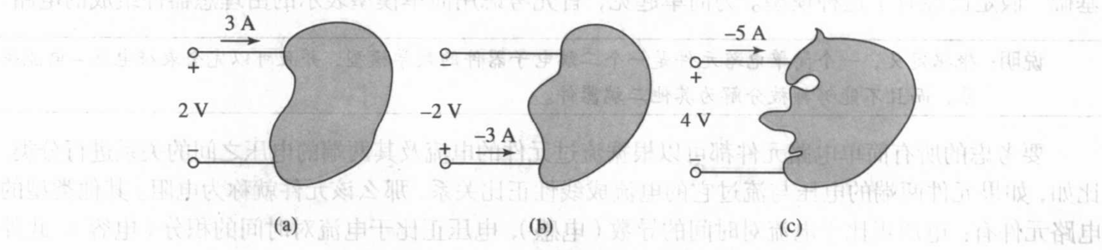


图 2.13　(a, b, c) 3 个二端元件的例子

解：在图 2.13(a) 中，参考电流的定义符合无源符号规则，说明该元件吸收功率。由于流入正参考端子的电流为 +3 A，因此吸收功率为

$$P = (2\ \mathrm{V})(3\ \mathrm{A}) = 6\ \mathrm{W}$$

图 2.13(b) 有一点差别，流入正参考端子的电流为 –3 A，但是电压为负，因此吸收功率为

$$P = (-2\ \mathrm{V})(-3\ \mathrm{A}) = 6\ \mathrm{W}$$

可以看出这两种情况其实是等效的：+3 A 的电流流入上端相当于 +3 A 的电流流出下端，或者 –3 A 的电流流入下端。

对于图 2.13(c)，同样可以应用无源符号规则计算得到吸收功率为

$$P = (4\ \mathrm{V})(-5\ \mathrm{A}) = -20\ \mathrm{W}$$

因为得到了一个负的功率，因此图 2.13(c) 所示元件实际上产生了 +20 W 的功率（即它是一个能源）。

练习

2.6　求图 2.14(a) 中电路元件吸收的功率。

2.7　求图 2.14(b) 中电路元件产生的功率。

2.8 求 $t = 5$ ms 时传输给图 2.14(c)中的电路元件的功率。

图 2.14

答案：1.012 W；6.65 W；−15.53 W。

2.3 电压源和电流源

利用电流和电压的概念可以更明确地定义一个电路元件。

说明：必须区分实际的物理器件本身和在电路中分析其行为所使用的数学模型之间的差别。模型只是一个近似。

下面用电路元件来表示元件的数学模型。为实际器件选择特定模型时必须以实验数据或经验为基础。假定已经有了这种模型。为简单起见，首先考虑用简单模型表示的由理想器件组成的电路。

说明：根据定义，一个简单电路元件是一个二端电子器件的数学模型，并且可以完全表征电压－电流关系，而且不能够再被分解为其他二端器件。

要考虑的所有简单电路元件都可以根据流过元件的电流及其两端的电压之间的关系进行分类。比如，如果元件两端的电压与流过它的电流成线性正比关系，那么该元件就称为电阻。其他类型的电路元件有：电压正比于电流对时间的导数（电感），电压正比于电流对时间的积分（电容）。此外还有电压与电流完全无关的元件，电流与电压完全无关的元件，这些被称为独立源。此外，需要定义一些特殊的电源，它们的源电压或电流取决于电路其他地方的电流或电压，这类电源称为受控源。受控源广泛应用于电子学中，尤其是在放大电路中用来对晶体管的直流和交流行为建立模型。

独立电压源

所要考虑的第一个元件是独立电压源，电路符号如图2.15(a)所示。下标s只表示该电压是一个源电压，这是一种常规表示，但并不是必需的。独立电压源的特点是端电压完全独立于流过它的电流。因此，如果给定一个电压源的端电压为 12 V，那么无论流经的电流多大，端电压永远不变。

说明：你是否曾经注意过当房间里打开空调时灯会变暗，这是因为突然的一个大电流会导致电压暂时减小。当马达开始运转后，它只需要小电流来保持运行。此时，电流减小，电压恢复到原来的值，电源插座又可以重新近似为理想电压源。

独立电压源是一种理想电源，它并不能精确表示任何实际物理器件，因为理想电源理论上可以提供无限的能量。理想电压源确实提供了几种实际电压源的合理近似。比如，汽车蓄电池有 12 V 的端电压，只要流过的电流不超过几个安培，其端电压基本上保持为常数。小电流可以从两个方向流过电池。如果电流为正且流出电池正端，那么电池为汽车前灯提供功率；如果电流为正且流进电

池正端，那么电池从发电机吸收能量而被充电[①]。家用电源插座也近似于一个独立电压源，提供 $v_s = 115\sqrt{2}\cos 2\pi 60t$ V 的电压，对小于 20 A 的电流，该表示方式都是有效的。

需要重申的是，在图2.15(a)中独立电压源符号上端标注的正号并不一定表示上端电压的数值真地相对于下端为正，它只表示上端电压比下端电压高 v_s 伏。在某些场合，v_s 可能为负，这时上端电压相对于下端电压实际上为负。

假设图 2.15(b)中的电源上端导线有一个标有 i 的电流，该电流 i 方向为流进电源正端，那么符合无源符号规则，因此吸收功率为 $p = v_s i$。由于电源通常是向一个网络提供功率而不是吸收功率，所以可以选择图 2.15(c)所示的电流方向，以使该电源提供 $v_s i$ 的功率。这两种箭头方向都可采用，在本书中采用图 2.15(c)中的规则来表示电压源和电流源，它们不是无源元件。

说明： 直流电压源和直流电流源的术语使用得比较普遍。从字面上看，它们的意思分别是直流电流电压源和直流电流电流源。虽然看起来有点奇怪，甚至有点重复，但这些术语已经被广泛使用而无法改正了。

具有固定端电压的独立电压源通常称为独立直流电压源，可以用图 2.16(a)或图 2.16(b)所示的符号表示。注意，在图2.16(b)中给出了电池的物理结构，较长的一极为正端，这时正负号标注显得多余，但通常还是采用这样的标注。出于完整性的考虑，图 2.16(c)给出了独立交流电压源的符号。

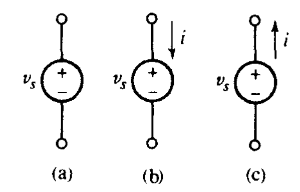


图 2.15　独立电压源的电路符号

图 2.16　(a) 直流电压源符号；(b) 电池符号；(c) 交流电压源符号

独立电流源

另一个理想电源为独立电流源，这里流过元件的电流完全独立于其两端的电压。独立电流源的符号如图 2.17 所示。如果 i_s 为常数，称该电源为独立直流电流源。类似于图 2.16(c)所示的交流电压源，一个交流电流源通常画成在一个箭头上有一个代字号“~”的形式。

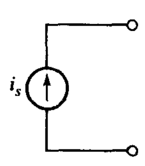


图 2.17　独立电流源的电路符号

像独立电压源一样，独立电流源不过是一种物理元件的合理近似。理论上它可以提供无限的功率，因为它在任何端电压下都产生相同的有限电流。可是它确实是实际电源的很好近似，尤其是在电子电路中。

独立电压源能够提供固定电压，但可以流过任何电流，许多学生经常会犯这样的错误，他们认为独立电流源在提供固定电流时其两端的电压为零。实际上，我们不能够预先知道电流源两端的电压为多少，它完全取决于所连接的电路。

① 或者可用朋友车里的电池，万一忘了关前灯的话。

受控源

上面讨论的两类理想电源被称为独立源，因为电源的值不以任何方式受到电路其他部分的影响。这与另一类理想电源（即受控源）相反，受控源的值取决于所分析系统中某处的电压或电流。这类电源出现在许多电子器件（如晶体管、运算放大器和集成电路）的等效电路模型中。为了区分独立源与受控源，人们引入了图2.18所示的菱形符号。在图2.18(a)和图2.18(c)中，K是无量纲的标量；在图2.18(b)中，g是单位为A/V的标量系数；在图2.18(d)中，r是单位为V/A的标量系数。控制电流i_x和控制电压v_x必须在电路中给予定义。

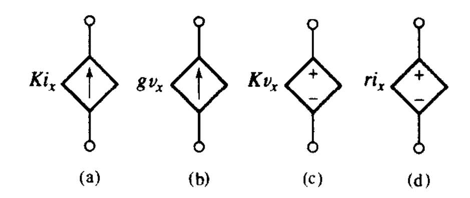


图2.18 4种不同类型的受控源：(a) 电流控制电流源；(b) 电压控制电流源；(c) 电压控制电压源；(d) 电流控制电压源

你可能会感到有点奇怪，一个电流源的电流取决于一个电压，一个电压源的电压受到流过其他元件的电流控制。即使是受到远处电压控制的电压源也令人感到奇怪，但是这种电源对于建立复杂系统的模型非常有用，它可以使分析变得简单。比如场效应管的漏极电流是栅极电压的函数，一个模拟集成电路的输出电压是差分输入电压的函数。当电路分析中碰到受控源时，可以直接写出受控源的整个表达式，就好像它是与独立电源相关联的数值。这通常需要一个额外的方程来完成整个分析，除非控制电压或电流是方程组中明确的未知量。

例题 2.2 见图2.19(a)所示的电路，已知v_2为3 V，求v_L。

解： 已经得到部分标注的电路图以及$v_2 = 3$ V，如图2.19(b)所示。

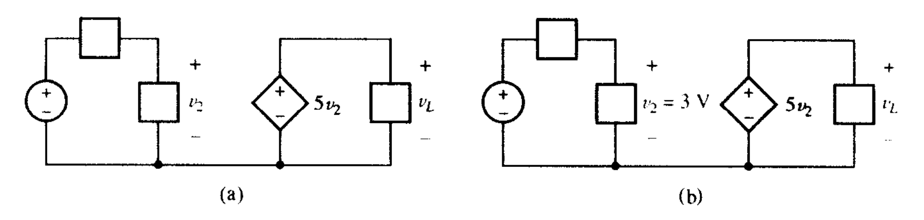


图2.19 (a) 包含电压控制电压源的电路；(b) 含有附加信息的电路图

接着看一下给出的信息。检查电路图，可以看出电压v_L等于受控源两端的电压，因此，

$$v_L = 5v_2$$

从这一点可以看出，只有得到v_2，才能解决问题。

回到电路图中，可以看出实际上已经知道v_2，它被指定为3 V，因此可得

$$v_2 = 3$$

现在有两个方程，其中有两个未知数，因此可以求得$v_L = 15$ V。

从这个过程可以得到重要的一点，就是花一点时间进行电路图的全面标注是值得的。最后一步必须进行验证以确保结果正确。

练习

2.9　求图 2.20 所示电路中每个元件吸收的功率。

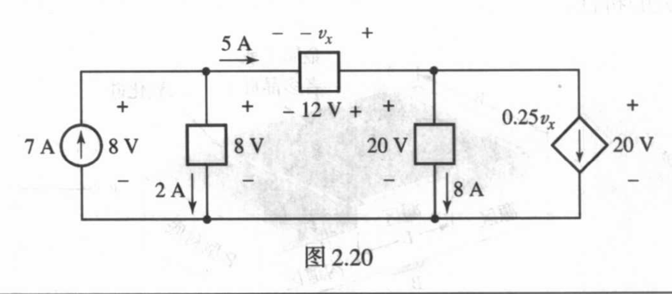


图 2.20

答案:（从左到右）–56 W；16 W；–60 W；160 W；–60 W。

受控电压、电流源和独立电压、电流源都是有源器件，它们能够向外部元件提供功率。目前我们认为一个无源元件只能接收功率，但是后面会讲到有些无源元件可以储存有限的能量，然后可以将能量返回给其他的外部元件。因为仍然希望称它们为无源元件，所以必须将原先的两个定义做一些修改。

网络和电路

两个或两个以上的电路元件互相连接可组成电子网络。如果该网络至少包含一条闭合路径，则也可以称为电子电路。注意：任何一个电路都是网络，但并不是所有的网络都是电路（参见图2.21）！

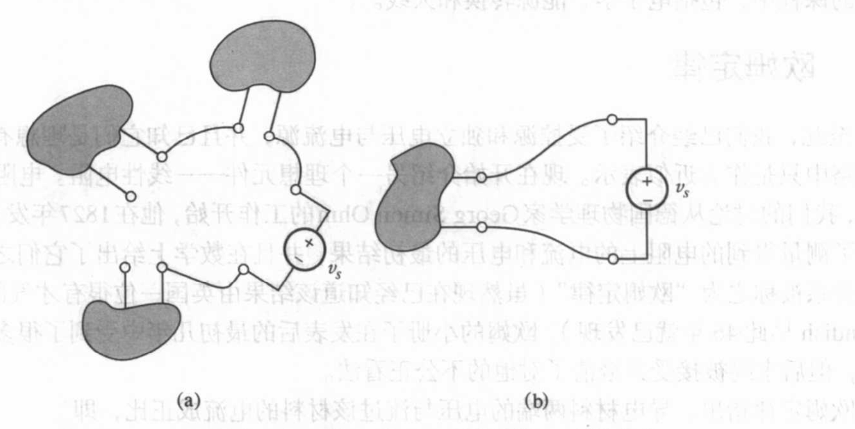


图 2.21　(a) 是网络，但不是电路；(b) 既是网络，也是电路

至少包含一个有源元件（如独立电压源、独立电流源）的网络称为有源网络，不包含任何有源元件的网络称为无源网络。

现在我们已经定义了电路元件并给出了几种具体电路元件（独立源和受控源）的定义。本书余下部分将只定义5种其他电路元件：电阻、电感、电容、变压器和理想运算放大器（简称运放）。这些就是所有的理想元件。它们很重要，因为可以通过把它们连接起来组成网络和电路来表示真实的器件，且可以达到要求的精度。图 2.22(a)和图 2.22(b)所示的晶体管可以用由 v_{gs} 表示的电压端子和一个受控电流源来表示，如图 2.22(c)所示。受控电流源产生的电流取决于电路中另一处的电压。参数 g_m 通常称为跨导，它可以通过晶体管的具体细节以及连接在晶体管上的电路所确定的工作点

进行计算，该值通常很小，数量级从 10^{-2}~10 A/V。只要正弦信号源的频率不是太高或太低，器件模型都具有很好的精度。在模型上加入另一些理想电路元件（如电阻和电容）进行修正后，还可以用于描述与频率相关的特性。

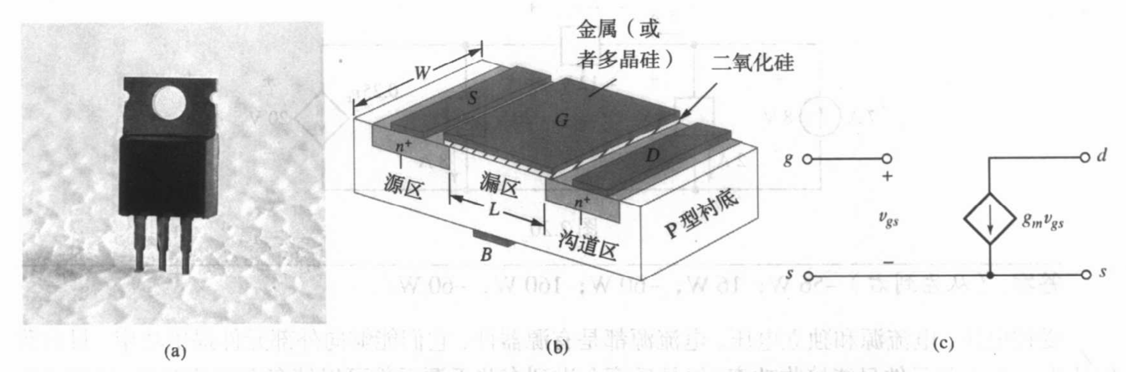


图 2.22　金属氧化物半导体场效应管（MOSFET）：(a) TO-220 封装的 IRF540 N 沟道功率 MOSFET，额定值为 100 V，22 A；(b) 基本 MOSFET 的截面图（R. Jaeger，微电子设计，McGraw-Hill, 1997）；(c) 交流分析中使用的等效电路

类似的（可能更小的）晶体管只是集成电路上很小的一部分，一个 2 mm × 2 mm 见方的 200 μm 厚的集成电路可以包含几千个晶体管和各种电阻电容，因此一个大小等于本页上一个字母的实际器件却需要由 1 万个理想简单电路元件组成的模型表示。“电路模型”的概念广泛应用于与电气工程相关的课程中，包括电子学、能源转换和天线。

2.4　欧姆定律

至此，我们已经介绍了受控源和独立电压与电流源，并且已知它们是理想有源器件，但在实际电路中只是作为近似表示。现在开始介绍另一个理想元件——线性电阻。电阻是最简单的无源元件，我们的讨论从德国物理学家Georg Simon Ohm的工作开始，他在1827年发表了一个小册子，描述了测量得到的电阻上的电流和电压的最初结果，并且在数学上给出了它们之间的关系，现在这个关系被称之为“欧姆定律”（虽然现在已经知道该结果由英国一位很有才气的半隐居者 Henry Cavendish 早此 46 年就已发现）。欧姆的小册子在发表后的最初几年中受到了很多不公正的批评和嘲笑，但后来终被接受并澄清了对他的不公正看法。

欧姆定律指出，导电材料两端的电压与流过该材料的电流成正比，即

$$v = Ri \qquad [4]$$

其中，比例常数 R 称为电阻，单位为欧姆，即 1 V/A，习惯上用字母 Ω 表示。

如果在 i-v 坐标轴上表示该关系，那么它是一条通过原点的直线，如图 2.23 所示。式[4]是线性方程，即为线性电阻的定义。因此，如果与任何一个元件相关的电流和电压的比例总是常数，那么该元件就是一个线性电阻，且电阻值为电压与电流之比。尽管可以用一些特殊电路模拟负电阻，但电阻值通常为正。

必须强调的是：线性电阻是一个理想电路元件，只是实际物理器件的数学模型。电阻很容易制造和买到，但是这些物理器件的电压–电流比率只是在一定的电流、电压或功率范围内保持为常数，并且还可能取决于温度和其他环境因素。通常将线性电阻简称为电阻，而非线性的电阻称为非线性电阻。不能把非线性电阻看成是不需要的元件，尽管它们的存在使分析变得复杂，但有些元件

的性能正是依靠它的非线性或由于非线性的存在而使性能得到改进。比如，用做过流保护的保险丝和用做电压调整的稳压二极管都是非线性程度很大的元件，在电路设计中正是利用了它们的非线性特性。

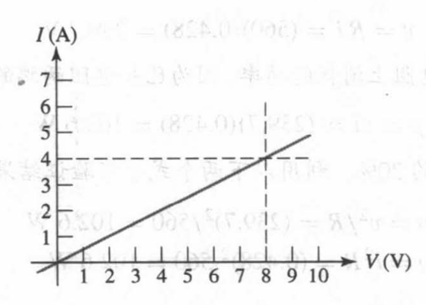


图 2.23　一个 2 Ω 线性电阻的电流－电压关系

功率吸收

图 2.24 给出了几种不同的电阻封装，以及电阻最常使用的电路符号。与已经采用的电压、电流和功率的约定一致，电阻吸收的功率为 v 和 i 的乘积，即按照无源符号规则选择 v 和 i。所吸收的功率在物理上表现为热或光，并且总为正。（正）电阻为无源元件，不能提供功率或储存能量。吸收功率也可表示成

$$p = vi = i^2R = v^2/R \qquad [5]$$

本书的作者之一（他不希望被指明）①曾经有过一个不幸的经历，即不恰当地将 100 Ω、2 W 的碳膜电阻连接到 110 V 电源上，其产生的火苗、烟和爆裂相当令人震惊。它表明实际的电阻只是在一定限度内表现得像一个理想线性电阻模型。在当时的情况下，那个不幸的电阻被要求去吸收 121 W 的功率，可是按照设计它只能承受 2 W 的功率，因此可以理解它的反应是多么激烈。

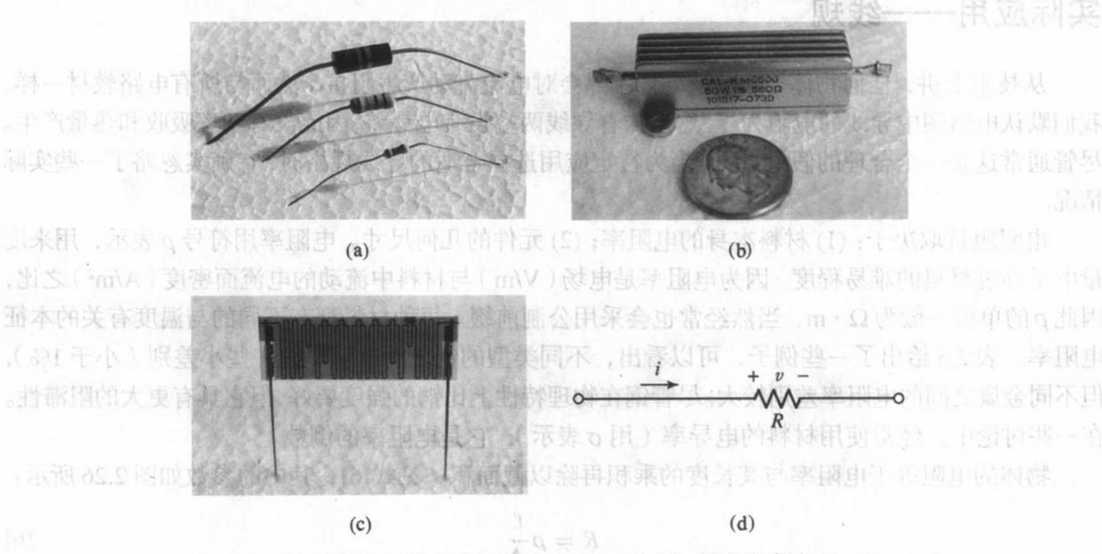


图 2.24　(a) 几种常用的电阻封装；(b) 560 Ω 电阻，额定功率为 500 W；(c) 由 Ohmcraft 制造的 5% 容差、10 TΩ 电阻（10 000 000 000 000 Ω）；(d) 电阻的电路符号，适用于(a)~(c)的任何一个电阻

① 他的名字被要求写成 S. M. D。

例题2.3 图2.24(b)所示的电阻连接在电路中，要求流过428 mA的电流。计算电阻两端的电压以及消耗的功率。

解：根据欧姆定律得到电阻两端的电压为

$$v = R\,i = (560)(0.428) = 239.7\ \text{V}$$

可以通过不同的方法得到电阻上消耗的功率。因为已知电阻两端的电压以及流过的电流，因此，

$$p = vi = (239.7)(0.428) = 102.6\ \text{W}$$

约为最大额定功率500 W的20%。利用以下两个式子可验证结果

$$p = v^2/R = (239.7)^2/560 = 102.6\ \text{W}$$
$$p = i^2R = (0.428)^2\,560 = 102.6\ \text{W}$$

与预计一致。

练习

根据图2.25中给出的v和i，计算下列参数。

2.10 已知$i = -1.6$ mA，$v = -6.3$ V，求R。

2.11 已知$v = -6.3$ V，$R = 21\ \Omega$，求吸收功率。

2.12 已知$v = -8$ V，R吸收0.24 W的功率，求i。

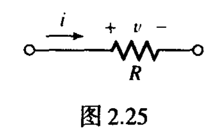


图2.25

答案：3.94 kΩ；1.89 W；−30.0 mA。

实际应用——线规

从技术上讲，任何物体（除了超导体）都会对电流流动产生阻抗，然而与所有电路教材一样，我们默认电路图中导线的电阻为零。这意味着导线两端没有电势差，因此没有功率吸收和热量产生。尽管通常这是一个合理的假设，但是当为特定应用选择合适的导线规格时，它确实忽略了一些实际情况。

电阻阻抗取决于：(1) 材料本身的电阻率；(2) 元件的几何尺寸。电阻率用符号ρ表示，用来度量电子穿过材料的难易程度。因为电阻率是电场（V/m）与材料中流动的电流面密度（A/m²）之比，因此ρ的单位一般为$\Omega \cdot \text{m}$，当然经常也会采用公制前缀。每种材料都有不同的与温度有关的本征电阻率。表2.3给出了一些例子，可以看出，不同类型的铜之间电阻率有一些小差别（小于1%），但不同金属之间的电阻率差别较大。尽管钢在物理特性上比铜的强度要好，但它具有更大的阻滞性。在一些讨论中，经常使用材料的电导率（用σ表示），它是电阻率的倒数。

物体的电阻等于电阻率与其长度的乘积再除以截面积，见式[6]，其中的参数如图2.26所示：

$$R = \rho\frac{\ell}{A} \qquad [6]$$

通过选择制造金属线的材料和测量应用环境的温度可以确定电阻率。由于金属线具有的电阻，它会吸收一定的功率，电流流动时就会产生热量。粗导线有更低的电阻且更容易散热，但这种导线比较重，体积较大，并且价格较贵，因此，从实际考虑一般都选择能够安全工作的最细导线，而不是简单地选择可获得的最大直径的导线来减少电阻。美国线规（AWG）是定义导线尺寸的标准系统。在选择线规时，较小的AWG对应于较大的导线直径。表2.4为常用线规简表。对于特殊导线的应用，要以导线使用的场合以及期望的最大电流为依据，而且还必须了解当地的防火和电气安全规则。

表2.3 常用电气导线材料和电阻率 *

ASTM 规格 **	硬度和形状	20°C 时的电阻率（μΩ · cm）
B33	镀锡软铜线，圆形	1.7654
B75	软铜管，OF 铜	1.7241
B188	铜，硬总线管，方形或矩形	1.7521
B189	表面覆盖有铅的软线，圆形	1.7654
B230	硬铝，圆形	2.8625
B227	覆盖有铜的钢，硬线，圆形，40 HS	4.3971
B355	覆盖有镍的软铜线，圆形，10 级	1.9592
B415	覆盖有铝的钢，硬线，圆形	8.4805

* C. B. Rawlins, "Conductor Materials," *Standard Handbook for Electrical Engineering*, 13th ed., D.G. Fink 和 H. W. Beaty, eds. New York: McGraw-Hill, 1993, p.4-4 to p.4-8。

** 美国测试材料协会。

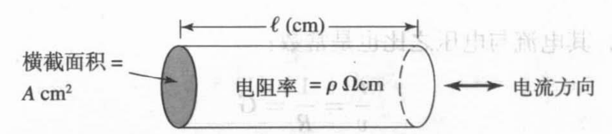


图2.26 计算金属线电阻的几何参数的定义。假定材料的电阻率在空间上均匀分布

表2.4 一些常用线规和（软）硬铜线电阻 *

导体尺寸（AWG）	横截面积（mm²）	20°C 时每 1000 英尺（ft.①）的电阻
28	0.0804	65.3
24	0.205	25.7
22	0.324	16.2
18	0.823	6.39
14	2.08	2.52
12	3.31	1.59
6	13.3	0.3952
4	21.1	0.2485
2	33.6	0.1563

* C. B. Rawlins, et al., *Standard Handbook for Electrical Engineering*, 13th ed., D. G. Fink 和 H. W. Beaty, eds. New York: McGraw-Hill, 1993, p. 4-47。

例题2.4 一条2000英尺（ft.）长的导线接在一个高功率灯泡上，该灯泡的电流为100 A。如果采用4 AWG，该导线消耗（即损失和浪费掉）的功率为多少？

解： 解决问题的最好方法是画出一个草图，如图2.27所示。从表2.4可知对于4 AWG导线，每1000 ft.的电阻为0.2485 Ω。到达灯泡的导线长2000 ft.，并且返回到电源的导线长也为2000 ft.，即总共4000 ft.。因此，导线的电阻为

$$R = (4000\ \text{ft.})(0.2485\ \Omega/1000\ \text{ft.}) = 0.994\ \Omega$$

① 1 ft. = 0.3048 m。——编者注

那么消耗掉的功率为 i^2R，其中 $i=100$ A。即导线的消耗功率为 9940 W 或 9.94 kW。可以看出，虽然导线总电阻小于 1 Ω，但却浪费掉了巨大的功率：该功率也必须由电源提供，但是却永远到不了灯泡。

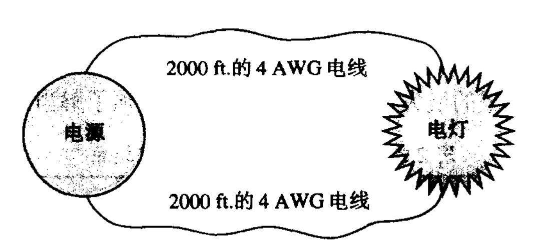


图 2.27 例题 2.4 电灯电路的电路图

练习

2.13 面对例题 2.4 中描述的严重功率损耗，负责人要求用 2 AWG 导线替换 4 AWG 导线。计算新导线的功率损耗，假定电灯电流仍为 100 A。新导线将有多重（2倍，4倍，等等）？

答案：6.25 kW，1.59 倍。

电导

对线性电阻而言，其电流与电压之比也是常数：

$$\frac{i}{v}=\frac{1}{R}=G \qquad [7]$$

其中，G 称为电导。电导的国际标准单位为西门子（S），即 1 A/V。早期非正式的电导单位为 mho（姆欧），"omega" 字母的翻转℧。偶尔可以在一些电路图中以及教材中看到该单位仍在使用。表示电阻和电导的电路符号相同 [见图 2.24(d)]。同样，吸收的功率必须为正，可以利用电导表示为

$$p=vi=v^2G=\frac{i^2}{G} \qquad [8]$$

因此 2 Ω 电阻的电导为 $\frac{1}{2}S$，如果流过的电流为 5 A，那么两端的电压为 10 V，吸收的功率为 50 W。

到目前为止，本节中给出的所有表达式都以瞬时电流、电压和功率表示，如 $v=iR$ 和 $p=vi$。应该知道这其实是 $v(t)=Ri(t)$ 和 $p(t)=v(t)i(t)$ 的速记。流过电阻的电流和两端的电压必须以相同的方式同时随时间变化，因此，如果 $R=10\ \Omega$，$v=2\sin 100t$ V，那么 $i=0.2\sin 100t$ A。注意，功率为 $0.4\sin^2 100t$ W。一个简单的草图可以解释它们随时间变化的本质是不同的。尽管在特定时间区间内电流和电压可能为负，但吸收的功率始终为正。

电阻可以作为定义短路和开路的基础。电阻为 0 Ω 时定义为短路，因为 $v=iR$，那么短路两端的电压必定为零，但可以有任意电流。同样，电阻为无穷大时定义为开路。从欧姆定律可以得到，不管开路电压多大，电流必定为零。尽管实际导线有一个很小的电阻，但我们总假定其电阻为零，除非特别说明。因此，在所有的电路图中，导线被认为是短路。

总结和复习

- 电气工程中最常使用的单位制是国际单位制(SI)。
- 正电荷移动方向为正电流流动方向，即正电流方向与电子移动方向相反。

- 定义电流，必须同时给定数值和方向。通常用大写字母 I 表示常数（直流）电流，用 $i(t)$ 或 i 表示其他电流。

说明： 用 i 或者 $i(t)$ 表示的电流可以是常量（直流），也可以是时变量，但是用符号 I 表示的电流一定是时不变的。

- 定义元件两端电压时必须在端子上标明“+”和“−”以及给出数值（既可以是数值，也可以是字母符号）。
- 如果正电流流出正电压端，则称该元件产生正功率。如果正电流流进正电压端，则该元件吸收正功率。
- 有6种电源：独立电压源，独立电流源，电流控制电流源，电压控制电流源，电压控制电压源，电流控制电压源。
- 欧姆定律指出线性电阻两端的电压与流过的电流成正比，即 $v = Ri$。
- 电阻消耗的功率（导致热量产生）为 $p = vi = i^2R = v^2/R$。
- 在电路分析中，假定导线电阻为零，但是为具体应用选择线规时，必须查阅当地的电气和防火规则。

深入阅读

推荐一本深入讨论电阻特性和制造的好书：

Felix Zandman, Paul-René Simon, and Joseph Szwarc, *Resistor Theory and Technology*. Raleigh, N. C.: SciTech Publishing, 2002。

推荐一本通用的电气工程手册：

Donald G. Fink and H. Wayne Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 13th ed., New York: McGraw-Hill, 1993。

这本手册的 p.1-1~p.1-51，p.2-8~p.2-10，p.4-2~p.4-207 详细给出了与本章讨论相关的内容。
可以在国际标准组织的网站上参考详细的 SI：

Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*, NIST Special Publication 811, 1995 Edition, www.nist.gov。

习题

2.1 单位和尺度

1. 将下列量转换成工程表示形式：

(a) 1.2×10^{-5} s　　(b) 750 mJ

(c) 1130 Ω　　(d) 3 500 000 000 bits

(e) 0.0065 μm　　(f) 13 560 000 Hz

(g) 0.039 nA　　(h) 49 000 Ω

(i) 1.173×10^{-5} μA

2. 将下列量转换成工程表示形式：

(a) 1 000 000 W　　(b) 12.35 mm

(c) 47 000 W　　(d) 0.005 46 A

(e) 0.033 mJ (f) 5.33×10^{-6} mW
(g) 0.000 000 001 s (h) 5555 kW
(i) 32 000 000 000 pm

3. 将下列表示转换成SI单位，使用工程表示形式，保留4位有效位。
(a) 400 hp (b) 12 ft (c) 2.54 cm (d) 67 Btu (e) 285.4×10^{-15} s
4. 某15 V干电池已完全放电，如果对它完全充电需要100 mA电流充3个小时才能完成，该电池可以存储的能量为多少？假定电压与充电状态无关。
5. 一辆快速电动小汽车配有175马力的发动机：
(a) 假定电功率到机械功率的转换效率为100%，那么这台发动机运行时需要多少千瓦（kW）的功率？
(b) 假定发动机连续运转3小时，消耗的能量为多少焦耳？
(c) 假定单个铅酸电池的容量为430 kWh，对于(b)中的情况，一共需要多少个电池？
6. 一台KrF准分子激光器产生的激光脉冲在20 ns内的能量为400 mJ：
(a) 激光器的峰值瞬时功率是多少？
(b) 假定每秒只产生20个脉冲，激光器输出的平均功率是多少？
7. 一台带放大器的钛－蓝宝石激光器在75 fs时间内产生的激光脉冲能量为1 mJ：
(a) 激光器峰值瞬时功率是多少？
(b) 假定每秒只产生100个脉冲，激光器输出的平均功率是多少？
8. 某种电池提供的功率在最初5分钟内固定为6 W，随后的2分钟为零，再后的10分钟按线性从零增长到10 W，又在7分钟内按线性从10 W下降到零：
(a) 在整个24分钟内消耗的能量是多少焦耳？
(b) 这期间的平均功率是多少？用Btu/h表示。
9. 一种新型的电池可以连续8小时提供10 W的功率，其间没有电压和电流的波动。但是8小时后，功率输出在5分钟内就从10 W线性下降到零。
(a) 该电池能够储存的能量为多少？
(b) 在最后5分钟的放电周期内输出了多少能量？

2.2 电荷、电流、电压和功率

10. 某器件所积聚的总电荷是时间的函数，为$q = 18t^2 - 2t^4$（采用SI单位制）。(a) 当$t = 2$ s时积聚的总电荷为多少？(b) 在$0\text{ s} \leqslant t \leqslant 3\text{ s}$的时间间隔内积聚的最大电荷为多少？何时出现最大值？(c) 当$t = 0.8$ s时电荷积聚的速度为多大？(d) 画出$0\text{ s} \leqslant t \leqslant 3\text{ s}$范围内$q$与$t$以及$i$与$t$的曲线。
11. 图2.6(c)所示的电流$i_1(t)$在$t < 0$时为$-2 + 3e^{-5t}$，在$t > 0$时为$-2 + 3e^{3t}$。求：(a) $i_1(-0.2)$；(b) $i_1(0.2)$；(c) $i_1 = 0$的时刻；(d) 在$-0.8\text{ s} < t < 0.1\text{ s}$内沿导线从左向右传输的总电荷。
12. 图2.28所示的波形周期为10 s。(a) 一个周期内电流的平均值为多少？(b) 在$1\text{ s} < t < 12\text{ s}$间隔内传输的电荷为多少？(c) 如果$q(0) = 0$，画出曲线$q(t)$，$0\text{ s} < t < 16\text{ s}$。
13. 假设一条路径上有离散点A, B, C, D, E。一个电子从A移到B或从B移到C需要能量2 pJ，一个质子从C移到D需要3 pJ，电子从D移到E不需要能量。
(a) A和B之间的电势差（用V表示）为多少？（假设+参考点在B。）
(b) D和E之间的电势差（用V表示）为多少？（假设+参考点在E。）
(c) C和D之间的电势差（用V表示）为多少？（假设+参考点在D。）
(d) D和B之间的电势差（用V表示）为多少？（假设+参考点在D。）

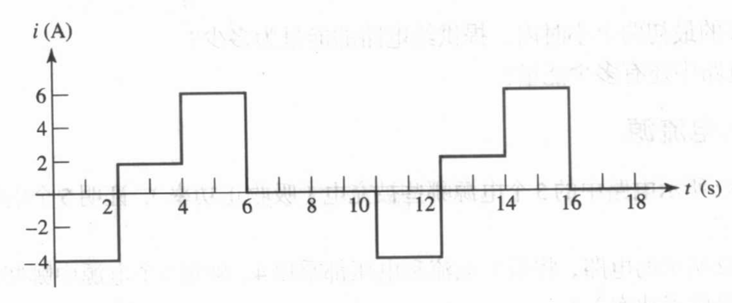


图 2.28

14. 在实验室角落里发现了一个未做标记的盒子，它有两根金属引出线，一根为橙色，另一根为紫色。一个电压表接在这两根导线之间，并且紫色线为参考正，测量得到电压为 –2.86 V。如果将电压表反过来连接，读数为多少？

15. 求图 2.29 中各个电路元件所吸收的功率。

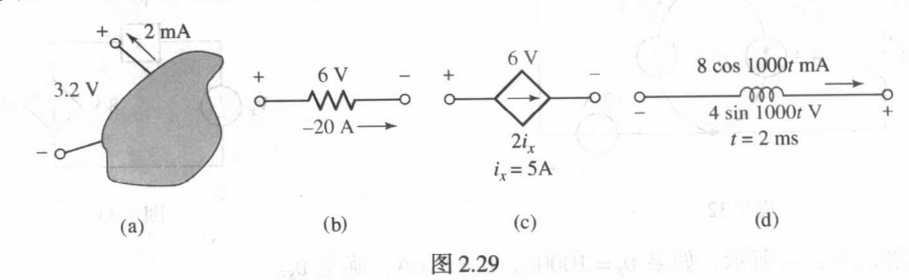


图 2.29

16. 对于图 2.30 所示的电路元件，设 $i = 3te^{-100t}$，$v = (0.006 - 0.6t)e^{-100t}$。(a)在 $t = 5$ ms 时电路元件吸收的功率是多少？(b) 在 $0 < t < \infty$ 内提供给元件的能量是多少？

17. 在图 2.30 中，设 $i = 3e^{-100t}$ A，求电路元件在 $t = 8$ ms 时吸收的功率，假定 v 等于：(a) $40i$；(b) $0.2\ di/dt$；(c) $30\int_0^t i\ dt + 20$ V。

18. 图 2.31 所示的是美国佛罗里达州夏季中午 12 时暴露在直射阳光下的硅太阳能电池的电流－电压特性曲线，该曲线是通过将不同大小的电阻连接到该电池两端然后测量电流和电压得到的。(a) 短路电流值是多少？(b) 开路电压值是多少？(c) 估计从该器件可能获得的最大功率是多少？

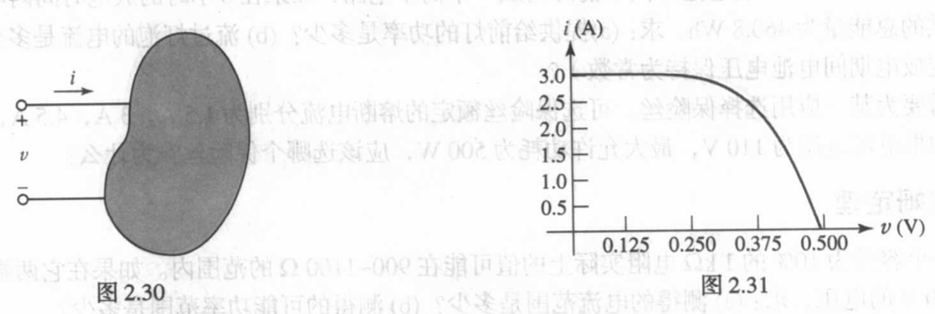


图 2.30　　图 2.31

19. 仔细监测流入某电路的电流。所有引用的电压正参考端都位于该二端电路的上端。观察得到：前两个小时有 1 mA 的电流流入上端，测得电压为 +5 V。在接下来的 30 分钟内，没有电流流入或流出。之后的两小时有 1 mA 的电流流出上端，测得电压为 +2 V。此后，又没有电流流入或流出。假定该电路最初没有储存能量，回答下列问题：

(a) 在这 3 个时间段内，分别有多少功率传递给该电路？

(b) 在观察的最初两个小时内，提供给电路的能量为多少？

(c) 现在电路中还有多少能量？

2.3 电压源和电流源

20. 确定图 2.32 所示电路中的 5 个电源哪些被充电（吸收正功率），证明 5 个电源吸收功率的代数和等于零。
21. 参考图 2.32 所示的电路，将每个电流和电压都乘以 4，确定 5 个电源中哪些是能量源（即为其他元件提供正功率）？
22. 在图 2.33 所示的简单电路中，流过每个元件的电流都相同。如果 $V_x = 1$ V，$V_R = 9$ V，计算：(a)元件 A 吸收的功率；(b) 两个电源分别提供的功率；(c)提供的总功率是否等于吸收的总功率？你认为结果合理吗？为什么？

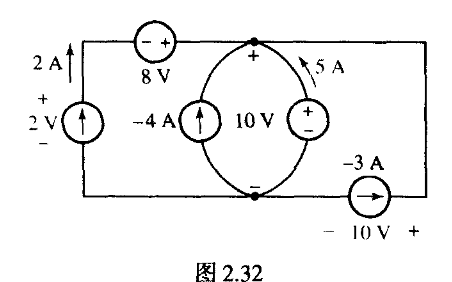


图 2.32

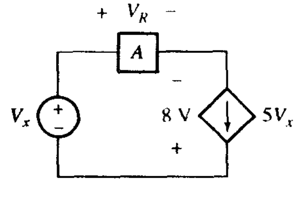


图 2.33

23. 电路如图 2.34 所示，如果 $v_2 = 1000i_2$，$i_2 = 5$ mA，确定 v_S。
24. 电路如图 2.35 所示，如果 $i_x = -1$ mA，计算电压 v_2。

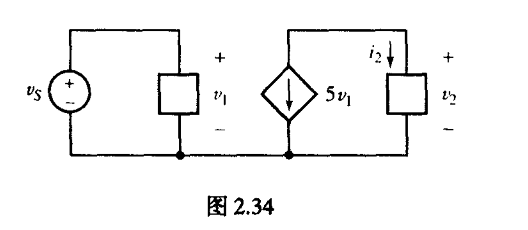


图 2.34

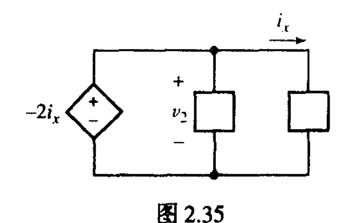


图 2.35

25. 用一个 12 V 的铅酸电池和汽车前灯构成一个简单电路，如果在 8 小时的放电时间内电池提供的总能量为 460.8 Wh，求：(a)提供给前灯的功率是多少？(b) 流过灯泡的电流是多少（假定放电期间电池电压保持为常数）？
26. 需要为某一应用选择保险丝。可选保险丝额定的熔断电流分别为 1.5 A，3 A，4.5 A，5 A。如果电源电压为 110 V，最大允许功耗为 500 W，应该选哪个保险丝？为什么？

2.4 欧姆定理

27. 一个容差为 10% 的 1 kΩ 电阻实际上的值可能在 900~1100 Ω 的范围内。如果在它两端加上 5.0 V 的电压，求：(a) 测得的电流范围是多少？(b) 测得的可能功率范围是多少？
28. 一个容差为5%的470 Ω电阻流过的电流为2 mA，那么该电阻应该具有的额定功率为多少？为什么？（注意，5% 容差意味着该电阻实际值在 446.5 Ω 到 493.5 Ω 的范围内。）
29. 设图 2.24(d)中的电阻 $R = 1200$ Ω，如果：(a) $i = 20e^{-12t}$ mA；(b) $v = 40\cos 20t$ V；(c) $vi = 8t^{1.5}$ VA，求在 $t = 0.1$ s 时 R 吸收的功率。

30. 某电压前 20 ms 的值是 +10 V，随后的 20 ms 为 −10 V，此后便以 20 ms 为间隔在这两个值之间如此往复振荡。现在将该电压加在 50 Ω 的电阻上。在任意一个 40 ms 间隔内，求：(a) 电压最大值；(b) 电压平均值；(c) 电阻上的平均电流值；(d) 吸收功率最大值；(e) 吸收功率平均值。
31. 在图 2.36 所示的电路中，流过所有 3 个元件的电流都相等。根据提供的所有功率等于吸收的所有功率这一事实，证明电阻 R_2 上的电压为

$$V_{R_2} = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

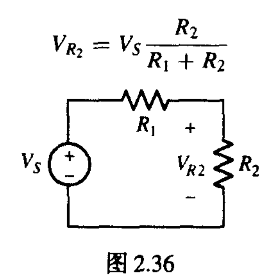


图 2.36

32. 对一个二端器件进行实验，用一个可变电源设置其两端的电压，测量流进其中一个端子的电流并得到下面的实验结果：

电压（V）	电流(A)
−1.5	−3.19
−0.3	−0.638
0.0	1.01×10^{-8}
1.2	2.55
2.5	5.32

(a) 画出电流与电压的特性曲线。

(b) 计算该器件的有效电导和电阻。

(c) 如果该器件的电阻增加 3 倍，在另一个图上画出电流对电压的曲线。

33. 对于图 2.37 所示的每个电路，求电流 I，并计算电阻吸收的功率。
34. 在电路图中常常会见到电压、电流和电阻标有各种下标。在图 2.38 所示电路中，电压 v_π 出现在电阻 r_π 两端。如果 $v_s = 0.01 \cos 1000t$ V，求 v_{out}。

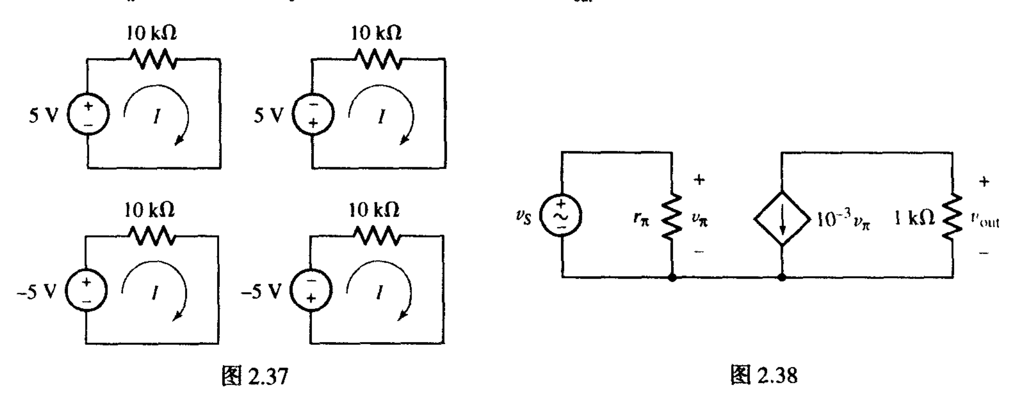


图 2.37　　　　图 2.38

35. 在图 2.38 所示的电路中，假设 $v_S = 2 \sin 5t$ V, $r_\pi = 80\ \Omega$。计算 $t = 0$ 和 $t = 314$ ms 时的 v_{out}。
36. 利用沿路边敷设的 18 AWG 实心铜线将远端传感器连接到中心计算机系统。如果已知电线电阻为 53 Ω，那么电线总长为多少（假定温度约为 20°C）？
37. 假定你搁浅在一个荒岛上，岛上空气温度为 108°F。你的发射机已不能工作，原因是一个 470 Ω 的电阻坏了。幸运的是，有一大团 28 AWG 的实心铜线被冲到了岸边。作为 470 Ω 电

阻的替代物，需要用多少英尺的电线？注意，这个岛位于热带，温度比表2.4引用的温度20°C要暖和一些[①]。可以利用下列关系式修正表 2.4 中的电阻值：

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{234.5+T_2}{234.5+T_1}$$

其中，T_1 为参考温度（这里为 20°C）；

R_1 为参考温度下的电阻值；

T_2 为新温度（摄氏度）；

R_2 为新温度下的电阻值。

38. 长为 l、均匀截面积为 A 的导体的电阻为 $R = l/(\sigma A)$，其中 σ 是电导率。假定铜的电导率 $\sigma = 5.8\times10^7$ S/m，求：(a) 50 英尺长的 #18 铜线（直径为 1.024 mm）的电阻；(b) 如果电路板上的铜箔导体厚 33 μm，宽 0.5 mm，它在 50°C 下能安全承载 3 A 电流，求 15 cm 长的该种铜箔的电阻以及 3 A 电流下铜箔上消耗的功率。
39. 表 2.3 列出了几种类型的铜线标准，电阻率约为 1.7 μΩ · cm。利用表 2.4 中 28 AWG 导线的信息求出相应的软铜线的电阻率。计算得到的结果是否与表 2.3 中的值一致？
40. (a) 列出 3 个非线性电阻的例子；(b) 设想将一个电池连接到一个电阻上。能量从电池传输到电阻，直到电池完全放电。记住能量守恒原理，最初储存在电池中的能量到哪里去了？
41. 如果利用 B33 铜制成直径为 1 mm 的圆形导线，那么当该导线流过 1.5 A 电流时，100 m 导线消耗的功率为多少？
42. 根据表 2.4 中的信息设计一个机械器件，使其相当于一个可连续变化的电阻。（提示：线圈也许会有帮助。）
43. 二极管是一种常见的二端非线性器件，它可以用下列的电流 – 电压关系进行模拟：

$$I = 10^{-9}(e^{39V}-1)$$

(a) 设 $V = -0.7$ V~0.7 V，画出该区域内的电流 – 电压特性曲线；

(b) 在 $V = 0.55$ V 时，二极管的有效电阻是多大？

(c) 电流多大时二极管的电阻为 1 Ω？

44. 修理一个便携机器上的稳压器需要一个 10 Ω 电阻，而手头仅有的材料是 10 000 英尺线圈，规格参考表 2.4 中所列信息。设计一个合适的电阻。
45. N 型单晶硅的电阻率为 $\rho = 1/qN_D\mu_n$，其中 q 为电子电荷 1.602×10^{-19} C，N_D 为每立方厘米的杂质磷原子数，μ_n 为电子迁移率（单位为 $\mathrm{cm^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$）。迁移率和杂质浓度的关系如图 2.39 所示。假定直径为 6 in.[②]的硅晶圆片厚为 250 μm，给定磷浓度为 $10^{15}\le N_D\le10^{18}$ 原子/cm³，设计一个 100 Ω 的电阻，给出确切的杂质浓度及适当的电阻几何图形。

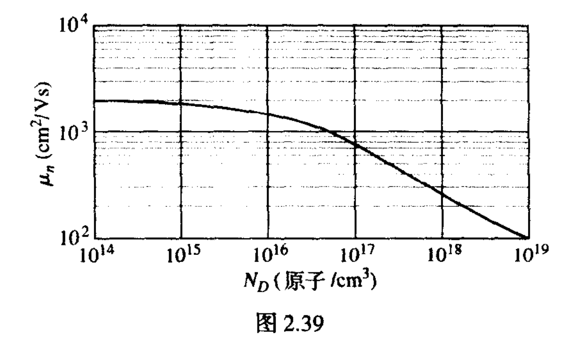


图 2.39

① D. G. Fink 和 H. W. Beaty, 电气工程标准手册，13th ed. New York: McGraw-Hill, 1993, p. 2-9。

② 1 in. = 2.5400 cm。——编者注

第3章　电压和电流定律

主要概念

- 新电路术语：节点，路径，回路，支路
- 基尔霍夫电流定律（KCL）
- 基尔霍夫电压定律（KVL）
- 基本串联和并联电路的分析
- 串联电源和并联电源的组合
- 串联和并联电阻组合的化简
- 分压和分流原理
- 接地

引言

第2章已经介绍了电阻以及几种电源。在定义了一些电路术语以后，我们开始分析由这些器件组成的简单电路。我们将要介绍的这些分析技术基于两个相对简单的定律：基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。基尔霍夫电流定律基于电荷守恒原理，而基尔霍夫电压定律基于能量守恒原理，它们都是基本的物理定律。一旦熟悉了这些基本分析，就可以进一步使用KCL和KVL来推导电阻、电压源或电流源的串并联连接，以及得出分压和分流的重要概念。在接下来的几章中，还会介绍其他的分析方法，以便更有效地分析复杂网络。

3.1　节点、路径、回路和支路

现在关注由两个或两个以上电路元件组成的简单网络中的电流-电压关系。这些元件利用电阻为零的电线（有时也称为导线）连接在一起。因为该网络由简单元件和连接导线组成，因此被称为集总参数网络。当网络包含有近乎无穷的、难以觉察的小元件时，则称为分布参数网络，对它的分析将面临更多的困难。本书主要讨论集总参数网络。

说明：在实际电路中，导线通常具有一定的电阻。但该电阻与电路中其他电阻相比要小得多，因此忽略导线电阻并不会产生明显的误差。从现在开始，在讨论的理想电路中，导线电阻均假设为零。

两个或两个以上元件具有的公共连接点称为节点。例如，图3.1(a)所示的电路包含3个节点。有时网络的画法可能会让粗心的学生认为节点数多于实际的节点数。比如图3.1(a)中的节点1，当表示成如图3.1(b)所示的由一个导体（零电阻）连接的两个分离连接点时，就可能得到错误的节点数。原因是将一个普通的节点扩展成了零电阻的连接导线。因此，必须把连线本身或者与元件相连的连线部分作为该节点的一部分，同时还要注意每个元件各端均有一个节点。

假定从网络中的某个节点开始移动，经过一个元件到达另一端的节点，再从该节点经过另一个不同的元件到达下一个节点，继续这样的移动，直到经过所期望数量的元件为止。如果不存在经过

次数多于一次的节点，则所经过的这组元件和节点就构成了路径。如果起点和终点为同一节点，则该路径定义为闭合路径或回路。

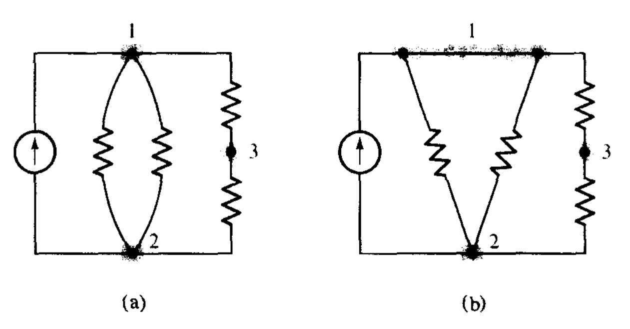


图 3.1 (a) 包含 3 个节点和 5 条支路的电路；(b) 节点 1 被画成看似是两个节点，但实际仍是一个节点

比如在图 3.1(a)中，如果从节点 2 经过电流源到达节点 1，再经过右上端的电阻到达节点 3，则构成了一条路径。由于没有重新回到节点 2，所以该路径不构成回路。而如果从节点 2 经过电流源到达节点 1，再从中间左边的电阻向下到达节点 2，然后向上经过中间的电阻回到节点 1。这时并不构成一条路径，因为存在经过了两次的节点（确切地说是存在两个这样的节点）。因为回路首先必须是路径，因此它当然也不构成回路。

另一个比较便利的术语是支路，定义为网络中的一条路径，这条路径只包含一个元件以及该元件两端的节点。因此，路径是一系列支路的集合。图 3.1(a)和图 3.1(b)所示电路包含 5 条支路。

3.2 基尔霍夫电流定律

现在开始讨论以出生于欧姆时代的德国大学教授Gustav Robert Kirchhoff命名的两个定律中的一个。该定律称为基尔霍夫电流定律（缩写为 KCL），简单表述为：

流入任何节点的电流代数和等于零。

该定律给出了节点上不能积聚电荷的数学描述。节点不是电路元件，显然不能储存、消灭或产生电荷，因此，电流之和必定等于零。通过水力装置类比可帮助我们理解：如果3个水管接成Y形，定义进入每个水管的水流为“电流”。假定水流一直是流动的，显然不可能有3个同时为正的水流，否则水管将会破裂。这是因为所定义的方向与实际水流方向无关，因此，所定义的“电流”必定有一个或者两个为负值。

考虑图 3.2 所示的节点，进入该节点的 4 个电流的代数和必定为零：

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$

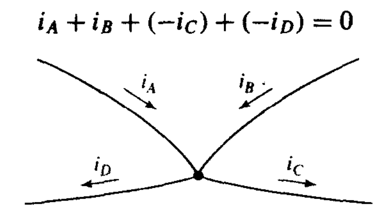


图 3.2 解释应用基尔霍夫电流定律的节点例子

显然该定律可以等效地应用于离开该节点的电流的代数和：

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

有时希望写成参考方向指向节点的电流之和与相反方向的电流之和相等的形式：

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

该式表明，流入节点的电流之和必须等于流出节点的电流之和。

基尔霍夫电流定律的紧凑表达式为

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \qquad [1]$$

它是下式的简写：

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N = 0 \qquad [2]$$

当使用式[1]或式[2]时，应理解为所有N个电流的参考方向或者全部指向所讨论的节点或者全部从节点指出。

例题 3.1　电路如图 3.3(a)所示，已知电压源提供的电流为 3 A，计算流过电阻R_3的电流。

解：▶ 明确题目的要求

流过电阻R_3的电流在图中标为i。

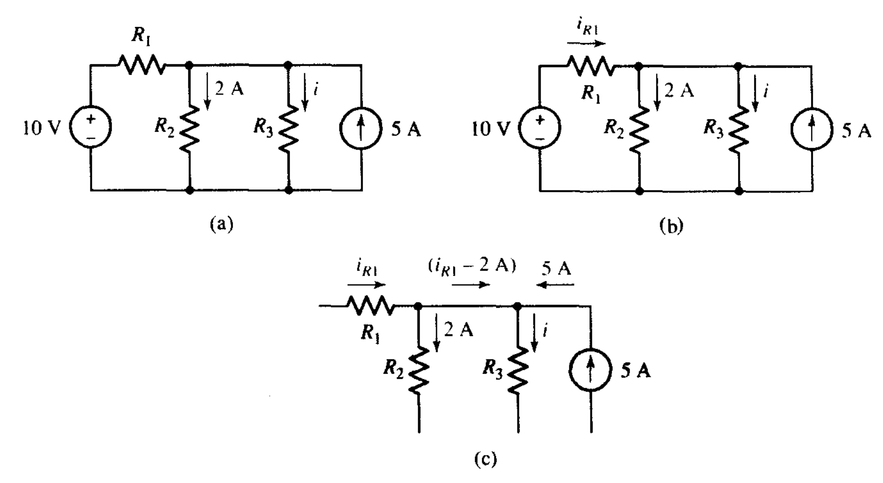


图 3.3　(a) 求流过R_3电流的简单电路；(b) 标注流过R_1的电流，以便写出KCL方程；(c) 为清晰起见，重画流进电阻R_3上端节点的电流

▶ 收集已知信息

所求电流从R_3上端的节点流入，该节点连接其他 3 条支路。从每条支路流入该节点的电流汇合为电流i。

▶ 设计方案

如果标注流过R_1的电流［见图 3.3(b)］，则可以写出R_2和R_3上端节点的 KCL 方程。

▶ 建立一组合适的方程

对流入该节点的电流求和：

$$i_{R_1} - 2 - i + 5 = 0$$

为清晰起见，图 3.3(c)所示的局部放大的电路给出了流入该节点的电流。

▶ 确定是否还需要其他信息

可以看出只有一个方程，但却有两个未知数，因此需要再得到一个方程。本题中，已知 10 V 电源提供 3 A 的电流，从 KCL 定律可知，它就是电流 i_{R1}。

▶ 尝试求解

代入 i_{R1}，可得 $i = 3 - 2 + 5 = 6$ A。

▶ 验证结果是否合理或是否是预计的

验证求解过程总是值得的，而且还可以试着估算解的范围是否合理。在本例中有两个电源，分别提供5 A和3 A的电流，但没有其他独立源或受控源，因此不可能得到任何大于8 A的电流。

练习

3.1 计算图 3.4 所示电路的支路数和节点数。如果 $i_x = 3$ A，18 V 的电源提供 8 A 的电流，求 R_A 的值。（提示：应用欧姆定律和 KCL 定律。）

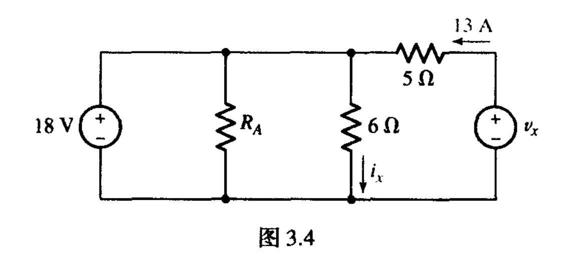


图 3.4

答案：5 条支路，3 个节点，1 Ω。

3.3 基尔霍夫电压定律

电流与电路元件中的电荷流动有关，而电压是元件两端电势能量差的度量。在电路理论中，任何电压都具有唯一的值。因此，在电路中，将单位电荷从 *A* 点移到 *B* 点所需的能量与从 *A* 到 *B* 所选的路径无关（路径通常不止一条）。这一点可以表述为基尔霍夫电压定律（简写为 KVL），即：

沿任何闭合回路的电压代数和等于零。

在图 3.5 中，如果把 1 C 的电荷从 *A* 点经过元件 1 移到 *B* 点，根据图中标出的参考极性可知，需要做 v_1 J 的功①。同样，如果从 *A* 点经节点 *C* 移到 *B* 点，需要（$v_2 - v_3$）J 的能量。因为所做的功与电路中的路径无关，因此两者必然相等。任何路径都必然导致相同的电压值，因此，

$$v_1 = v_2 - v_3 \tag{3}$$

该式表明，如果沿着一个闭合路径进行移动，那么所经过的各元件的电压代数和必然为零，因此可写出

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = 0$$

或者简写为

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = 0 \tag{4}$$

① 选取电荷为 1 C 是为了数值计算上的方便，这时所做的功为$(1\ \text{C})\cdot(v_1\ \text{J/C}) = v_1$ J。

可以不同的方式应用KVL。与其他方式相比，下面这种方式在列方程时不容易犯错误。在头脑中按顺时针方向沿闭合路径走一遍，如果首先遇到的是元件标有“+”号的端子，就直接写下它的电压；如果首先遇到的是标有“–”号的端子，则写下该电压的负值。根据这种方法，对于图3.5，有

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

结果与前面的式[3]一致。

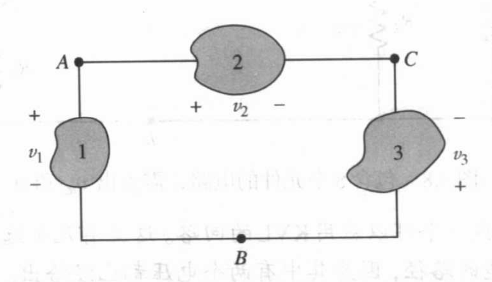


图 3.5　A点和B点之间的电势差与所选路径无关

例题 3.2　电路如图3.6所示，求 v_x 和 i_x。

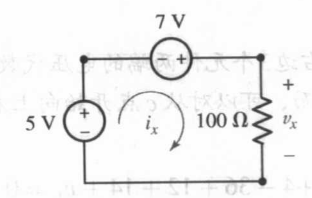


图 3.6　包含两个电压源和一个电阻的简单电路

解： 已知电路中其中两个元件两端的电压，因此，可以立即应用KVL求得 v_x。

从5 V电源的下端节点开始沿顺时针方向对该回路应用KVL，可得

$$-5 - 7 + v_x = 0$$

因此 $v_x = 12$ V。

对该电路应用KCL，一定得到流过3个元件的电流相同，都为 i_x。然而现在已经知道了100 Ω电阻两端的电压。

利用欧姆定律可得

$$i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100}\ \text{A} = 120\ \text{mA}$$

练习

3.2　在图3.7所示的电路中，求 i_x 和 v_x。

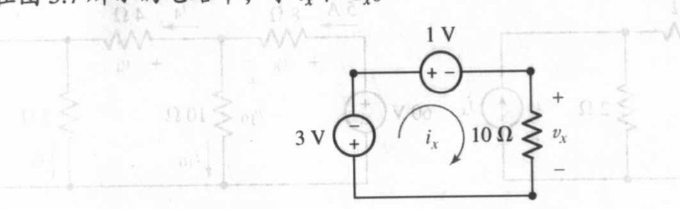


图 3.7

答案： $v_x = -4$ V；$i_x = -400$ mA。

例题3.3 图3.8所示电路有8个电路元件，每个元件都给出了电压，并且表明了正负号。求v_{R2}（R_2两端的电压）和v_x。

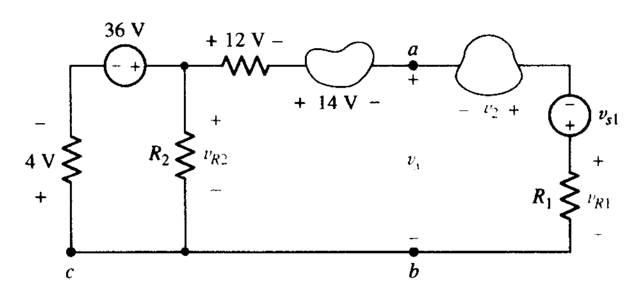


图3.8 包含8个元件的电路，需求出v_{R2}和v_x

解：求v_{R2}最好的方法是寻找一个可以应用KVL的回路。这里有几个选择，但仔细观察电路可知最左边的回路是一个合适的路径，因为其中有两个电压都已经给出。因此，可以对这个回路写出KVL方程来求得v_{R2}，我们从c点开始：

$$4-36+v_{R2}=0$$

得到$v_{R2}=32$ V。

要求v_x，可以将该电压看成是右边3个元件两端的电压代数和。但是，因为不知道这些量的值，因此不可能得到数值结果。然而，可以对从c点开始向上右转到a，经过v_x到b，再经过导线到c的回路应用KVL：

$$+4-36+12+14+v_x=0$$

可得

$$v_x=6\text{ V}$$

另一种方法是：已知v_{R2}，通过R_2可以快速得到

$$-32+12+14+v_x=0$$

同样可以得到$v_x=6$ V。

说明：b点和c点以及它们之间的导线属于同一个节点。

就像刚才看到的那样，正确分析一个电路的关键是规范地标出图中所有的电压和电流。通过这种方式，仔细写出KCL和KVL方程就可以得到正确的关系式，必要的时候，比如未知量多于最初得到的方程数时再应用欧姆定律。可以用一个更详细的例子来解释这一点。

例题3.4 求图3.9(a)所示电路中的v_x。

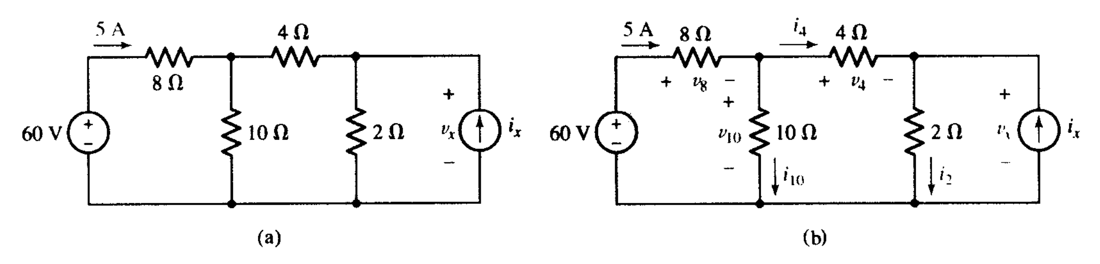


图3.9 (a)需要利用KVL确定v_x的电路；(b)标注了电压和电流的电路

解： 首先对电路中剩余元件的电压和电流进行标注［见图3.9(b)］。注意，2 Ω 电阻和电源 i_x 两端的电压都为 v_x。

如果可以得到流过 2 Ω 电阻的电流，利用欧姆定律可以得到 v_x。写出正确的 KCL 方程，可以得到

$$i_2 = i_4 + i_x$$

遗憾的是，我们不知道这 3 个量中任何一个的数值，因此求解过程（暂时）受阻。

因为已经知道从60 V电源流出的电流，所以可以先从这半边的电路考虑。不通过 i_2 来求解 v_x，而是可以直接利用 KVL 来求解 v_x。写出如下 KVL 方程：

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

和

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \qquad [5]$$

这是一个进展：已经得到包含4个未知数的两个方程，比原来任何变量都未知的一个方程有了一点进步。事实上，因为已知流过 8 Ω 电阻的电流为 5 A，利用欧姆定律可得 $v_8 = 40$ V。因此，$v_{10} = 0 + 60 - 40 = 20$ V，所以式[5]可化简为

$$v_x = 20 - v_4$$

如果可以确定 v_4，问题就可以解决了。

求 v_4 电压最好的方法是利用欧姆定律，因此需要求出 i_4。从 KCL 方程可得

$$i_4 = 5 - i_{10} = 5 - \frac{v_{10}}{10} = 5 - \frac{20}{10} = 3$$

因此，$v_4 = (4)(3) = 12$ V，并得到 $v_x = 20 - 12 = 8$ V。

练习

3.3　求图 3.10 所示电路中的 v_x。

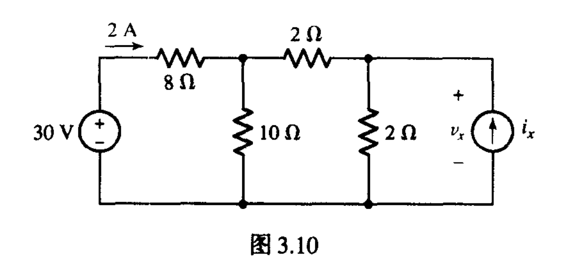


图 3.10

答案： $v_x = 12.8$ V。

3.4　单回路电路

已经看到可以对一个包含几个回路和多个不同元件的电路连续使用 KCL 和 KVL 以及欧姆定律。在进一步讨论之前，首先介绍串联电路的概念（下一节介绍并联电路），因为它们是以后讲到的所有网络的基础。

在一个电路中，拥有同一个电流的所有元件被称为串联连接。比如，图3.9所示的电路中，60 V 的电源与 8 Ω 的电阻串联连接，它们拥有同一个 5 A 电流。但是，8 Ω 电阻与 4 Ω 电阻非串联连接，

它们具有不同的电流。注意，元件可能具有相同的电流，并且是非串联连接。在相邻房间的两个100 W灯泡可能具有相等的电流，但它们肯定不拥有同一个电流，所以不是串联连接。

图3.11(a)所示的是包含两个电池和两个电阻的简单电路。假定每个端子、连接导线以及焊点都是零电阻，它们组成图3.11(b)所示电路图中的一个独立节点。两个电池视为理想电压源，内阻足够小，可以忽略。两个电阻假定是理想（线性）电阻。

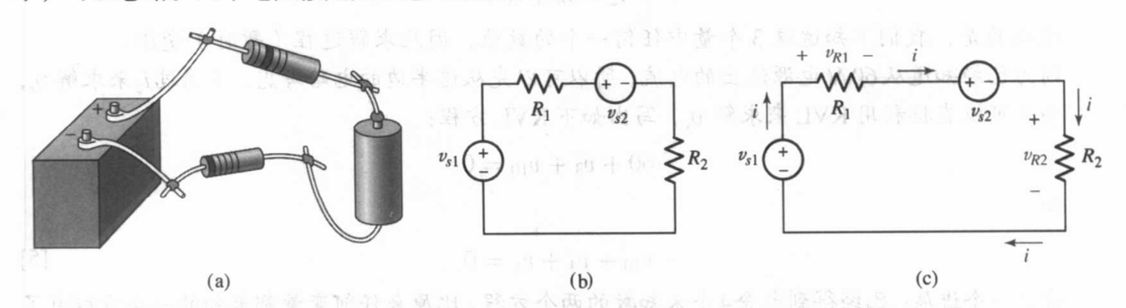


图3.11 (a)包含4个元件的单回路电路；(b)给定电压源和电阻值的电路模型；(c)加上电流和电压参考符号的电路

求流过每个元件的电流、每个元件两端的电压以及每个元件吸收的功率。分析的第一步是假定未知电流的参考方向。假定电流 i 的参考方向为顺时针方向，从左边电压源上端流出，如图3.11(c)所示。应用基尔霍夫电流定律，可知流过电路中其他元件的电流也必定相同。为了强调这一点，在电路图中还标出了其他几个电流标记。

分析的第二步是选择每个电阻的电压参考极性。无源符号规则要求所定义的电阻电流和电压变量要使得电流流入电压参考极性的正端。因为已经选择了电流方向，因此 v_{R1} 和 v_{R2} 如图3.11(c)中所定义。

第三步对唯一的闭合回路应用基尔霍夫电压定律。假设沿电路顺时针方向移动，从左下角开始，直接写出碰到的正极性的电压和负极性电压的负数：

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0 \qquad [6]$$

对电阻应用欧姆定律可得

$$v_{R1} = R_1 i \quad \text{和} \quad v_{R2} = R_2 i$$

代入式[6]可得

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$

因为只有 i 未知，可得

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

现在利用 $v = Ri$，$p = vi$ 或 $p = i^2 R$ 可求得每个元件的电压和功率。

练习

3.4 在图3.11(b)所示电路中，已知 $v_{s1} = 120\text{ V}$，$v_{s2} = 30\text{ V}$，$R_1 = 30\ \Omega$，$R_2 = 15\ \Omega$。计算每个元件所吸收的功率。

答案：$p_{120\text{ V}} = -240\text{ W}$；$p_{30\text{ V}} = 60\text{ W}$；$p_{30\Omega} = 120\text{ W}$；$p_{15\Omega} = 60\text{ W}$。

例题3.5　计算图3.12(a)所示电路中每个元件所吸收的功率。

解： 首先为电流i和电压v_{30}指定如图3.12(b)所示的参考方向和参考极性。不需要为15 Ω的电阻指定电压，因为已经知道受控源的控制电压v_A（但是必须注意v_A的参考符号与根据无源符号规则定义的电压相反）。

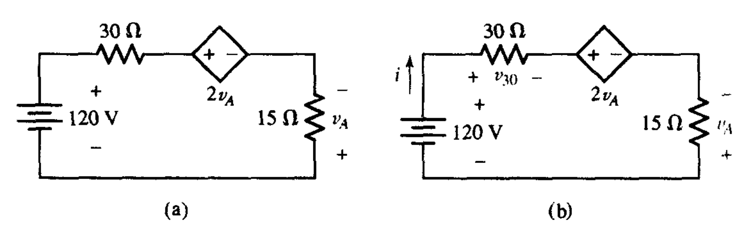


图3.12　(a)包含受控源的单回路电路；(b)指定电流i和电压v_{30}

该电路包含一个受控电压源，在未确定v_A之前该值未知。但是可以使用$2v_A$值（就如该值已知）。因此对该回路建立KVL方程如下：

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0 \qquad [7]$$

利用欧姆定律，引入已知电阻值：

$$v_{30} = 30i \quad 和 \quad v_A = -15i$$

注意，必须有一个负号，因为i流入v_A的负端。

将其代入式[7]可得

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

因此可求得

$$i = 8\ \text{A}$$

计算每个元件吸收的功率如下：

$$\begin{aligned}
p_{120\text{V}} &= (120)(-8) = -960\ \text{W} \\
p_{30\Omega} &= (8)^2(30) \quad = 1920\ \text{W} \\
p_{\text{dep}} &= (2v_A)(8) \quad = 2[(-15)(8)](8) \\
&\qquad\qquad\quad = -1920\ \text{W} \\
p_{15\Omega} &= (8)^2(15) \quad = 960\ \text{W}
\end{aligned}$$

练习

3.5　在图3.13所示的电路中，求每个元件吸收的功率。

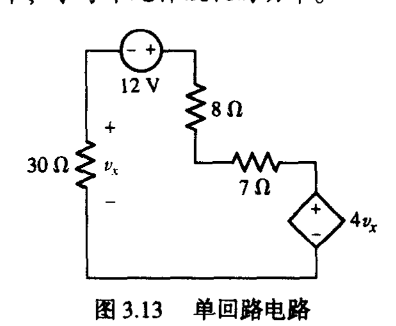


图3.13　单回路电路

答案： 从左开始顺时针求得：0.768 W，1.92 W，0.2048 W，0.1792 W，-3.072 W。

在前面的例题和练习中，要求计算电路中每个元件吸收的功率。然而电路中所有的吸收功率量不可能都为正，因为必须有地方产生能量。根据能量守恒原理，可以知道电路中每个元件吸收功率之和应该等于零。换句话说，至少有一个量为负（忽略电路不能工作的情况）。换种表达方式：各元件提供的功率之和应该等于零。更实际地说，吸收功率之和等于提供的功率之和。

我们用例题3.5的图3.12所示电路来验证这一点，它包含两个电源（一个受控源，一个独立源）和两个电阻。对每个元件吸收的功率进行相加，可得

$$\sum_{\text{all elements}} p_{\text{absorbed}} = -960 + 1920 - 1920 + 960 = 0$$

实际上（和吸收功率相关的符号能说明）120 V 的电源提供 +960 W 的功率，受控源提供 +1920 W 的功率。因此，电源提供的功率之和为 960 W + 1920 W = 2880 W。电阻应该吸收正的功率，在本例题中功率之和为 1920 W + 960 W = 2880 W。因此，考虑电路的每个元件：

$$\sum p_{\text{absorbed}} = \sum p_{\text{supplied}}$$

与预期的结果相同。

再来看练习3.5，读者也可以验证答案，可以看出吸收功率之和为0.768 + 1.92 + 0.2048 + 0.1792 - 3.072 = 0。一个很有趣的现象是：12 V 独立电压源吸收 +1.92 W 功率，这意味着该电源是消耗功率而不是提供功率。相反，该电路中所有的功率都由受控源提供，这可能吗？我们总是希望电源提供正的功率，但是由于我们在电路中采用了理想电源，实际上就有可能存在流入任何电源的净功率。如果该电路换个方式，那么同一个电源就可能对外提供功率，只是必须在电路分析完成后才知道结果。

3.5 单节点对电路

伴随3.4节讨论的单回路电路的是单节点对电路，该电路中的所有元件都连接在相同的一对节点之间。图3.14(a)所示电路即为单节点对电路。已知两个电流源和电阻值。首先假定任何元件两端的电压，任意指定参考极性，然后根据KVL可知每条支路两端的电压与其他支路两端的电压相同。电路中两端具有共同电压的元件称为并联连接。

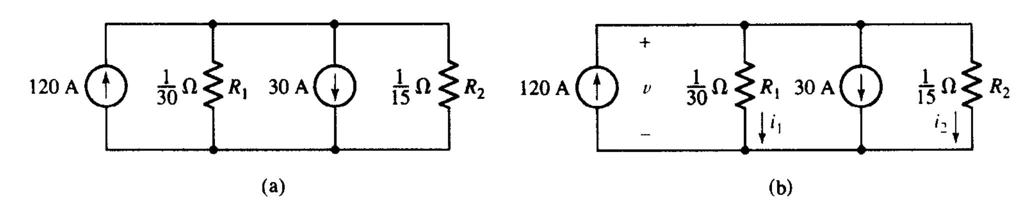


图 3.14 (a) 单节点对电路；(b) 指定一个电压和两个电流

例题 3.6 电路如图 3.14(a)所示，求每个元件的电压、电流和功率。

解： 首先定义一个电压 v，任意选择极性，如图 3.14(b)所示。根据无源符号规则，选择两个电阻上流过的电流，如图 3.14(b)所示。

只要确定电流 i_1 或 i_2 就可以得到 v 的值。因此，下一步就是对电路的两个节点应用 KCL 定律，流出上面节点的电流代数和等于零：

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

利用欧姆定律，用电压 v 表示两个电流：

$$i_1 = 30v \quad 和 \quad i_2 = 15v$$

可以得到

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

求解该方程可得到 v 的结果为

$$v = 2\text{ V}$$

然后利用欧姆定律得出

$$i_1 = 60\text{ A} \quad 和 \quad i_2 = 30\text{ A}$$

接下来可以计算每个元件吸收的功率，两个电阻吸收的功率为

$$p_{R1} = 30(2)^2 = 120\text{ W} \quad 和 \quad p_{R2} = 15(2)^2 = 60\text{ W}$$

两个电源吸收的功率为

$$p_{120\text{A}} = 120(-2) = -240\text{ W} \quad 和 \quad p_{30\text{A}} = 30(2) = 60\text{ W}$$

因为 120 A 的电源吸收负 240 W 的功率，它实际上为电路中其他元件提供电流。同样我们可以发现 30 A 的电源实际上是吸收功率而不是提供功率。

练习

3.6　电路如图 3.15 所示，求 v。

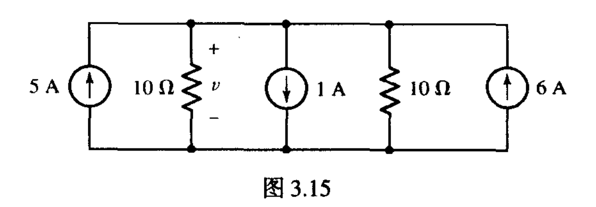


图 3.15

答案：50 V。

例题 3.7　求图 3.16 所示电路中独立电流源提供的功率以及 v 的值。

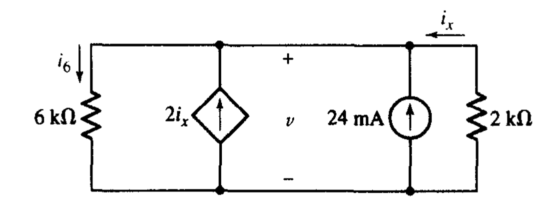


图 3.16　包含一个受控源的单节点对电路，其中指定了电压 v 和电流 i_6

解：根据 KCL，离开上面节点的电流之和必须为零，因此，

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

同样，在电路分析未完成之前，即使受控源($2i_x$)的实际值未知，也一样可以像其他任何电流源那样看待。

对每个电阻应用欧姆定律：

$$i_6 = \frac{v}{6000} \quad 和 \quad i_x = \frac{-v}{2000}$$

因此，

$$\frac{v}{6000}-2\left(\frac{-v}{2000}\right)-0.024-\left(\frac{-v}{2000}\right)=0$$

可得：$v=(600)(0.024)=14.4$ V。

现在可以很容易地得到该电路的其他信息，通常只需一步即可。比如，独立电流源提供的功率为

$$p_{24}=14.4(0.024)=0.3456\ \text{W}(345.6\ \text{mW})$$

练习

3.7 对于图 3.17 所示的单节点对电路，求 i_A，i_B 和 i_C。

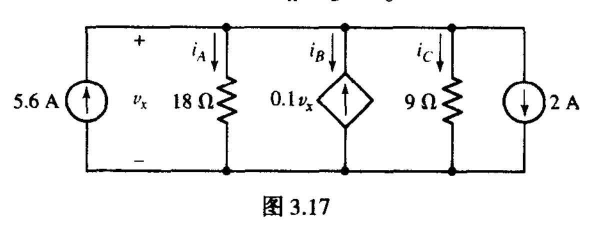


图 3.17

答案：3 A；−5.4 A；6 A。

例题 3.8 电路如图 3.18(a)所示，求 i_1, i_2, i_3 和 i_4。

解：对所示电路的分析有一点儿难度，因此首先要对节点进行 A, B, C 和 D 标注，如图 3.18(b)所示，最后再重画得到图 3.18(c)。定义流过 10 Ω 电阻的电流为 i_{10}，而且期望应用于 KCL 中。

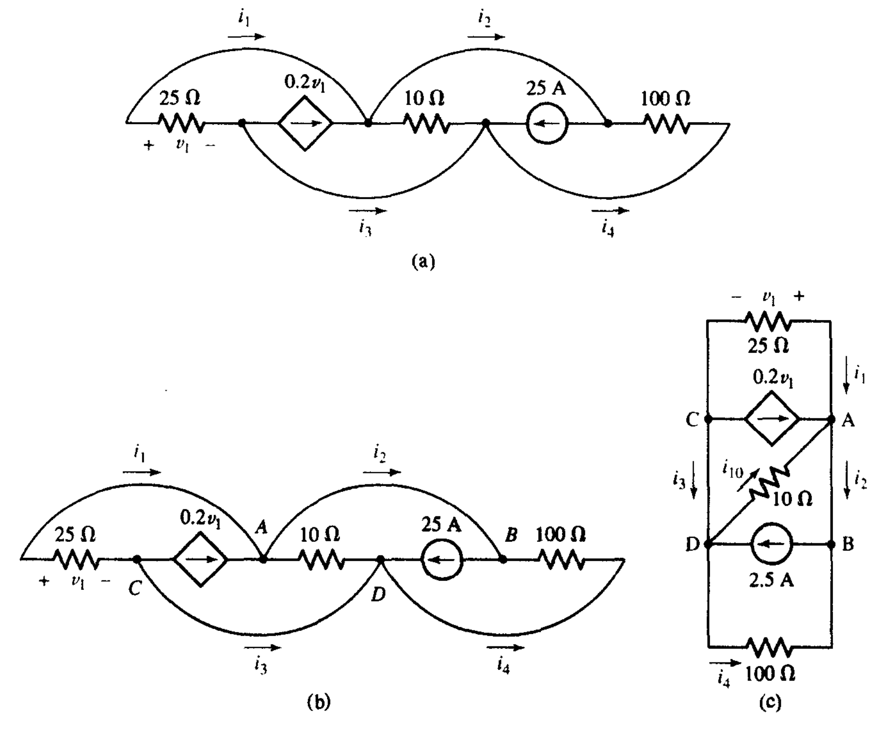


图 3.18 (a) 单节点对电路；(b) 为了便于重画电路，对节点进行标注；(c) 重画后的电路

从电路图不能够立即得到所要求的电流，因此通过欧姆定律来求解。每个电阻两端都具有相同的电压（v_1），我们对流入最右边节点的电流进行相加，得到

$$-\frac{v_1}{100}-2.5-\frac{v_1}{10}+0.2\,v_1-\frac{v_1}{25}=0$$

求解可得 $v_1 = 250/5 = 50$ V。

观察电路的底部，可以看到

$$i_4=\frac{-v_1}{100}=-\frac{50}{100}=-0.5\text{ A}$$

同样可以确定 $i_1 = -2$ A 以及 $i_{10} = -5$ A。分别对右边节点和左边节点应用KCL，可求得剩下的两个电流 i_2 和 i_3：

$$i_2=i_1+0.2v_1+i_{10}=-2+10-5=3\text{ A}$$

和

$$i_3=i_{10}-2.5+i_4=-5-2.5-0.5=-8\text{ A}$$

3.6 电源的串联和并联

在分析串并联电路时，通过将电源合并可以减少方程的个数。但是需要注意的是：必须保证电路中所有未合并部分的电流、电压和功率关系不变。比如，几个串联的电压源可以用一个等价的电压源代替，其电压是各独立电压源的代数和［见图 3.19(a)］。同样，对于并联的电流源，也可以通过对各独立的电流求代数和将它们合并，并且相互之间的次序可以根据需要重新排列［见图 3.19(b)］。

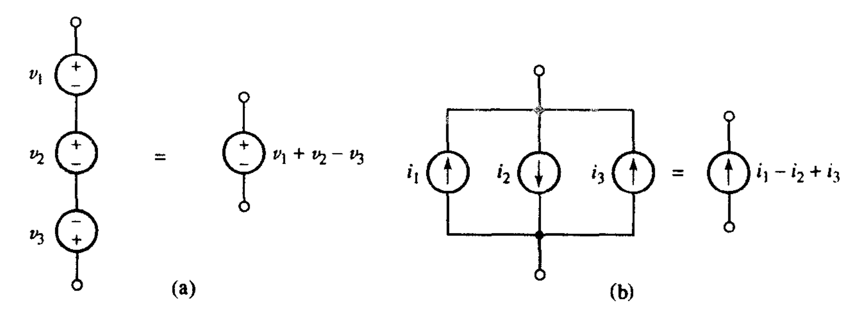


图 3.19　(a)串联连接的电压源可以被单个电源取代；(b)并联连接的电流源可以被单个电源取代

例题 3.9　电路如图 3.20(a)所示，首先将 4 个电源合并成一个电压源，然后求流过 470 Ω 电阻上的电流。

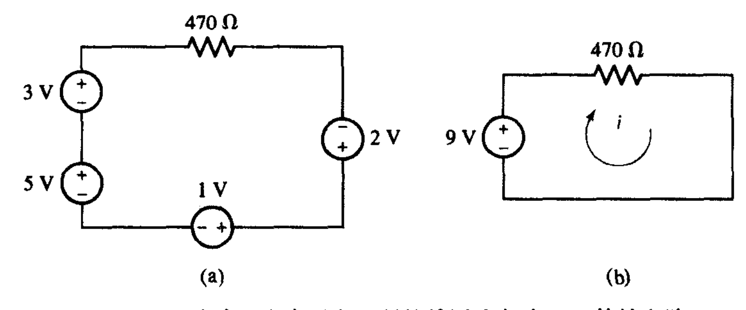


图 3.20　(a) 含有 4 个串联电压源的单回路电路；(b) 等效电路

解： 4 个电压源串联连接。用一个上端为“+”的电压源来替换它们，从 3 V 电源的“+”参考端开始写出：

$$+3+5-1+2=9\text{ V}$$

等效电路如图 3.20(b)所示，利用欧姆定律可求得 i 为

$$i=\frac{9}{470}=19.15\text{ mA}$$

一般来说，对于受控电压源或受控电流源进行合并本身并不错，但并不能带来多少好处。

练习

3.8 对图 3.21 所示电路的 3 个电流源进行合并并求 v。

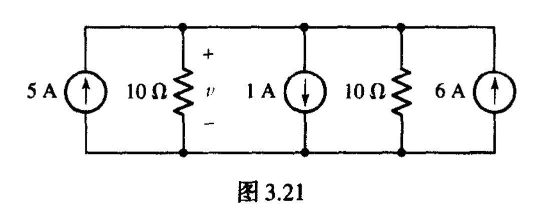


图 3.21

答案：50 V。

为了对电源的串并联进行总结，我们应该考虑两个电压源的并联以及两个电流源的串联。例如，5 V 电源与 10 V 电源并联后等效为多少？根据电压源的定义，电压源两端的电压不能改变。而由基尔霍夫电压定律可知，5 必须等于 10，这显然是不可能的。因此，理想电压源只有当端电压在任何时候都相等时才能够并联。同样，两个电流源只有在任何时候都具有相同的电流（包括符号）时才能串联。

例题 3.10 判断图 3.22 中哪个电路是有效的。

解：图 3.22(a)所示电路包含两个并联的电压源。每个电源值不同，因此该电路违背了 KVL。例如，如果 5 V 电源两端并联上一个电阻，那么该电阻同时也与 10 V 电源并联，因此电阻两端的实际电压是歧义的，显然电路不能构建成这样的结构。如果我们尝试着在现实生活中搭建这样的电路，可以发现不可能有理想电压源——所有实际的电源都有内阻。内阻的存在使得两个实际的电源之间可以有不同的电压。据此，图 3.22(b)是有效的电路。

图 3.22(c)所示的电路违背了 KCL：流过电阻 R 的电流不明确。

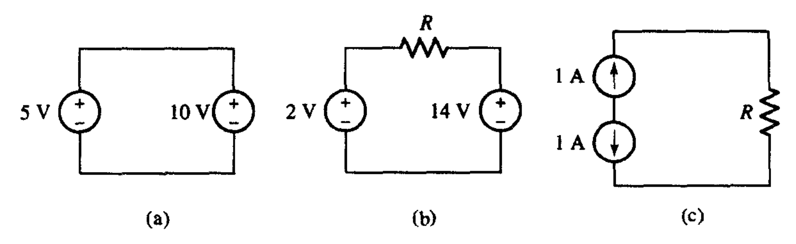


图 3.22 (a)~(c) 包含多个电源的电路，有些电路违背了基尔霍夫定律

练习

3.9 判断图 3.23 所示电路是否违背了基尔霍夫定律。

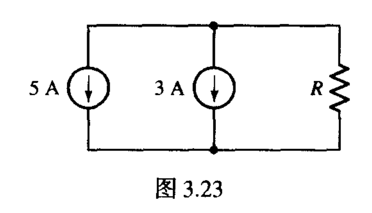


图 3.23

答案：否。但是如果没有电阻则违背基尔霍夫定律。

3.7　电阻的串联和并联

通常可以用一个简单的等效电阻来替换相对复杂的电阻组合。在不关心电阻组合中每个电阻的电流、电压或者功率时，这种方法特别有用。但是，必须保证电路中剩余部分的电流、电压和功率的关系不变。

考虑图 3.24(a)所示的 N 个电阻的串联组合。为了简化电路，希望用单个电阻 R_{eq} 来代替这 N 个电阻，使得电路的剩余部分（在这里只是电压源）不会感觉到这种变化，即电流、电压和功率关系必须在替换前后保持不变。

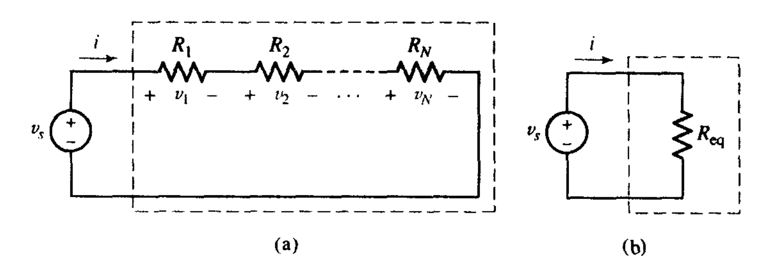


图 3.24　(a) N 个电阻的串联组合；(b) 电气上的等效电路

首先，应用 KVL 可得

$$v_s = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

然后应用欧姆定律可得

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \cdots + R_N i = (R_1 + R_2 + \cdots + R_N)i$$

现在将这个结果与图 3.24(b)所示等效电路的方程进行比较：

$$v_s = R_{eq} i$$

因此，N 个串联电阻的等效电阻值为

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad [8]$$

即可以用一个二端元件 R_{eq} 替换由 N 个串联电阻组成的二端网络，并且保持 v-i 关系不变。

这里需要再次强调，人们有时会对合并前某个元件的电流、电压或者功率关系感兴趣。比如，受控电压源的电压可能依赖于电阻 R_3 两端的电压，一旦 R_3 和其他几个电阻一起合并成了一个等效电阻，该电阻就不再存在了，因此不能确定其两端的电压，除非把 R_3 从组合中移出来。在这种情况下，最好不把 R_3 作为组合的一部分。

另外，串联电路的 KVL 方程表明元件位置的顺序变化不会对结果产生影响。

例题 3.11 利用电阻和电源的组合，求图 3.25(a)所示电路中的电流 i 和 80 V 电源提供的功率。

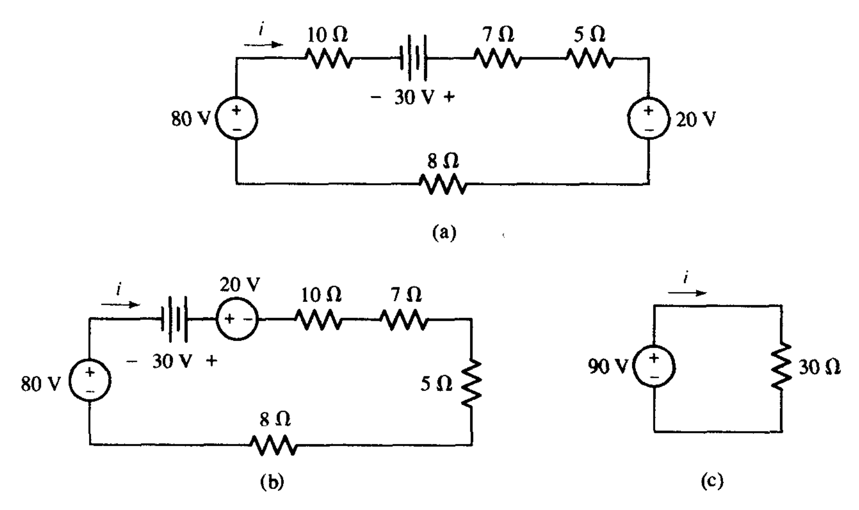


图 3.25 (a) 包含几个电源和电阻的串联电路；(b) 为了清楚起见，重新安排元件位置；(c) 更简单的等效图

解： 首先交换电路中元件位置，必须保持电源的正确方向，如图 3.25(b)所示。下一步是将 3 个电压源合并成一个 90 V 的等效电源，4 个电阻合并成一个 30 Ω 的等效电阻，如图 3.25(c)所示。因此不必写出

$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

而只要写出

$$-90 + 30i = 0$$

就可以得到

$$i = 3 \text{ A}$$

为了计算所给电路中 80 V 电源提供的功率，必须回到图 3.25(a)所示的电路，因为电流为 3 A，因此功率为 80 V × 3 A = 240 W。

有趣的是在等效电路中不包含任何初始元件。

练习

3.10 求图 3.26 所示电路中的电流 i。

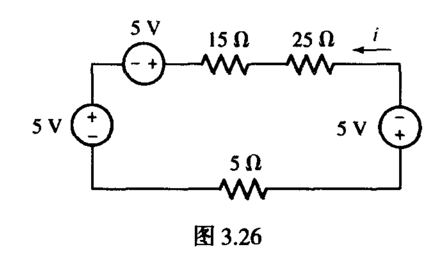


图 3.26

答案： −333 mA。

类似的简化过程也可以应用到并联电路中。考虑一个包含 N 个并联电阻的电路，如图 3.27(a)所示，可以得到 KCL 方程：

$$i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

或者

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \cdots + \frac{v}{R_N} = \frac{v}{R_{eq}}$$

因此，

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \qquad [9]$$

该式可以写成

$$R_{eq}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \cdots + R_N^{-1}$$

或者用电导表示为

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

简化（等效）电路如图 3.27(b)所示。

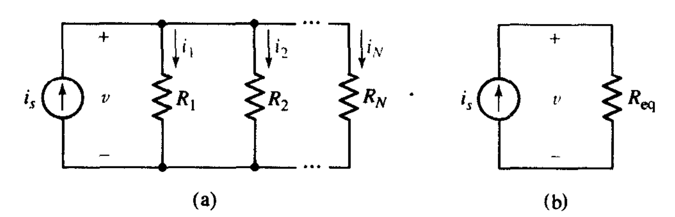


图 3.27　(a) 包含 N 个并联电阻的电路；(b) 等效电路

并联组合通常用下面的简写符号来表示

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 \| R_3$$

只有两个并联电阻的情况相当常见，可以表示成

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

或更简单地表示为

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad [10]$$

必须牢记最后一个公式，但不能把式[10]扩展到大于两个电阻的情况，如

$$R_{eq} \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

观察该方程的量纲就可以立即发现该方程是不正确的。

练习

3.11 将图3.28所示电路中的3个电流源以及两个10 Ω电阻进行合并，再求电压 v。

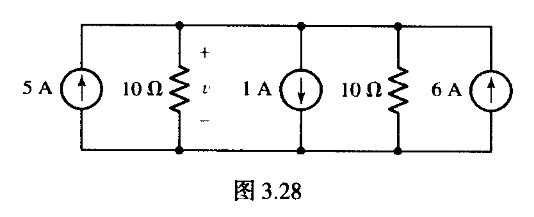


图3.28

答案：50 V。

例题3.12 计算图3.29(a)所示电路中受控源的功率和电压。

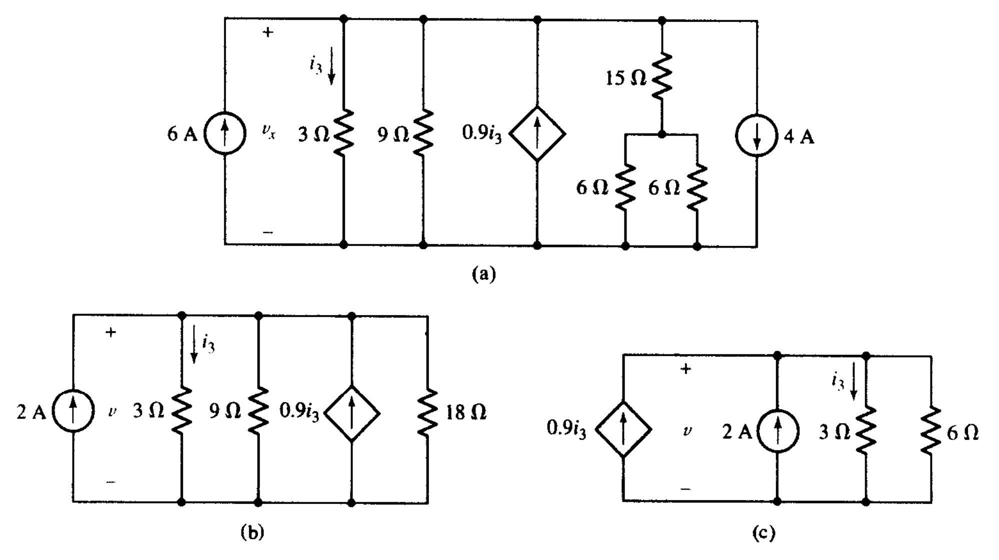


图3.29 (a) 多节点电路；(b) 将两个独立电流源合并成一个2 A的电源，用一个18 Ω的电阻替换15 Ω和两个并联连接的6 Ω电阻；(c) 简化后的等效电路

解： 在分析之前，首先化简电路，但注意不要把受控源包含进去，因此它的电压和功率是要求解的参数。

尽管两个独立电流源没有相邻画出，但它们实际上是并联连接的，因此可以用一个2 A的电源替换。

两个6 Ω电阻并联连接，因此可以用一个3 Ω电阻替换，该3 Ω电阻与15 Ω电阻串联，因此两个6 Ω电阻和15 Ω电阻就可以用一个18 Ω电阻替换［参见图3.29(b)］。

无论怎样，我们都不能合并剩下的3个电阻，控制变量 i_3 取决于3 Ω的电阻，因此该电阻必须保持不变。能够进一步化简的就是9 Ω‖18 Ω = 6 Ω，如图3.29(c)所示。

对图3.29(c)所示电路上面的节点应用KCL，可得

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

应用欧姆定律可得

$$v = 3i_3$$

可以计算得到

$$i_3 = \frac{10}{3}\ \text{A}$$

因此，受控源两端的电压（与 3 Ω 电阻两端的电压同为一个电压）为

$$v = 3i_3 = 10\ \text{V}$$

因此受控源对剩余电路提供的功率为 $v \times 0.9i_3 = 10(0.9)(10/3) = 30$ W。

现在如果要求解 15 Ω 电阻所消耗的功率，则必须返回到原来的电路。该电阻与一个 3 Ω 的等效电阻串联，而在整个 18 Ω 电阻上的电压为 10 V，因此，流过 15 Ω 电阻的电流为 5/9 A，并且该电阻吸收的功率为 $(5/9)^2(15) = 4.63$ W。

练习

3.12　求图 3.30 所示电路中的电压 v。

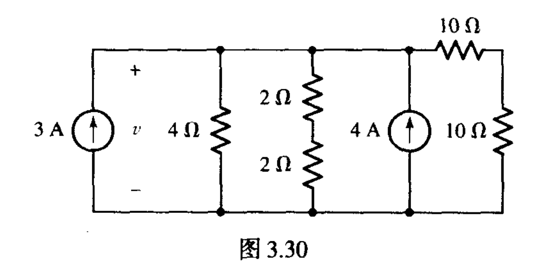


图 3.30

答案：12.73 V。

最后有3个关于串并联组合的说明或许对你有所帮助。第一个参见图3.31(a)并提出这样一个问题："v_s和R是并联还是串联关系？"答案是：既是串联也是并联。这两个元件具有同一个电流，因此是串联；同时它们又拥有同一个电压，因此是并联。

第二个说明是一个需要注意的地方。没有经验的学生或一些教师可能会把电路图画成难以识别串并联类型的结构。比如，图 3.31(b)所示电路中，只有 R_2 和 R_3 是并联的，R_1 和 R_8 是串联的。

最后一个说明是：一个电路元件并非一定要与电路中其他元件串并联。比如，图 3.31(b)中的 R_4 和 R_5 与其他任何元件都不是串联或并联关系，又如图 3.31(c)中任何元件都不与其他元件串联或并联。换句话说，我们不能够利用本章中讨论的方法对该电路进行化简。

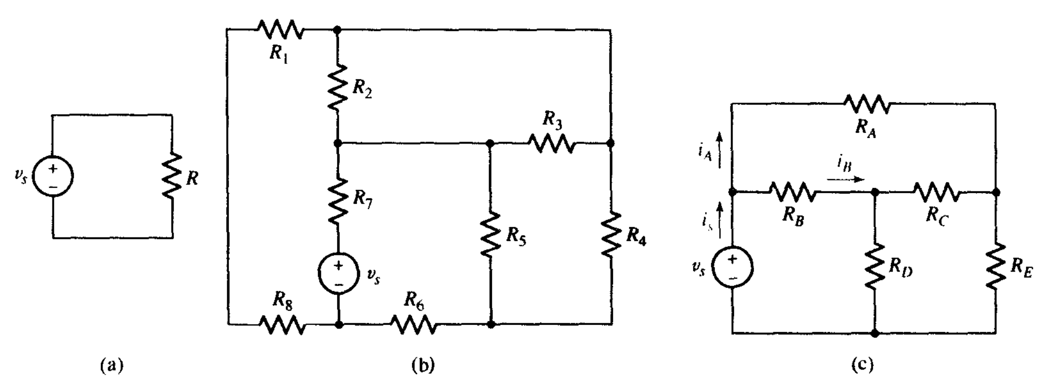


图 3.31　(a) 两个电路元件既是串联的也是并联的；(b) R_2和R_3并联，R_1 和 R_8 串联；(c) 不存在与其他元件并联或串联的元件

3.8 分压和分流

通过合并电阻和电源，我们发现可以减少电路分析的工作量。另一个有用的简化方法是采用分压和分流的思想。分压指的是以总电压来表示多个串联连接的电阻中任意一个电阻上的电压。在图 3.32 所示的电路中，通过 KVL 和欧姆定律可求得 R_2 两端的电压为

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

即

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

因此，

$$v_2 = iR_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

或

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

同样，可以得到 R_1 两端的电压为

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

如果对图 3.32 所示的网络进行扩展，用 $R_2, R_3, \cdots, R_N$ 的串联组合替换 R_2，那么就可以得到 N 个串联电阻分压的一般结果为

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \qquad [11]$$

利用式[11]可以求解任意一个电阻 R_k 两端的电压 v_k。

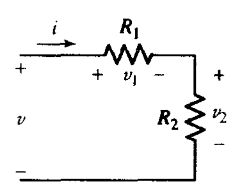


图 3.32 分压的例子

例题 3.13 求解图 3.33(a)所示电路中的 v_x。

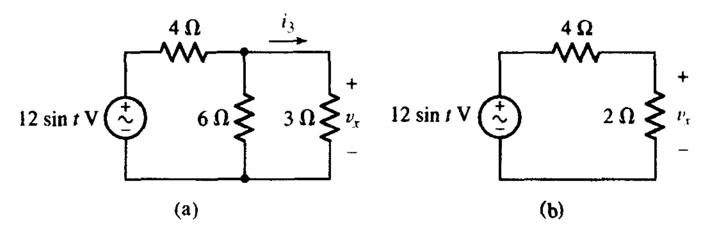


图 3.33 解释电阻合并和分压的例子：(a) 原始电路；(b) 简化电路

解： 首先合并 6 Ω 和 3 Ω 的电阻，替换为(6)(3)/(6+3) = 2 Ω。

因为 v_x 为并联组合两端的电压，因此简化后不会丢失这个量。但是如果为了进一步简化电路，再把 4 Ω 电阻和刚才求得的 2 Ω 电阻进行合并将会丢失 v_x。

因此对图 3.33(b)所示电路应用分压可得

$$v_x = (12\sin t)\frac{2}{4+2} = 4\sin t \quad \text{V}$$

练习

3.13　利用分压求解图 3.34 所示电路中的 v_x。

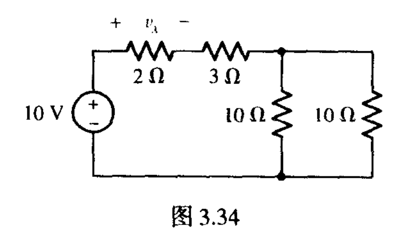


图 3.34

答案： 2 V。

与分压对偶[①]的是分流。已知提供给并联电阻的总电流，如图 3.35 所示。

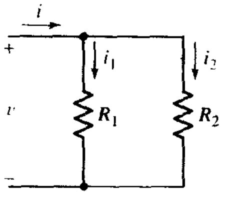


图 3.35　分流的图解

流过 R_2 的电流为

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i(R_1 \| R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2}\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

或者

$$i_2 = i\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad [12]$$

同样可得

$$i_1 = i\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad [13]$$

遗憾的是，最后这两个公式都有一个因子与分压中相应的因子稍有不同，因此需要小心对待以免犯错误。很多同学把分压表达式视为“显然”的，而把分流关系视为“异常”的。根据分流关系可知，并联连接中电阻越大其上流过的电流越小。

① 我们经常在工程中碰到对偶原理。在第 7 章中比较电感和电容时将简要讨论这个内容。

对于N个电阻的并联组合，流过电阻R_k的电流为

$$i_k = i\frac{\dfrac{1}{R_k}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\cdots+\dfrac{1}{R_N}} \tag{14}$$

写成电导形式为

$$i_k = i\frac{G_k}{G_1+G_2+\cdots+G_N}$$

该式与分压表达式[11]非常类似。

例题 3.14 写出图 3.36 所示电路中流过 3 Ω 电阻的电流表达式。

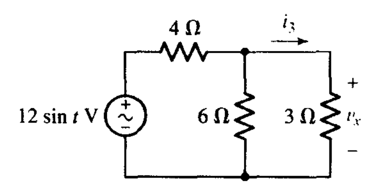


图 3.36 作为分流例题的电路。电压源符号中的波浪线表示它是一个随时间变化的正弦变量

解：流入 3 Ω − 6 Ω 组合的总电流为

$$i(t) = \frac{12\sin t}{4+3\|6} = \frac{12\sin t}{4+2} = 2\sin t \quad \text{A}$$

根据分流原理可得

$$i_3(t) = (2\sin t)\left(\frac{6}{6+3}\right) = \frac{4}{3}\sin t \quad \text{A}$$

遗憾的是，在一些不适用的场合，分流经常被误用。比如，考虑图3.31(c)所示电路，我们已经知道该电路不存在串联或并联的元件。没有并联电阻，就不能应用分流。即使这样，仍然有许多学生对电阻R_A和R_B应用分流，从而写出下面的错误方程：

$$i_A \not= i_S\frac{R_B}{R_A+R_B}$$

记住，并联电阻必定位于相同节点对之间的支路上。

练习

3.14 在图 3.37 所示电路中，利用电阻合并方法和分流方法求解i_1, i_2和v_3。

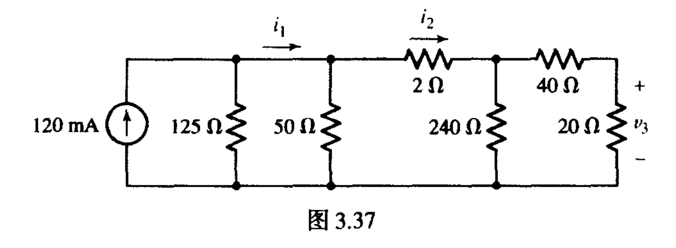


图 3.37

答案：100 mA; 50 mA; 0.8 V。

实际应用——非地理学的“地”

到目前为止，电路原理图都是以类似于图 3.38 所示电路的形式出现的，其中电压均定义在明确标出的两端之间。特别需要强调的是：电压不能定义在单个点上——它定义为两点之间的电位差。但是，许多电路原理图都采用将大地电压定义为零的约定，因此其他电压都是相对于该电压而言的。这个概念通常称为“接地”(earth ground)，它与防止火灾、致命的电击或者其他伤害而制定的安全规定有关，接地符号如图 3.39(a)所示。

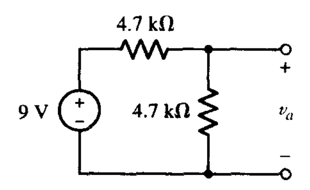


图 3.38　一个简单电路，两端的电压定义为 v_a

因为地为零电压，因此经常用它来表示电路图中的公共端。将图3.38所示的电路重画成图3.40，其中地符号表示一个公共节点。需要指出的是：对于 v_a 的数值而言，这两个电路是等效的（都为 4.5 V)，但它们却不完全一样。图 3.38 所示的电路称为浮动电路，因为它可以根据实际应用需要安装到地球同步卫星（或者比如是飞往冥王星的卫星）的一块电路板上，但是，图 3.40 所示的电路总是需要以某种方式通过导线在物理上与大地相连接。因为这个原因，有时候也用另外两个符号来表示公共端。图 3.39(b)所示的符号通常称为信号地，任何与信号地相连的端子可能（而且通常）与大地间存在一个大的电压。

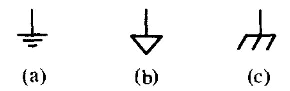


图 3.39　3 种表示接地或公共端的不同符号：(a) 大地；(b) 信号地；(c) 外壳地

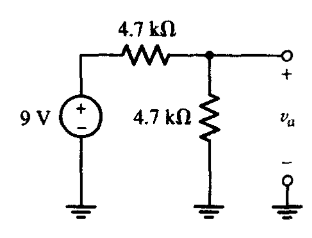


图 3.40　利用大地接地符号重画图3.38所示的电路。最右边的接地符号是多余的，只在对 v_a 的正参考端进行标注时才需要；负参考端隐含地表示地或 0 V

如果电路的公共端没有通过某些低阻抗的路径与大地相接，则可能导致潜在的危险。考虑图3.41(a)所示的电路，它描述的情况是一个人正准备触摸一个由交流电源供电的设备，电源插座只使用了两端，地线端是悬空的。该设备的所有电路的公共端都接在一起，并在电气上与设备的外壳相连。通常用图 3.39(c)所示的外壳地（chassis ground）符号来表示这种公共端。遗憾的是，可能由于制造的差错或磨损的原因存在一个接线错误。不管怎样，该外壳地不是大地接地，因此在外壳地和大地之间存在一个较大的电阻。图3.41(b)给出了这种情况的一个伪电路图（有些文献上用人体的等效电阻符号表示）。外壳和地之间的电气路径为桌子，它具有数百兆欧姆的电阻。但是，人的电阻要低好几个数量级。一旦人接触设备……我们只能说并不是所有的故事都会有一个好的结局。

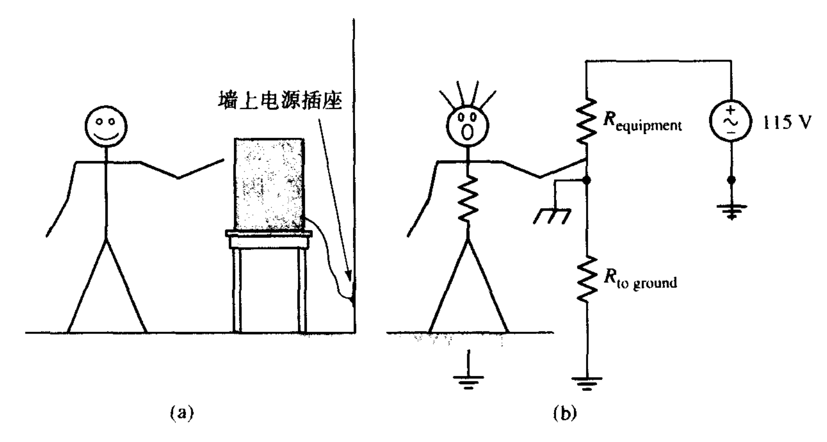


图 3.41 (a) 一个人准备去碰一个非正常接地的设备；(b) 等效电路图，这里将人用其等效电阻表示，设备也用其等效电阻表示，除了人以外的接地路径也用一个电阻表示

并不是所有的“地”均为“大地”，这样一个事实会引起很多的安全和电噪声问题。比如，在老建筑物中有时会遇到这样的情况，那里的管道最初是由导电的铜管组成的，建筑物中的水管通常构成一条到大地的低阻抗路径，因此用在许多电气连接中。但是，随着这些具有腐蚀性的管道被更现代和更低成本的非导电 PVC 管道系统所取代，这些到大地的低阻抗路径将不复存在，由此将产生一个问题，即在某个特定的地区，地的成分差异很大，即两幢独立建筑物的“地”事实上可能并不相等，于是它们之间可能存在电流流动。

本书只使用大地符号。但是必须记住并不是所有的地在实际中都相等。

总结和复习

- 基尔霍夫电流定律（KCL）叙述的是流入任何节点的电流代数和为零。
- 基尔霍夫电压定律（KVL）叙述的是沿电路中任何闭合回路的电压代数和为零。
- 电路中拥有同一个电流的所有元件称为串联连接。
- 电路中两端具有共同电压的元件称为并联连接。
- N 个电阻的串联组合可以等效为一个电阻，该电阻的阻值为 $R_{eq}=R_1+R_2+\cdots+R_N$。
- N 个电阻的并联组合可以等效为一个电阻，该电阻的电阻的阻值为

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_N}$$

- 串联电压源可以用一个电源替换，但要注意每个电源的极性。
- 并联电流源可以用一个电源替换，但要注意每个电流的箭头方向。
- 利用分压关系可以计算出串联连接电阻中的一个电阻（或者一组电阻）从总电压中分配得到的电压。
- 利用分流关系可以计算当一个总电流流过并联连接的一排电阻后其中任何一个电阻从总电流中分配得到的电流。

深入阅读

下面这本书讨论了能量守恒原理、电荷守恒原理以及基尔霍夫定律：

R. Feynman, R. B. Leighton 和 M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989, pp. 4-1, 4-7, and 25-9。

符合 1996 年国家电气规则的接地的详细讨论可以在下面这本书中找到：

J. F. McPartland和B. J. McPartland, *McGraw-Hill's National Electrical Code® Handbook*, 22nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996, pp.337-485。

习题

3.1 节点、路径、回路和支路

1. 重画图 3.42 所示的电路，要求将节点数量合并到最少。

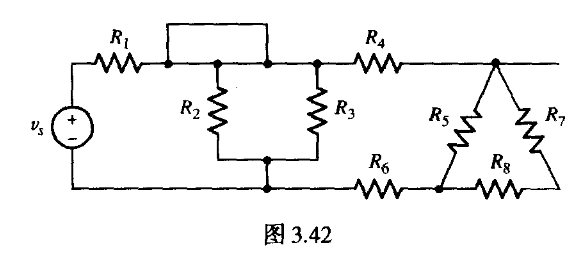
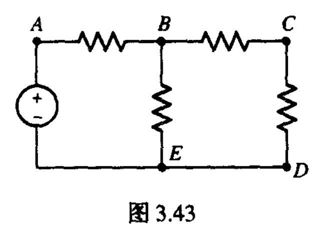
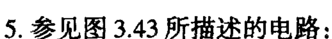


图 3.42

2. 对于图 3.42 所示的电路，求：(a) 节点数；(b) 支路数。
3. 在图 3.43 所示的电路中：
   (a) 有多少个节点？
   (b) 有多少条支路？
   (c) 从 A 到 B 到 E 到 D 到 C 到 B，是否组成一条路径？是否形成回路？
4. 在图 3.44 所示的电路中：
   (a) 有多少个节点？
   (b) 有多少条支路？
   (c) 从 B 到 F 到 E 到 C 是否组成一条路径？是否形成回路？




图 3.43

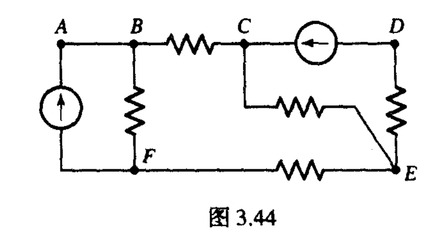


图 3.44

5. 参见图 3.43 所描述的电路：
   (a) 如果在电路的 E 点和 D 点之间接上第二根导线，那么新电路有多少个节点？
   (b) 如果在电路中加上一个电阻，该电阻一端接在 C 点，另一端悬空，那么新电路有多少个节点？
   (c) 下列哪条路径可以组成回路？

i. 从A到B到C到D到E到A。

ii. 从B到E到A。

iii. 从B到C到D到E到B。

iv. 从A到B到C。

v. 从A到B到C到B到A。

3.2　基尔霍夫电流定律

6. (a) 求图 3.45 所示电路中的电流 i_z。(b) 如果流过 3 A 电流的电阻值为 1 Ω，那么流过 –5 A 电流的电阻阻值是多少？

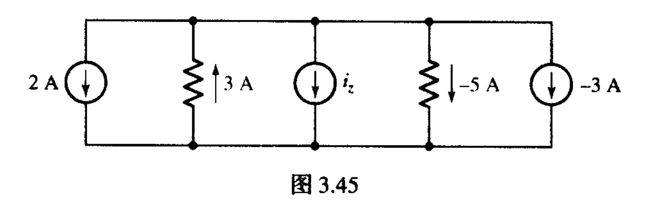


图 3.45

7. 求图 3.46 所示的每个电路中的 i_x。

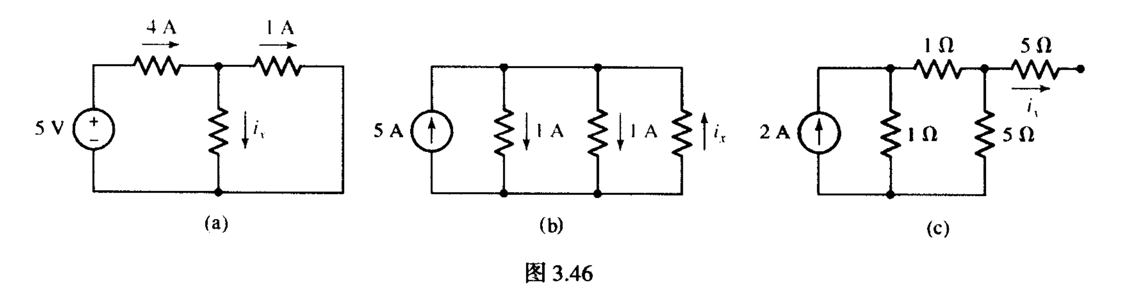


图 3.46

8. 参见图 3.47：

(a) 如果 $i_y = 2$ A，$i_z = 0$ A，求 i_x。(b) 如果 $i_x = 2$ A，$i_z = 2i_y$，求 i_y。(c) 如果 $i_x = i_y = i_z$，求 i_z。

9. 电路如图 3.48 所示，求 i_x 和 i_y。

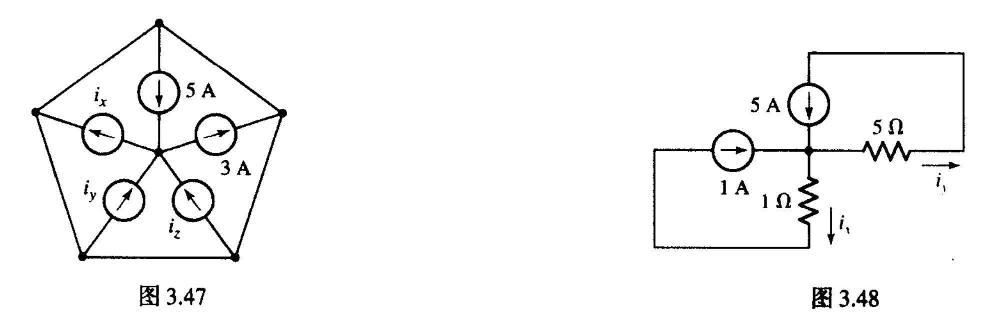


图 3.47　　图 3.48

10. 一个 100 W，60 W 以及 40 W 灯泡互相并联连接，由标准的北美 115 V 电源供电。计算流过每个灯泡的电流以及电压源提供的总电流。

11. 数字万用表（DMM）通常用来测量电压。它有两根导线（通常红的为参考正，黑的为参考负）以及一个 LCD 显示屏。假定一个数字万用表接到图 3.46(b)所示的电路中，正极接在上面的节点，负极接在下面的节点。利用 KCL 解释该数字万用表以这种方式使用时为什么希望它的电阻为无穷大而不是零。

12. 某餐馆有一个由 12 个灯泡组成的霓虹灯，当某个灯泡坏掉时，该霓虹灯呈现出无穷大的电阻并且不能流过电流。制造商给出了两种连接方式（见图 3.49）的选项。根据 KCL 定律判断该餐馆选择的是哪种？解释原因。



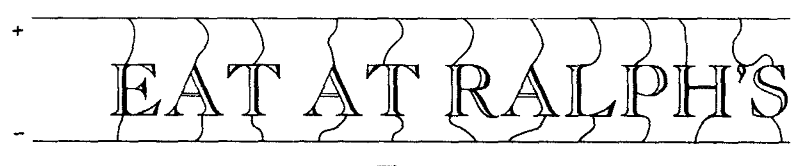


图 3.49

13. 电路如图 3.50 所示：

(a) 如果 $i_z = -3$ A，计算 v_y。

(b) 如果 $i_z = 0.5$ A，为了使 $v_y = -6$ V，应该将 5 V 电源换成多大的电压？

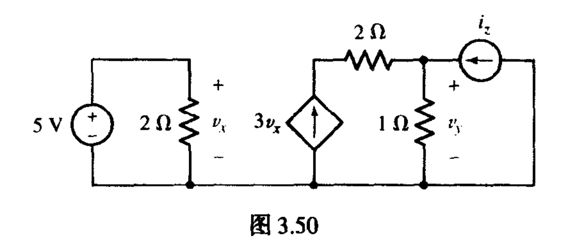


图 3.50

14. 电路如图 3.51(a)所示：

(a) 如果 $i_x = 5$ A，求 v_1 和 i_y。

(b) 如果 $v_1 = 3$ V，求 i_x 和 i_y。

(c) 当 i_s 为多少时，v_1 不等于 v_2？

15. 电路如图 3.51(b)所示，如果 5 A 电源提供 100 W 功率，40 V 电源提供 500 W 功率，求 R 和 G。

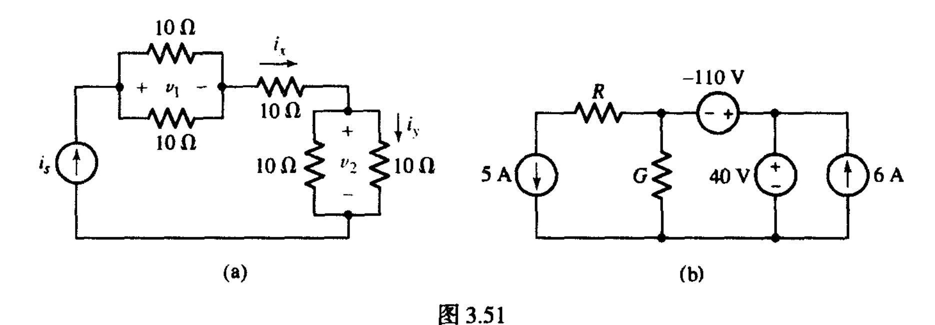


图 3.51

3.3　基尔霍夫电压定律

16. 电路如图 3.52(a)和图 3.52(b)所示，求电流 i。

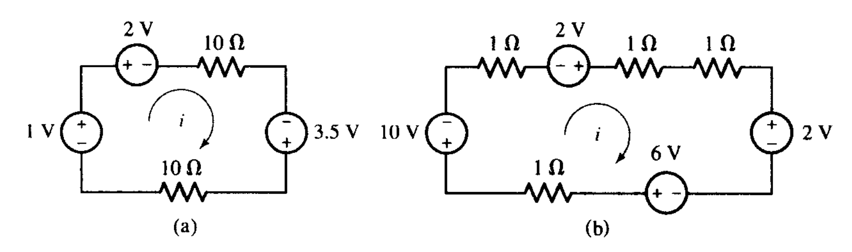


图 3.52

17. 计算图 3.53 所示的每个电路中的电流 i。

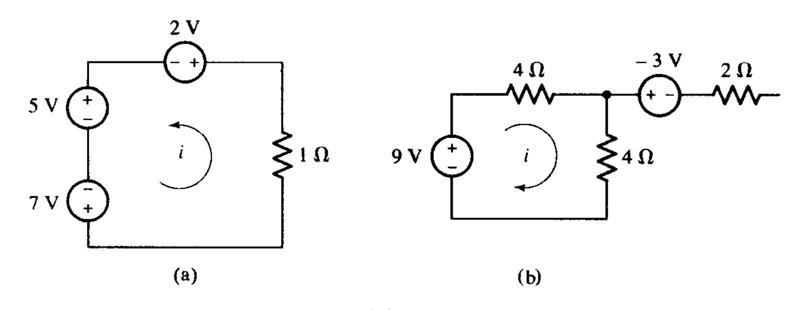


图 3.53

18. 考虑图 3.54 所示的简单电路，利用 KVL 推导出下列方程：

$$v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad 和 \quad v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

19. 图 3.55 所示电路包含一个运算放大器，该器件通常具有下列两个特性：(a) $V_d = 0$ V；(2) 每个输入端（标有“−”和“+”号）都没有电流流入，但输出端（标有“OUT”）可以有电流流过。这看起来好像是不可能的情况（与 KCL 直接冲突），原因是因为运放符号中没有包含电源的结果。基于这个信息，计算 V_{out}。（提示：需要两个 KVL 方程，这两个方程都涉及到 5 V 电源。）

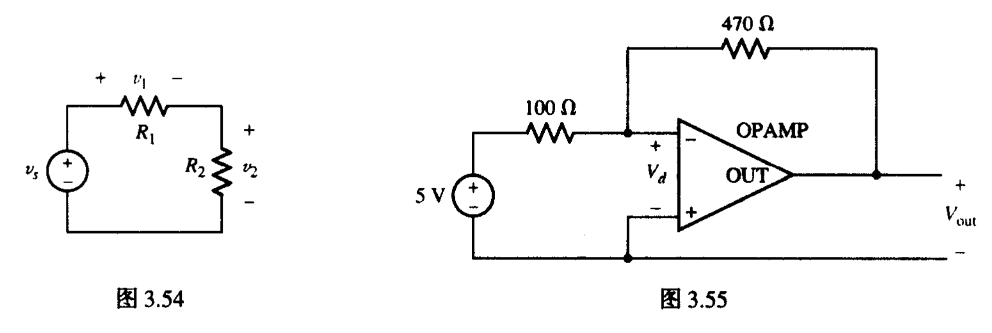


图 3.54　　　　图 3.55

20. 电路如图 3.56 所示，利用欧姆定律和基尔霍夫定律，求：(a) v_x；(b) i_{in}；(c) I_s；(d) 受控源提供的功率。

21. (a) 利用基尔霍夫定律和欧姆定律逐步计算图 3.57 所示电路中的所有电流和电压。(b)计算每个电路元件吸收的功率并证明其功率之和等于零。

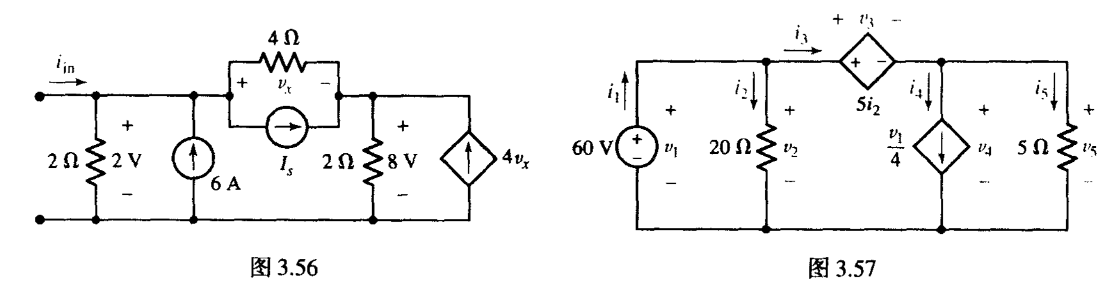


图 3.56　　图 3.57

22. 电路如图 3.58 所示，求 7 个电路元件各吸收多少功率?
23. 某电路包含 6 个元件和 4 个节点，分别标为 1，2，3 和 4。每个电路元件都连接在不同的节点对之间。电压 v_{12}（下标中第一个节点名为正参考端）为 12 V，$v_{34}=-8$ V。如果 v_{14} 等于：(a) 0；(b) 6 V；(c) −6 V，求 v_{13}，v_{23} 和 v_{24}。
24. 参见图 3.59 所示的晶体管电路。记住，尽管不知道该器件的电流－电压关系，但它仍然满足 KCL 和 KVL 定律。(a) 如果 $I_D=1.5$ mA，计算 V_{DS}；(b) 如果 $I_D=2$ mA，$V_G=3$ V，计算 V_{GS}。

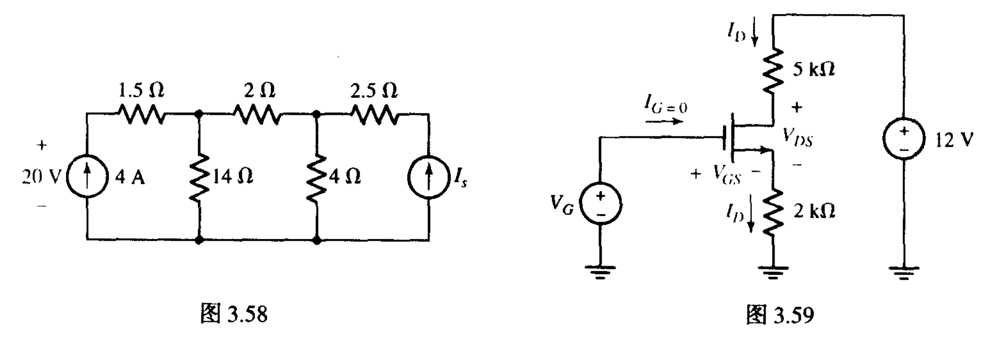


图 3.58　　图 3.59

3.4 单回路电路

25. 电路如图 3.60 所示，求元件 X 吸收的功率，如果 X 是：(a) 100 Ω 的电阻；(b) 40 V 的独立电压源，正参考端位于上端；(c) 受控电压源，数值为 $25i_x$，正参考端位于上端；(d) 受控电压源，数值为 $0.8v_1$，正参考端位于上端；(e) 2 A 的独立电流源，箭头向上。
26. 电路如图 3.61 所示，求 i_1。假设受控电压源为：(a) $2v_2$；(b) $1.5v_3$；(c) $-15i_1$。

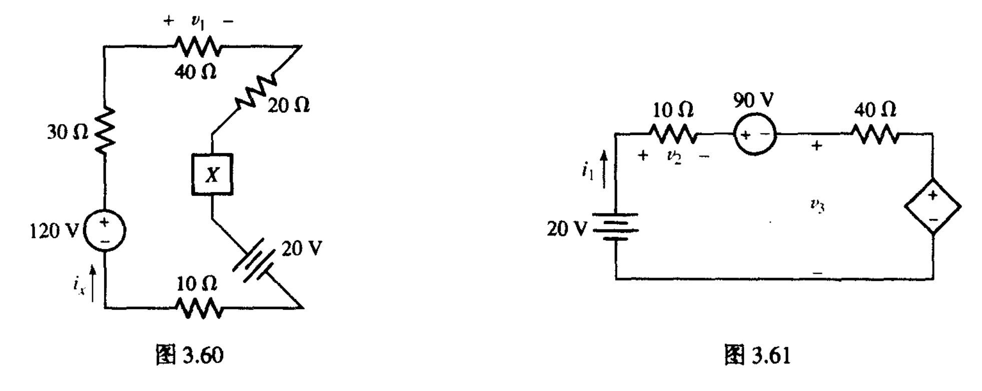


图 3.60　　图 3.61

27. 参见图 3.61 所示的电路，受控源为 $1.8v_3$，如果：(a) 90 V 电源输出 180 W 的功率；(b) 90 V 电源吸收 180 W 功率；(c) 受控源输出功率为 100 W；(d) 受控源吸收功率为 100 W。求 v_3 的值。

28. 图 3.62 所示为一个电池充电模型，求可调电阻 R 的值，使得：(a) 充电电流为 4 A；(b) 传递给电池（0.035 Ω 和 10.5 V）的功率为 25 W；(c) 电池（0.035 Ω 和 10.5 V）两端的电压为 11 V。
29. 修改图 3.62 所示电路，把一个受控电压源与电池串联。断开上面的导线，受控源的参考极性“+”位于右边，控制量为 $0.05i$，其中 i 为顺时针方向的回路电流。如果 $R = 0.5\ \Omega$，求电流 i 和包括受控源在内的电池两端的电压。
30. 电路如图 3.63 所示，求 6 个元件各自吸收的功率，并证明其功率之和为零。

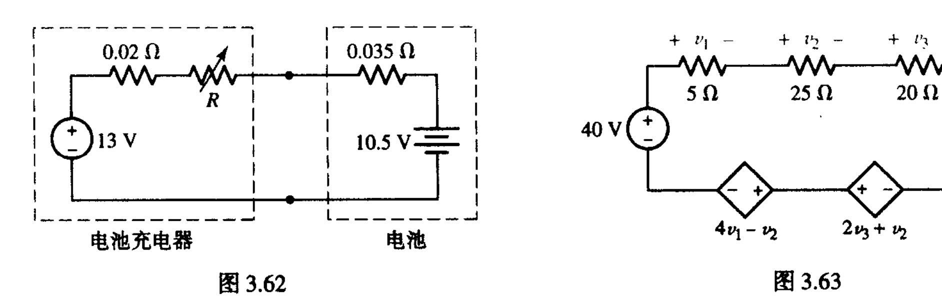


图 3.62　　图 3.63

31. 某电路如图 3.64 所示：
   (a) 求电阻 R，使得 25 kΩ 电阻吸收的功率为 2 mW。
   (b) 求电阻 R，使得 12 V 电源提供给电路 3.6 mW 的功率。
   (c) 将电阻 R 替换为一个电压源，使得两个电阻吸收的功率都为零，画出电路图，标出新电源的极性。
32. 参见表 2.4，如果图 3.65 所示电路的底部导线段是 22 AWG 的实心铜线，其长度为 3000 英尺，计算电流 i。



图 3.64　　图 3.65

33. 在图 3.66 所示的电路中，设 $g_m = 25 \times 10^{-3}$ S，$v_s = 10\cos 5t$ mV，求 $v_o(t)$。
34. 不管欧姆定律是否适用，基尔霍夫定律总是适用的。例如，一个二极管的 I-V 特性为

$$I_D = I_S\left(e^{V_D/V_T} - 1\right)$$

其中，室温时 $V_T = 27$ mV，I_S 的范围为 10^{-12}~10^{-3} A。在图 3.67 所示的电路中，如果 $I_S = 3\ \mu$A，利用 KVL/KCL 计算 V_D（注意：这个问题将得到一个超越方程，需要利用迭代方法得到数值结果，大多数科学计算器都可以运行这种函数）。

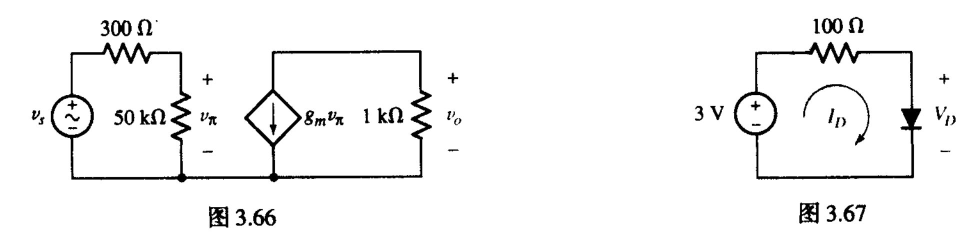


图 3.66　　图 3.67

3.5　单节点对电路

35. 某电路如图 3.68 所示，求图中每个元件吸收的功率，如果受控源为：(a) $0.8i_x$；(b) $0.8i_y$。在两种情况下，解释吸收功率之和为零的现象。
36. 求图 3.69 所示电路中的 i_x。

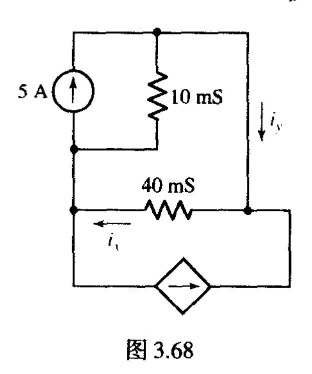


图 3.68

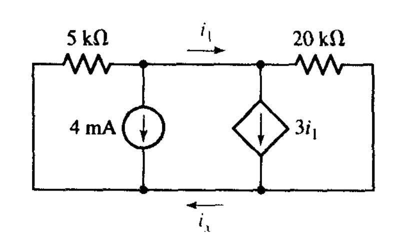


图 3.69

37. 见图 3.70 所示的单节点对电路，求各个元件所吸收的功率，并证明功率之和为零。
38. 某电路如图 3.71 所示，如果它是：(a) 4 kΩ 电阻；(b) 20 mA 独立电流源，参考箭头方向向下；(c) 受控电流源 $2i_x$，参考箭头方向向下；(d) 60 V 独立电压源，参考极性 "+" 在上端。求元件 X 吸收的功率。

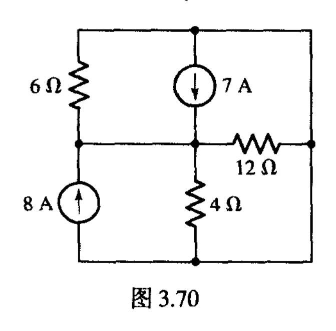


图 3.70

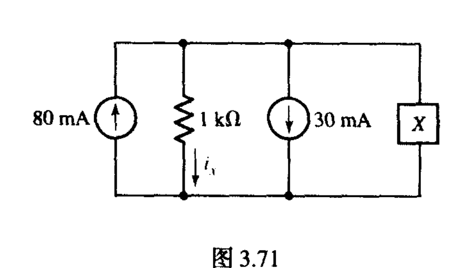


图 3.71

39. (a) 电路如图 3.72 所示，设元件 X 为一个独立电流源 i_s，箭头方向向上。如果 4 个电路元件均不吸收任何功率，则 i_s 的值为多少？(b) 设元件 X 为一个独立电压源 v_s，参考极性 "+" 在上端。如果该电压源不吸收任何功率，则 v_s 的值为多少？
40. (a) 对图 3.73 所示电路中的右上节点应用单节点对的分析方法，求 i_x；(b)现在对左上节点进行处理，求 v_8；(c) 5 A 电源提供多大的功率？

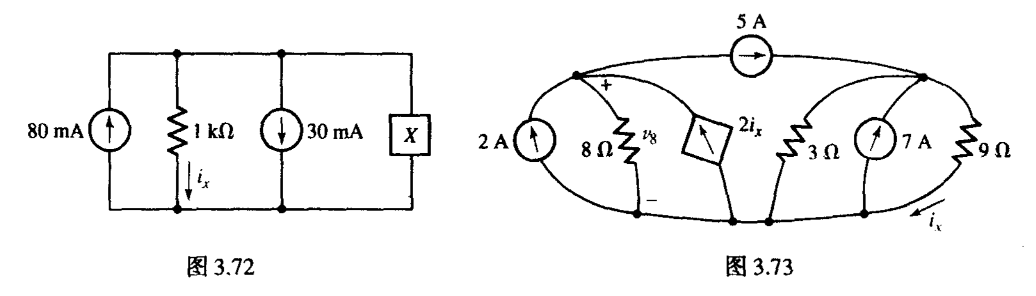


图 3.72　　图 3.73

41. 电路如图 3.74 所示，求图中 5 Ω 电阻吸收的功率。
42. 计算图 3.75 所示电路中每个元件提供的功率，并证明它们的功率之和等于零。

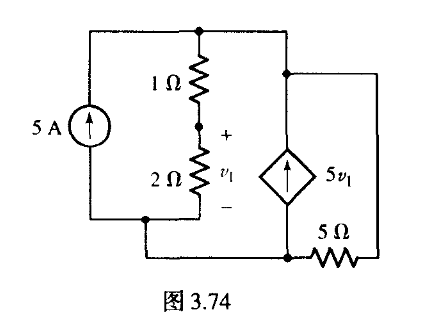


图 3.74

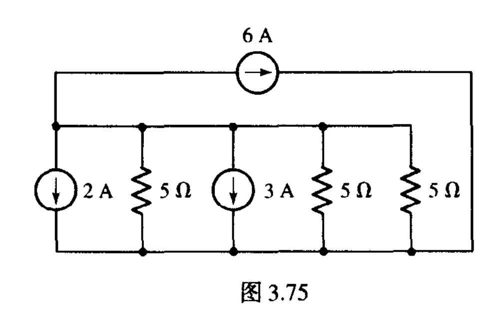


图 3.75

43. 参见表2.4，为了使图3.76所示电路中电流$i_1 = 5$ A，需要多少英里[1]长的28 AWG实心铜导线？

44. 在图 3.77 所示电路中，如果 $v = 6$ V，求 i_s。

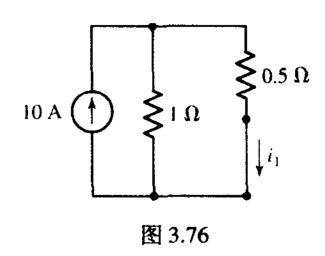


图 3.76

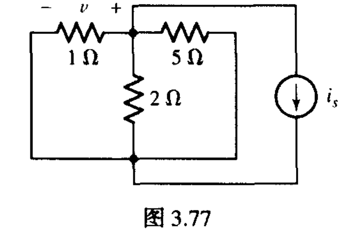


图 3.77

3.6 电源的串联和并联

45. 利用电源组合，计算图 3.78 所示的两个电路中的 i。

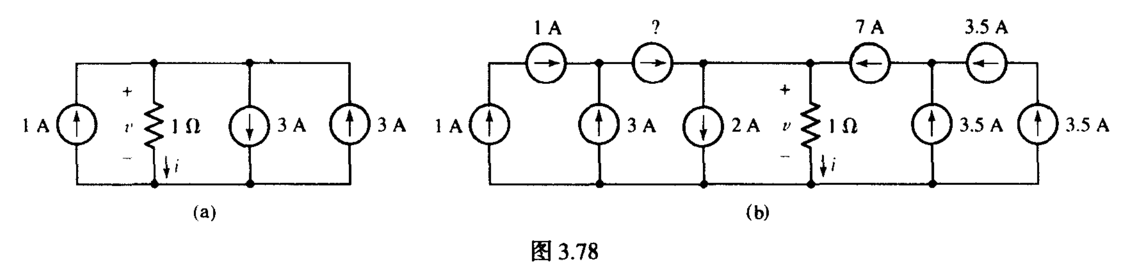


图 3.78

46. 首先合并电源，然后计算图 3.78 所示的两个电路中的 v。

47. 计算图 3.79 所示的每个电路的电流 i。

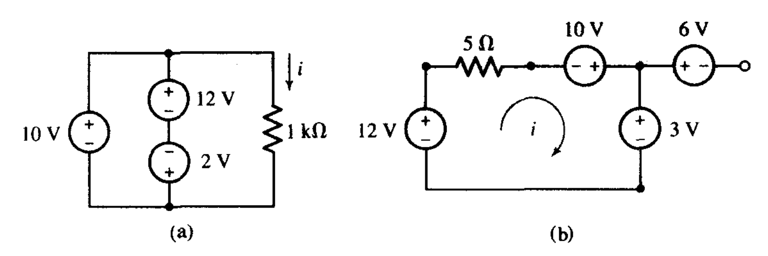


图 3.79

48. 计算图 3.80 所示电路中每个元件吸收的功率，并验证其功率之和等于零。

49. 电路如图 3.81 所示，计算 i，如果：

(a) $v_1 = v_2 = 10$ V, $v_3 = v_4 = 6$ V。

① 1 英里 = 1.6093 km。——编者注

(b) $v_1 = v_3 = 3\ \text{V}$, $v_2 = v_4 = 2.5\ \text{V}$。

(c) $v_1 = -3\ \text{V}$, $v_2 = 1.5\ \text{V}$, $v_3 = -0.5\ \text{V}$, $v_4 = 0\ \text{V}$。

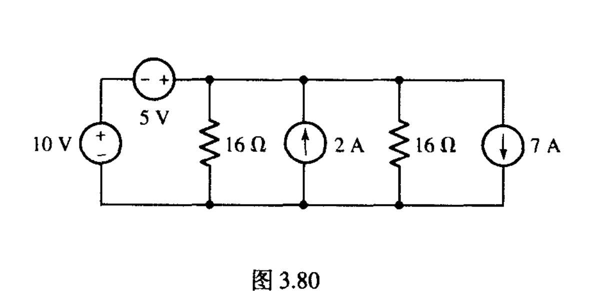


图 3.80

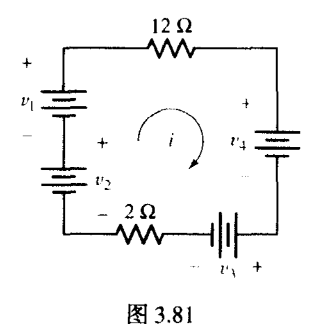


图 3.81

50. 在图 3.82 所示的电路中，选择 v_1 使得电流 i_x 等于 2 A。
51. 求图 3.83 所示电路中的电压 v。

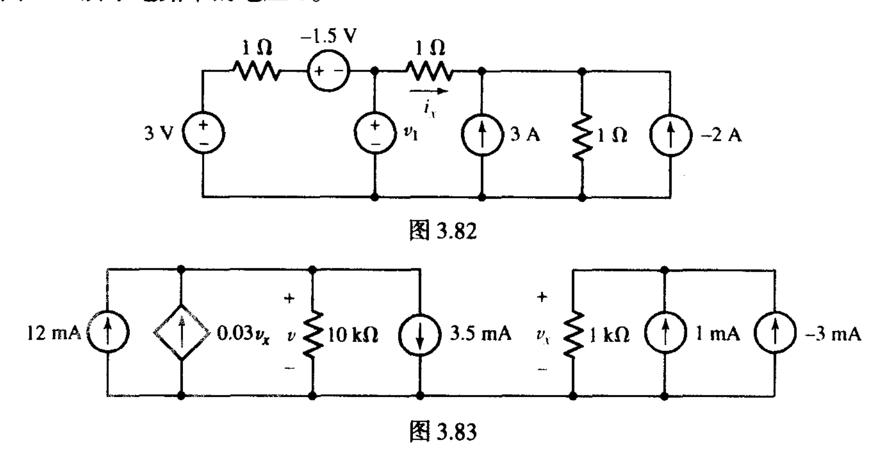


图 3.82

图 3.83

52. 图 3.84 所示电路包含几个串联连接和并联连接的电流源和电压源。(a) 求每个电源吸收的功率。(b) 为了使 −5 A 电源提供的功率降为零，4 V 的电源需要变为多少？

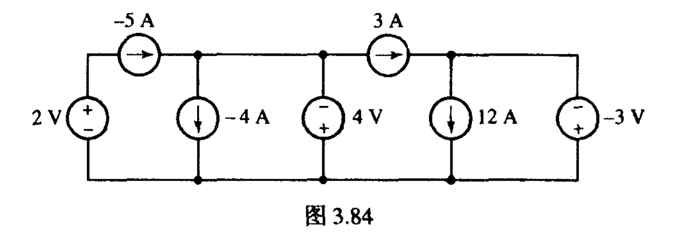


图 3.84

3.7　电阻的串联和并联

53. 电路如图 3.85 所示，如果每个电阻都为 1 kΩ，计算所示的等效电阻。
54. 对于图 3.86 所示的电路：
    (a) 计算等效电阻。
    (b) 如果该电路推广到 N 条支路，每条支路的电阻数都比其左边的支路多一个电阻。求该电路的等效电阻表达式。
55. 给定 3 个 10 kΩ 电阻，3 个 47 kΩ 电阻，3 个 1 kΩ 电阻，求电阻组合（不一定使用所有电阻），使得该组合等效为：(a) 5 kΩ；(b) 57 333 Ω；(c) 29.5 kΩ。

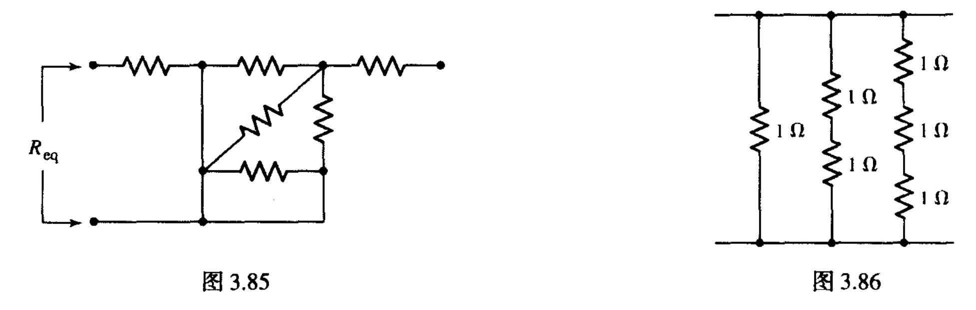


图 3.85　　　图 3.86

56. 利用电阻和电源组合，简化图 3.87 所示的网络。

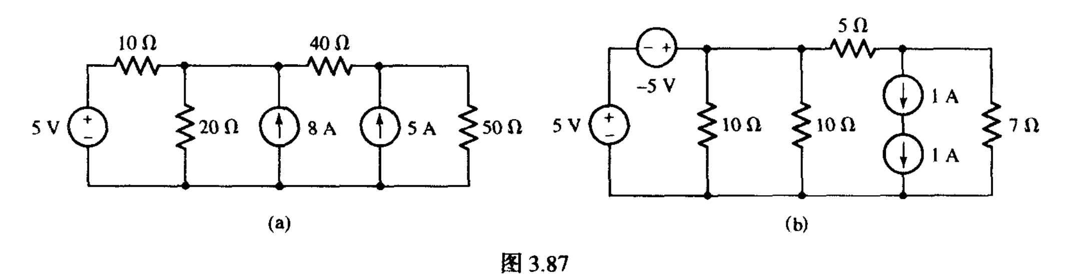


图 3.87

57. 计算图 3.88 所示电路的等效电阻。

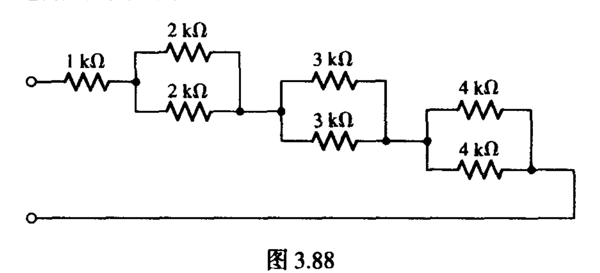


图 3.88

58. 求图 3.89 所示的每个电阻网络的 R_{eq}。

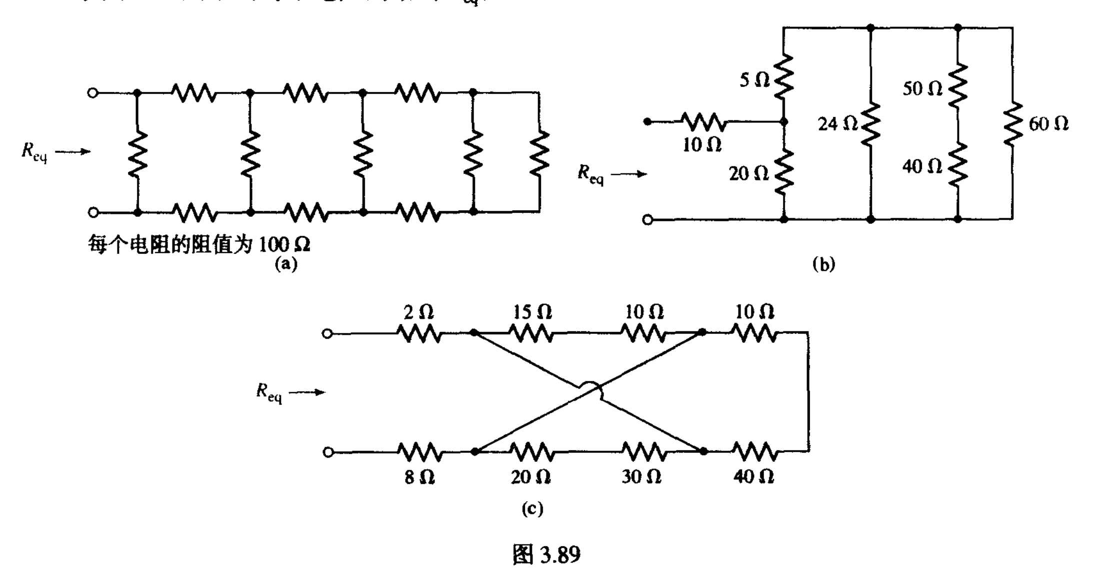


图 3.89

59. 在图 3.90 所示的网络中：(a) 设 $R = 80\ \Omega$，求 R_{eq}；(b) 如果 $R_{eq} = 80\ \Omega$，求 R；(c) 如果 $R = R_{eq}$，求 R。

60. 如何利用 4 个 100 Ω 的电阻组成具有下列等效电阻值的网络：(a) 25 Ω；(b) 60 Ω；(c) 40 Ω。

61. 求图 3.91 所示电路中每个电阻吸收的功率。

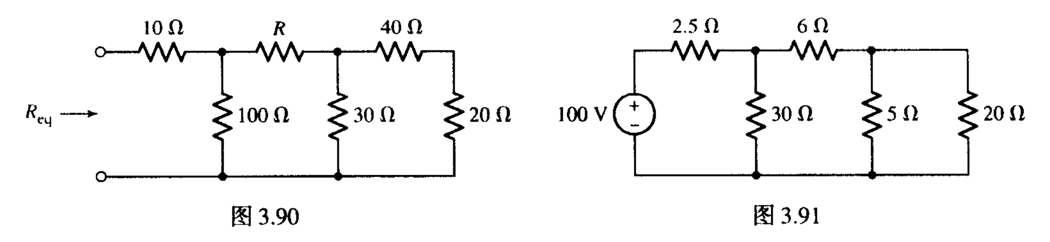


图 3.90　　　　图 3.91

62. 对于图 3.92 所示的电路，利用电阻组合和电源组合方法，求 v_x 和 i_x。

63. 求图 3.93 所示的每个网络中的 G_{in}。所有值的单位都为毫西门子（mS）。

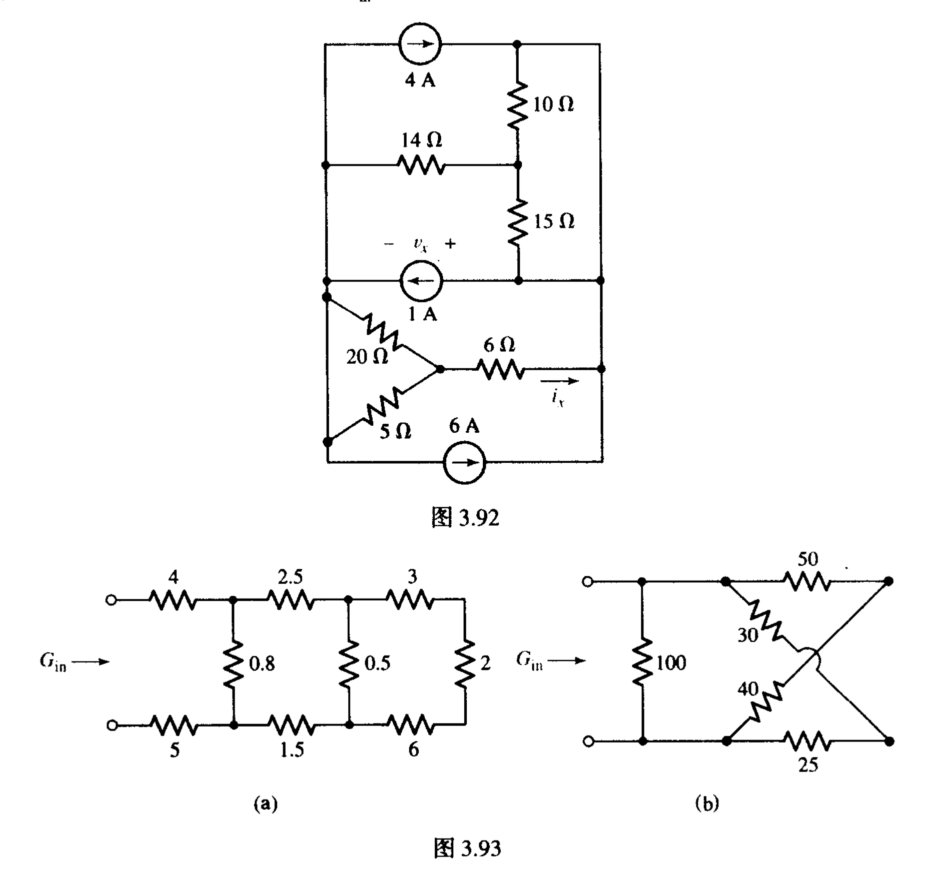


图 3.92

(a)　　　　(b)

图 3.93

3.8 分压和分流

64. 电路如图 3.94 所示，利用电阻合并、电源合并以及分流原理，计算 1 Ω，10 Ω 和 13 Ω 电阻吸收的功率。

65. 惠斯通电桥（见图 3.95）是最著名的电气电路之一，用于电阻测量。符号中有箭头的电阻（R_3）是一个可变电阻，有时称为电位器。可以通过调节旋钮来改变其电阻值。圆圈中有一个对角箭头的符号表示安培表，它用来测量流过的电流。假定安培表是理想的，即内阻为零。

假定 R_1, R_2 和 R_3 已知，需要求 R 的值。调整 R_3 直到 $i_m = 0$，即直到流过安培表的电流为零。此时，电桥达到平衡。

利用 KCL 和 KVL，证明 $R = \frac{R_2}{R_1} R_3$（提示：与 V_s 的值无关；$i_m = 0, i_1 = i_3, i_2 = i_R$；安培表两端无电压降）。

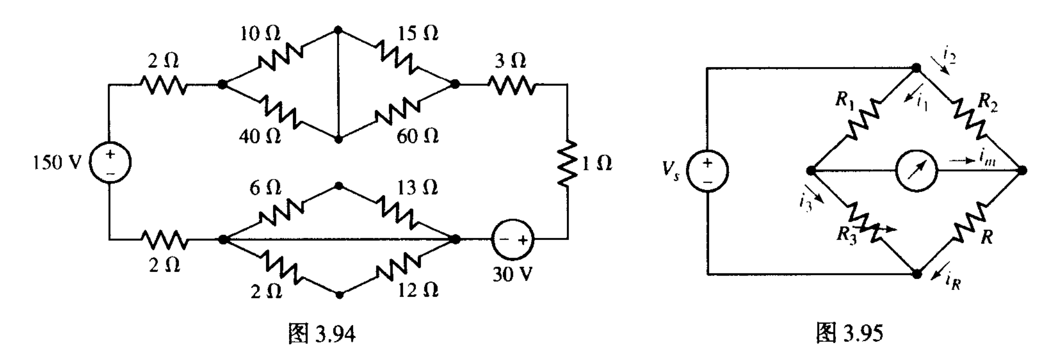


图 3.94　　　　图 3.95

66. 图 3.96 所示电路包含几个串联连接的电阻。利用分压原理计算最小电阻两端的电压降以及最大电阻两端的电压降。

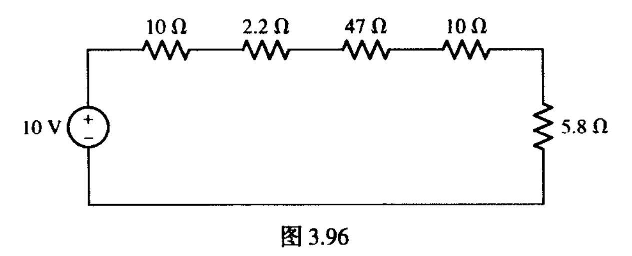


图 3.96

67. 利用分压原理计算图 3.97 所示电路中 47 kΩ 电阻两端的电压。
68. 参见图 3.98 所示电路，利用分流原理计算向下流过下列电阻的电流：(a) 33 Ω 的电阻；(b) 最右边的 134 Ω 电阻。

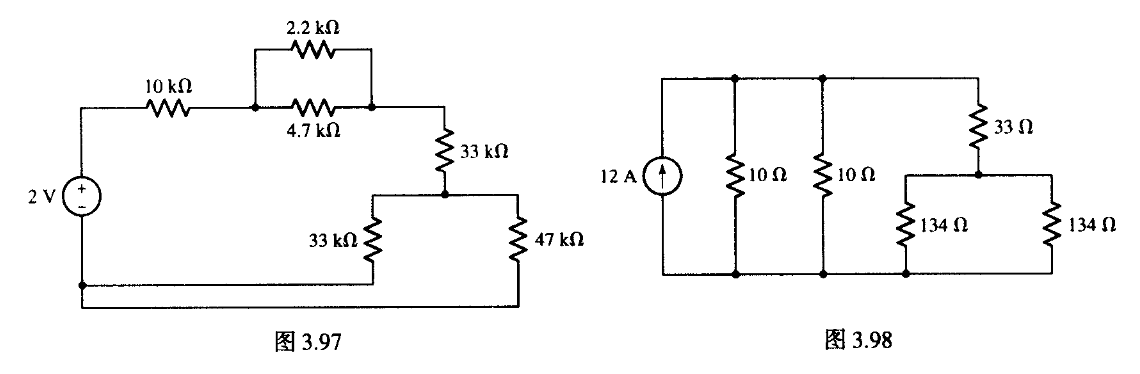
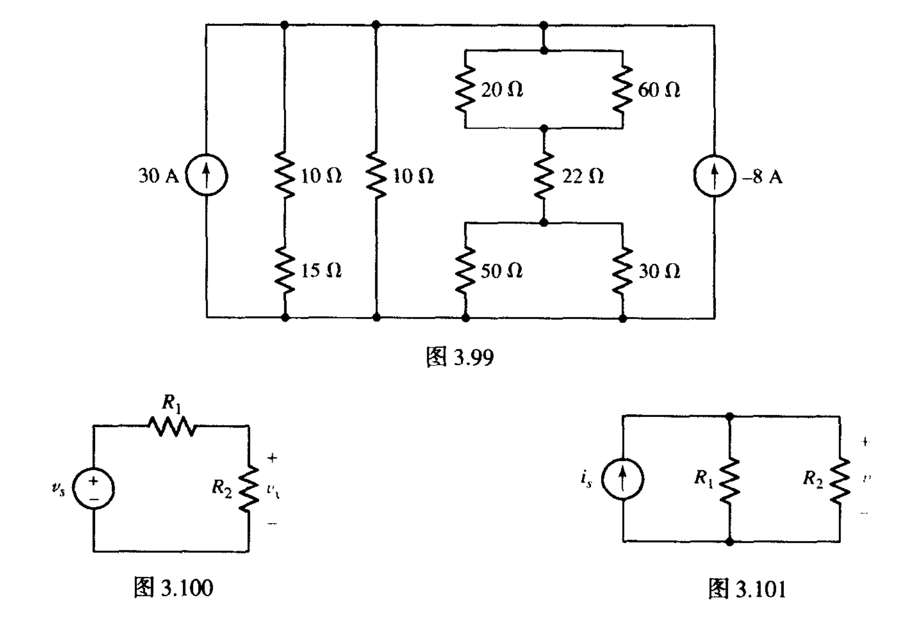


图 3.97　　　　图 3.98

69. 在图 3.99 所示电路中虽然有许多元件，但我们只关心 15 Ω 电阻两端的电压。利用分流原理计算其电压值。
70. 从下面给定的电阻值中选取电阻（可以使用多次），确定图 3.100 所示电路中 v_s，R_1 和 R_2 的值，使得 $v_x = 5.5$ V。（1 kΩ，3.3 kΩ，4.7 kΩ，10 kΩ。）
71. 从下面给定的电阻值中选取电阻（可以使用多次），确定图 3.101 中 i_s，R_1 和 R_2 的值，使得 $v_x = 5.5$ V。（1 kΩ，3.3 kΩ，4.7 kΩ，10 kΩ。）



72. 求图 3.102 中 15 kΩ 电阻消耗（或吸收）的功率。

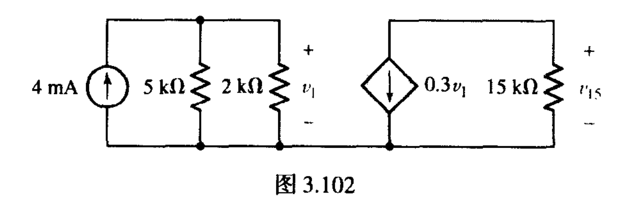


图 3.102

73. 电路如图 3.103 所示，求 i_x，并计算 15 kΩ 电阻消耗（或吸收）的功率。

74. 电路如图 3.104 所示，求 i_x, i_y，以及 3 Ω 电阻消耗（或吸收）的功率。

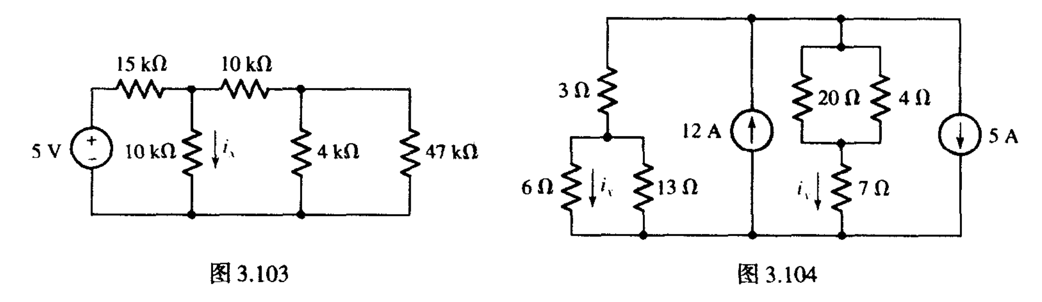


图 3.103　　图 3.104

75. 在图 3.105 所示的电路中，47 kΩ 电阻消耗（或吸收）的功率是多少？

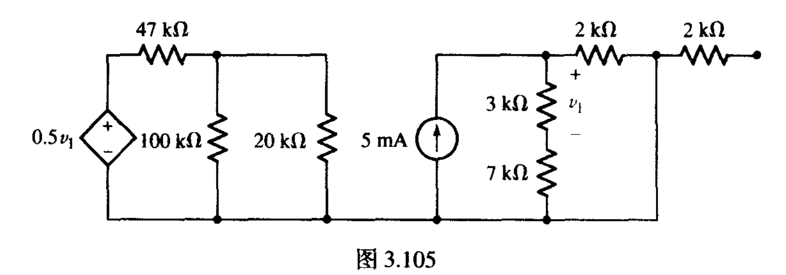


图 3.105

76. 在图 3.106 所示的电路中，为什么不能用分压原理来求 v_1。

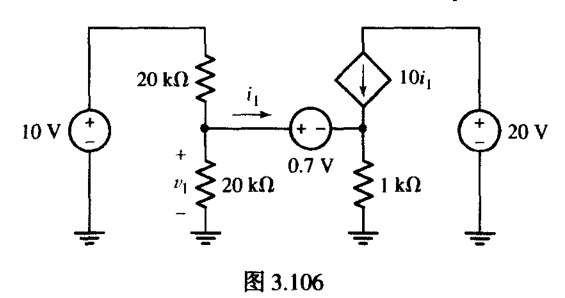


图 3.106

77. 对于图 3.107 所示电路，利用分压和分流原理求下列表达式：(a) v_2; (b) v_1; (c) i_4。

78. 参见图 3.108 所示电路：(a) 设 $v_s = 40$ V, $i_s = 0$, 求 v_1; (b) 设 $v_s = 0$, $i_s = 3$ mA, 求 i_2 和 i_3。

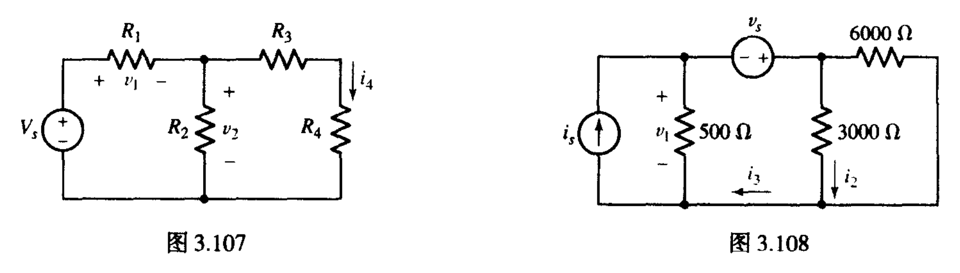


图 3.107　　图 3.108

79. 在图 3.109 所示的电路中：(a) 设 $v_x = 10$ V, 求 I_s; (b) 设 $I_s = 50$ A, 求 v_x; (c) 计算 v_x/I_s。

80. 确定图 3.110 所示电路中 R_x 电阻吸收的功率。

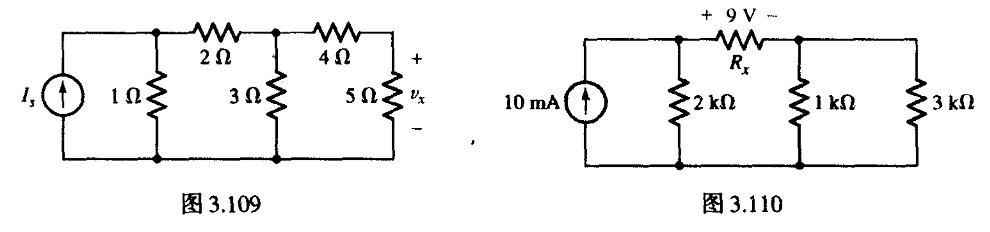


图 3.109　　图 3.110

81. 利用分流和分压原理，求图 3.111 所示电路中 v_5 的表达式。

82. 参见图 3.112 所示电路：(a) 如果 $I_1 = 12$ mA, 求 I_x; (b) 如果 $I_x = 12$ mA, 求 I_1; (c) 如果 $I_2 = 15$ mA, 求 I_x; (d) 如果 $I_s = 60$ mA, 求 I_x。

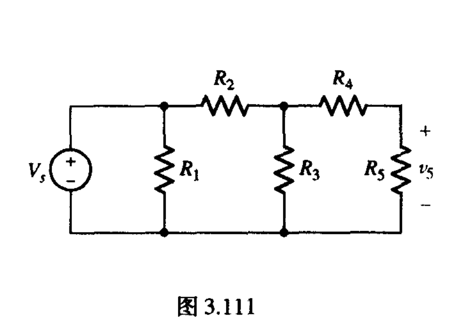


图 3.111

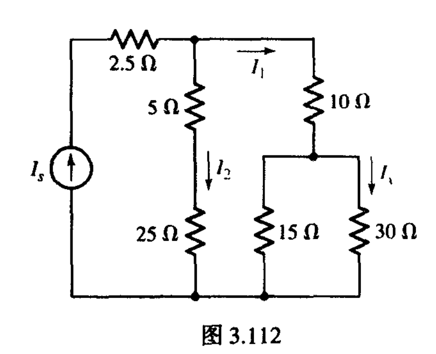


图 3.112

83. 图3.113所示电路通常用来作为MOSFET放大器交流特性等效电路的模型，如果$g_m = 4\ m\mho$，计算 v_{out}。

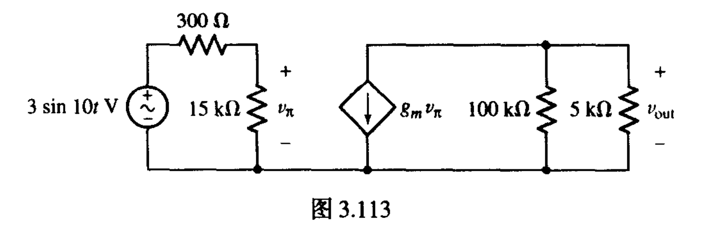


图3.113

84. 图3.114所示电路通常用来作为双极型晶体管放大器交流特性等效电路的模型，如果$g_m = 38\ m\mho$，计算 v_{out}。

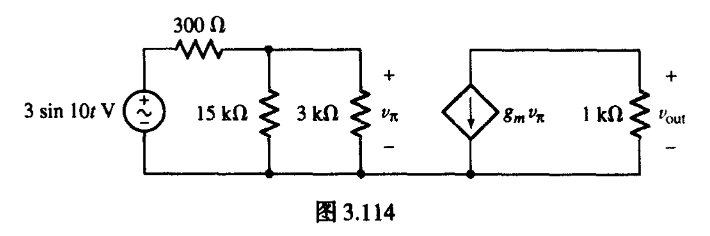


图3.114

第4章　基本节点和网孔分析

主要概念

- 节点分析
- 超节点技术
- 网孔分析
- 超网孔技术
- 节点分析和网孔分析的比较
- 计算机辅助分析，包括PSpice和MATLAB

引言

有了欧姆定律和基尔霍夫定律，就可以通过分析线性电路来得到有用的信息，如元件的电流、电压或功率。但是此时要分析的每个电路似乎都不同，因此就需要某种程度的创造性。本章将介绍两种基本的电路分析方法：节点分析和网孔分析，利用这两种方法可以系统且统一地分析不同的电路。其结果是流水线型的分析，对同样复杂度的方程，产生的错误更少，最重要的是：不会出现“我不知道该怎么开始”的问题。

到目前为止，我们遇到的大多数电路都非常简单，（坦率地说）它们是否实用还有待探讨，但是这些电路对于学习基本技术非常有用。虽然本章中出现的复杂电路可以表示各种电气系统，如控制电路、通信系统、电动机、集成电路以及非电子系统的电路模型，但是我们认为现在来处理这些特定的电路还为时太早。我们首先要讨论的是解题的方法学并将其贯穿于整本书中。

4.1　节点分析

下面介绍一种通用的电路分析方法，这是一种基于KCL的有效的方法，称为节点分析法。第3章讨论了只包含两个节点的简单电路的分析，从中可以知道，分析的主要步骤是得到含有一个未知变量的方程，该未知量是该节点对两端的电压。

现在令节点数增加，并且每增加一个节点就相应地增加一个未知量以及一个方程，因此，3个节点的电路需要有两个未知电压和两个方程；10个节点的电路将有9个电压未知量和9个方程；一个N节点的电路需要$N-1$个电压和$N-1$个方程。每个方程都是一个简单的KCL方程。

现在介绍节点分析的基本技巧。考虑如图4.1(a)所示的三节点电路并重画成图4.1(b)的形式，目的是为了强调该电路只有3个节点并分别用数字标注。我们的目标是求每个元件两端的电压。下一步分析非常重要：指定某个节点为参考节点，该节点是$N-1=2$个节点电压的负端，如图4.1(c)所示。

如果定义具有最大连接支路数的节点为参考节点，那么得到的方程相对来说比较简单。如果电路中包含接地节点，通常将该接地节点选择为参考节点，但是很多人喜欢将电路最下端的节点作为参考节点，特别是当电路中没有明确给出接地点的时候。

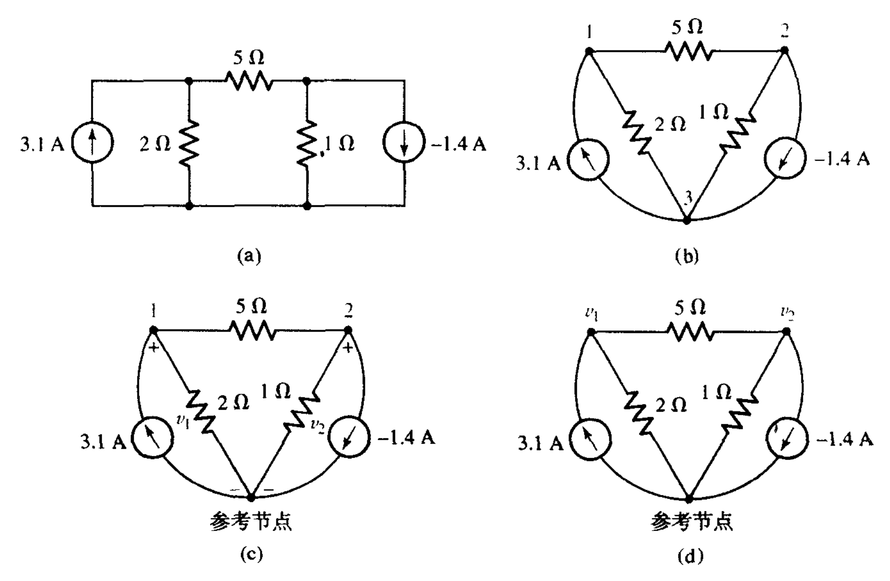


图4.1 (a) 三节点电路；(b) 重画电路以强调节点；(c) 选择参考节点及指定电压；(d) 简化电压标注，如果需要，可以将参考点替换为“地”符号

节点1相对于参考节点的电压定义为v_1，v_2定义为节点2相对于参考节点的电压。有这两个电压已经足够了，因为任何两个节点之间的电压都可以通过这两个电压来表示。例如，节点1相对于节点2的电压为$v_1 - v_2$。电压v_1和v_2以及它们的参考符号如图4.1(c)所示。为了清晰起见，一旦标注了参考节点，通常会省略电压的参考符号，标有电压的节点被认为是正端[见图4.1(d)]，这可以理解为是一种简化的电压标注。

说明： 在原理图中，参考节点定义为0 V。但是必须记住任何端子都可以作为参考端。因此，参考节点是相对于其他定义的节点电压为0 V，而不是相对于大地为0 V。

现在对节点1和节点2应用KCL，即通过电阻流出节点的总电流等于流入节点的总电源电流，即

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \qquad [1]$$

或

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3.1 \qquad [2]$$

对节点2可以得到

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \qquad [3]$$

或

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \qquad [4]$$

式[2]和式[4]是必需的两个方程，包含两个未知量，可以很容易求解。结果为$v_1 = 5$ V，$v_2 = 2$ V。

从该结果可以直接确定5 Ω电阻两端的电压为$v_{5\,\Omega} = v_1 - v_2 = 3$ V。同样可以计算得到电流以及吸收的功率。

注意，对于节点分析可以有多种方式写出KCL方程。比如，读者可以对所有流入指定节点的电流求代数和并令其为零。因此对于节点1可以写出

$$3.1-\frac{v_1}{2}-\frac{v_1-v_2}{5}=0$$

或

$$3.1+\frac{-v_1}{2}+\frac{v_2-v_1}{5}=0$$

这两个方程都与式[1]等效。这两个方程哪一个更好呢？每个教师或学生都有自己的喜好，最重要的是要方便。作者喜欢通过下列方式构建 KCL 方程：等式一边是所有的电源电流，另一边是所有的电阻电流。具体而言：

$\sum$ 从所有电流源流入节点的电流 = $\sum$ 通过所有电阻流出节点的电流

这种方法有几个优点。首先，永远不会产生这样的混淆——究竟是“$v_1 - v_2$”还是“$v_2 - v_1$”呢？每个电阻电流表达式中的第一个电压对应于所写的KCL方程对应的节点电压，见式[1]和式[3]。第二，可以快速检查是否遗漏了某些项。简单数一下连接到该节点的电流源数以及电阻数，对它们进行分组可以使比较变得更简单。

例题 4.1 电路如图 4.2(a)所示，求图中从左到右流过 15 Ω 电阻的电流。

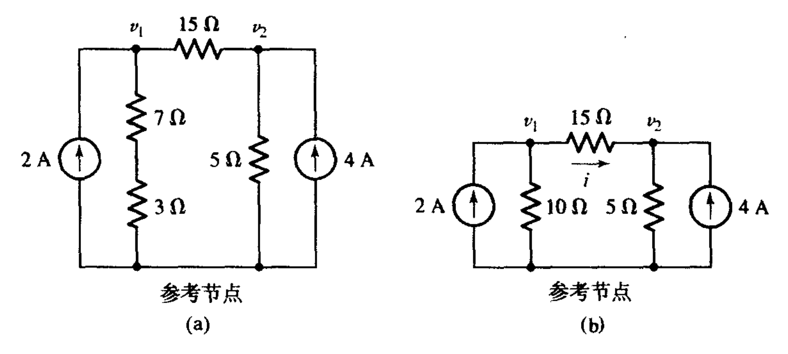


图 4.2 (a) 包含两个独立电流源的四节点电路；(b) 将两个串联电阻用一个 10 Ω 电阻替换，电路化简为三节点电路

解： 通过节点分析可以直接得到节点电压 v_1 和 v_2 的数值，并可以得到所求的电流为 $i=(v_1-v_2)/15$。在开始节点分析之前，首先可以看到我们并不对 7 Ω 或 3 Ω 电阻的细节感兴趣，因此可以用一个 10 Ω 电阻替换这两个串联电阻，如图 4.2(b)所示。这样可以使方程数减少。

写出节点 1 的 KCL 方程：

$$2=\frac{v_1}{10}+\frac{v_1-v_2}{15} \qquad [5]$$

写出节点 2 的 KCL 方程：

$$4=\frac{v_2}{5}+\frac{v_2-v_1}{15} \qquad [6]$$

重新排列，可得

$$5v_1-2v_2=60$$

和

$$-v_1+4v_2=60$$

求解可得 $v_1=20$ V，$v_2=20$ V，因此，$v_1-v_2=0$。换句话说，该电路中 15 Ω 电阻上没有电流流过。

练习

4.1　对于图 4.3 所示的电路，求节点电压 v_1 和 v_2。

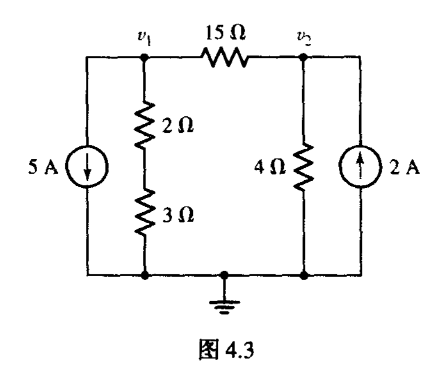


图 4.3

答案：$v_1 = -145/8$ V，$v_2 = 5/2$ V。

现在增加节点数并利用上述方法来分析更复杂的问题。

例题 4.2　求图 4.4(a)所示电路中的节点电压。

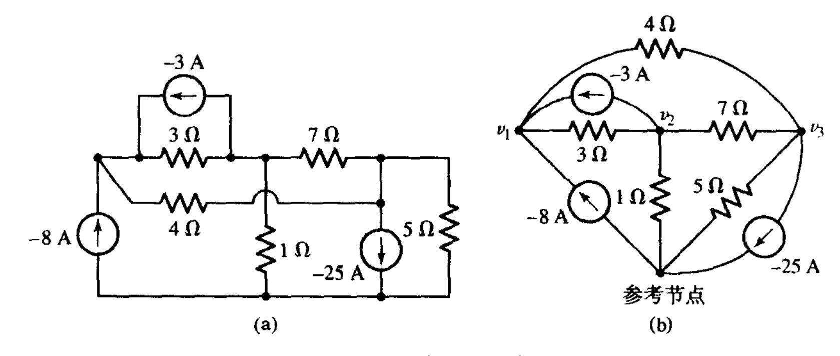


图 4.4　(a) 四节点电路；(b) 重画电路，选择参考节点并对电压进行标注

解：**▶ 明确题目的要求**

该电路中有 4 个节点。选择最下面的节点作为参考节点，并对其他 3 个节点进行如图 4.4(b)所示的标注。为了方便起见，重画电路。

▶ 收集已知信息

有 3 个未知量 v_1, v_2 和 v_3。已知所有的电流源和电阻值并已在图中注明。

▶ 方案设计

该例题非常适合用节点分析方法来进行分析，因为可以通过电流源和流过每个电阻的电流写出 3 个独立的 KCL 方程。

▶ 建立一组合适的方程

对节点 1 写出 KCL 方程：

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

或

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \qquad [7]$$

写出节点2的方程：

$$-(-3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

或

$$-0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \qquad [8]$$

对于节点3：

$$-(-25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

或者简化为

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \qquad [9]$$

▶ **确定是否还需要其他信息**

现在我们已得到3个方程，其中包含3个未知量。只要它们互相独立，就可以求解得到3个电压。

▶ **尝试求解**

通过逐次消元法、矩阵法或者利用格拉姆（Cramer）法则和行列式运算可以求解式[7]和式[9]。采用后者（见附录2）可得

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412\ \text{V}$$

同样可以求得

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736\ \text{V}$$

以及

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32\ \text{V}$$

▶ **验证结果是否合理或是否与预计相符**

验证结果的一种方法是利用其他方法来求解这3个方程。除此以外，确定这些电压是不是合理也是验证结果的一种方法。在该电路的任何地方电流都不可能大于3 + 8 + 25 = 36 A。最大电阻为7 Ω，因此不可能有大于7 × 36 = 252 V的电压。

有很多方法可以用来求解线性方程，在附录2中详细介绍了其中的几种。在科学计算法出现之前，例题4.2中采用的格拉姆法则在电路分析中很常用，尽管有时很烦琐。但是它可以直接在一个简单的四功能计算器中使用，因此这种方法很有价值。另外，MATLAB是一个功能强大的软件包，可以大大简化求解过程，附录6中给出了一个简单教程。

在MATLAB中有几种不同的方法可以处理例题4.2中遇到的问题。第一，可以把式[7]~式[9]表示成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

因此，

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

在MATLAB中，可以写成

```
>> a = [ 0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429; -0.25 -0.1429 0.5929] ;
>> c = [ -11; 3; 25] ;
>> b = a^-1 * c
b =
  5.4124
  7.7375
  46.3127
>>
```

其中，空格用来对行元素进行分隔，而分号用来对列元素进行分隔。矩阵**b**也称为矢量，因为它只有一列元素，并且它就是我们所要求的结果。因此 $v_1 = 5.412$ V，$v_2 = 7.738$ V，$v_3 = 46.31$ V。(四舍五入。)

如果采用MATLAB的符号处理器，也可以首先写出KCL方程。

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2)/ 3 + (v1 - v3)/ 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1)/ 3 + v2/ 1 + (v2 - v3)/ 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3/ 5 + (v3 - v2)/ 7 + (v3 - v1)/ 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1

ans =

720/133

>> answer.v2

ans =

147/19

>> answer.v3

ans =

880/19

>>
```

从这个程序可以得到精确的结果。调用solve( )函数时，必须列出符号方程eqn1, eqn2以及eqn3，但是变量 v_1, v_2 和 v_3 必须明确指定。如果在调用solve( )时变量数比方程数少，那么运算会返回一个代数结果。这里需要对解的形式进行说明，它以一种编程上称为结构的方式返回结果，在本例题中该结构称为“answer”。该结构中的每个元素可以用所示的名字分别被访问。

练习

4.2 电路如图 4.5 所示，计算每个电流源两端的电压。

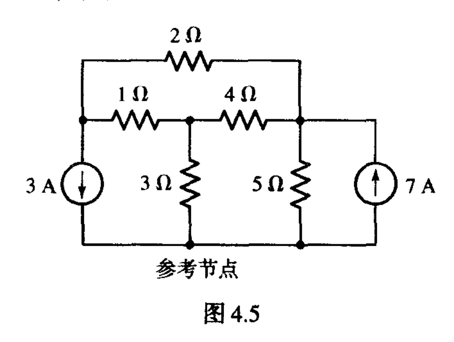


图 4.5

答案：$v_{3A} = 5.235$ V；$v_{7A} = 11.47$ V。

前面的例题已经说明了节点分析的基本方法，但当电路包含受控源时会发生什么情况并且该如何考虑呢？

例题 4.3 求图 4.6(a)所示电路中受控电流源所提供的功率。

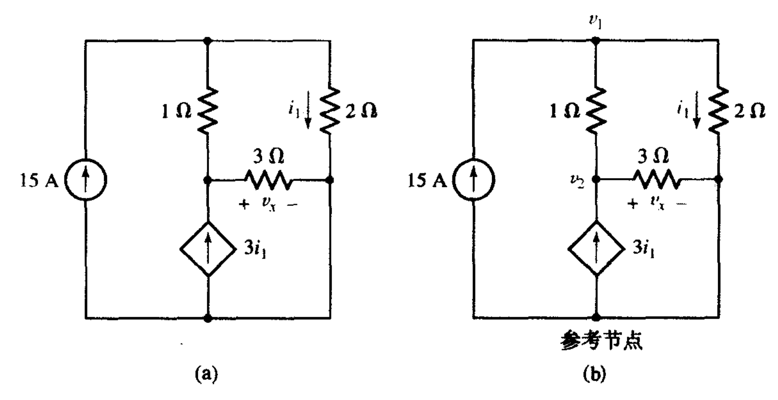


图 4.6 (a) 包含一个受控电流源的四节点电路；(b) 对电路进行标注，便于节点分析

解：选择最下面的节点作为参考节点，因为它具有最大的支路连接数，对节点电压进行如图 4.6(b)所示的标注。实际上 $v_x = v_2$。

对于节点 1 写出

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [10]$$

对于节点 2 写出

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [11]$$

遗憾的是，这里只有两个方程，但却包含3个未知量。这是由于电路中存在受控电流源的缘故，因为它受到节点电压的控制。因此必须再得到一个能够给出 i_1 和一个或几个节点电压关系的方程。

在本例中可以看到

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \qquad [12]$$

将式[12]代入式[11]可得

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \qquad [13]$$

将式[10]简化成

$$-15v_1 + 8v_2 = 0 \qquad [14]$$

求解得到 $v_1 = -40$ V，$v_2 = -75$ V, $i_1 = 0.5v_1 = -20$ A，因此受控源提供的功率为$(3i_1)(v_2) = (-60)(-75) = 4.5$ kW。

从上面的例题可以看到，由于受控源的存在，当控制变量不是一个节点电压时，在分析过程中需要再建立一个额外的方程。现在来考虑同一个电路，但受控电流源的控制变量为3 Ω电阻两端的电压，该电压其实是一个节点电压。可以发现，此时只需要两个方程就可以完成分析。

例题 4.4　求图4.7(a)所示电路中受控电流源提供的功率。

解： 选择底部节点为参考节点，并对电路进行如图4.7(b)所示的标注。为清晰起见，明确将节点电压标注为 v_x，但这不是必需的。注意，本例题中参考节点的选择很重要，因为这种选择可以使 v_x 是一个节点电压。

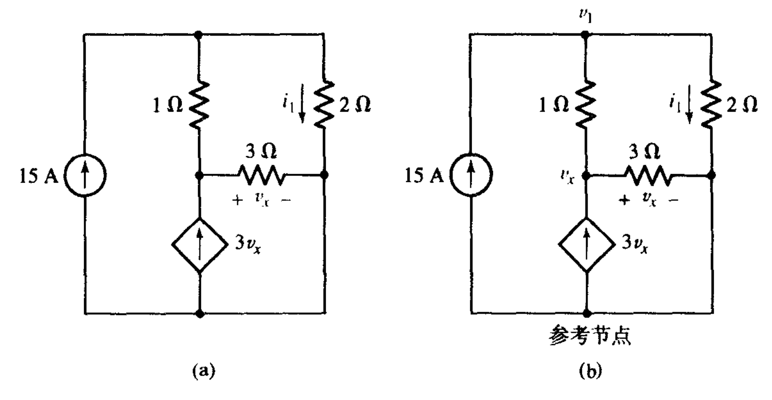


图4.7　(a) 包含一个受控电流源的四节点电路；(b) 对电路进行标注，便于节点分析

对节点1写出KCL方程：

$$15 = \frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1}{2} \qquad [15]$$

写出节点 x 的方程：

$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \qquad [16]$$

合并各项并求解，得到 $v_1 = 50/7$ V，$v_x = -30/7$ V。因此，该电路中的受控源产生的功率为$(3v_x)(v_x) = 55.1$ W。

练习

4.3　对于图4.8所示电路，如果 A 等于：(a) $2i_1$；(b) $2v_1$ 时，求节点电压 v_1。

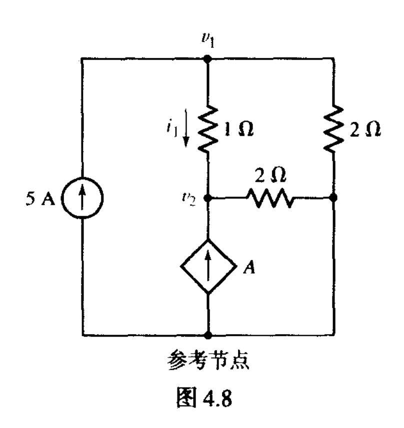


图 4.8

答案：(a) 70/9 V; (b) −10 V。

基本节点分析过程的总结

1. 计算节点数（N）。
2. 指定参考节点。通过选择具有最大支路连接数的节点作为参考节点可以使方程数最少。
3. 对节点电压进行标注（$N-1$）个。
4. 对每个非参考节点列出 KCL 方程。方程的一边为从电源流流进节点的电流之和，方程的另一边为通过电阻流出节点的电流之和。注意符号“−”。
5. 用合适的节点电压表示除节点电压以外的电流和电压等未知量。这种情况一般出现在电路包含电压源或受控源的时候。
6. 组织方程。根据节点电压合并方程中各项。
7. 求解方程得到节点电压（$N-1$）个。

这7个基本步骤对我们遇到的任何电路都适用，但如果存在电压源则需要格外小心。这种情况将在 4.2 节中讨论。

4.2 超节点

接下来讨论电压源对节点分析的影响。

作为一个典型的例子，考虑图 4.9(a)所示的电路。将图 4.4 所示的原始四节点电路中节点 2 和节点 3 之间的 7 Ω 电阻用 22 V 的电压源替换。指定同样的相对于参考节点的节点电压 v_1、v_2 和 v_3。按照前面的做法，下一步是对每个非参考节点应用KCL。如果我们采用同样的方法，则可以发现对于节点2和节点3会有一些困难，原因是不知道电压源所在支路的电流，并且没有办法将电流表示成电压的函数，因为电压源的定义告诉我们电压与电流无关。

有两种方法可以解决这个问题。一种比较困难的方法是为包含电压源的支路分配一个未知的电流，然后应用 3 次 KCL 定律，之后对节点 2 和节点 3 之间应用 KVL（$v_3 - v_2 = 22$），结果将得到 4 个方程且包含 4 个未知量。

比较简单的方法是把节点2、节点3以及电压源作为一个超节点，并且同时对这两个节点应用KCL。超节点在图4.9(a)所示的电路中由虚线包围的区域表示，这是因为如果流出节点2的总电流为零、流出节点3的总电流为零，那么流出这两个节点组合的总电流也为零，这个概念可以用图4.9(b)所示的局部放大的视图来表示。

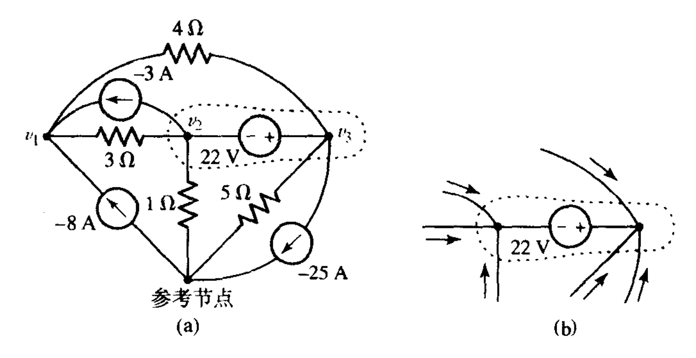


图 4.9　(a) 例题 4.2 的电路，用 22 V 的电压源替换 7 Ω 的电阻；(b) 对超节点定义的区域进行放大；由 KCL 得到流入该区域的所有电流之和为零，否则电子会堆积或消耗

例题 4.5　求图 4.9(a)所示电路中未知节点电压 v_1 的值。

解：节点 1 的 KCL 方程与例题 4.2 相同：

$$-8-3=\frac{v_1-v_2}{3}+\frac{v_1-v_3}{4}$$

或者

$$0.5833v_1-0.3333v_2-0.2500v_3=-11 \tag{17}$$

接下来考虑由节点 2 和节点 3 组成的超节点。超节点连接两个电流源和 4 个电阻，因此，

$$3+25=\frac{v_2-v_1}{3}+\frac{v_3-v_1}{4}+\frac{v_3}{5}+\frac{v_2}{1}$$

或者

$$-0.5833v_1+1.3333v_2+0.45v_3=28 \tag{18}$$

因为有 3 个未知量，所以需要一个额外的方程，它必须利用节点 2 和节点 3 之间的 22 V 电压源这个事实：

$$v_2-v_3=-22 \tag{19}$$

求解式[17]~ 式[19]得到 v_1 为 1.071 V。

练习

4.4　对于图 4.10 所示的电路，计算每个电流源两端的电压。

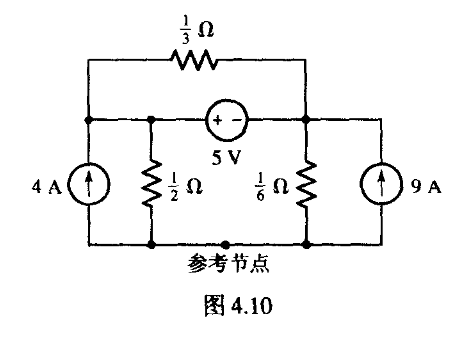


图 4.10

答案：5.375 V，375 mV。

可见，电压源的存在使得非参考节点的数目减少了一个（必须在该节点应用KCL来得到一个方程），不管电压源是连接在两个非参考节点之间还是连接在一个非参考节点与参考节点之间。当分析练习4.4这样的电路时也应该小心，因为电阻的两端为超节点的一部分，所以实际上在KCL方程中必须要有两个与之相应的电流项，但是它们相互抵消了。对于任何电路，用这种方法得到节点方程组的过程可以总结如下。

超节点分析过程的总结

1. 计算节点数（N）。
2. 指定参考节点。通过选择具有最大支路连接数的节点作为参考节点可以使节点方程中的项数最少。
3. 标注节点电压（有 $N-1$ 个）。
4. 如果电路包含电压源，则可将每个电压源组成一个超节点。通过用闭合虚线将电压源、电压源的两端以及连接在这两端之间的其他元件包围起来可形成一个超节点。
5. 对每个非参考节点以及每个不包含参考节点的超节点列出KCL方程。方程的一边为从电流源流入节点或超节点的电流之和，另一边为通过电阻流出节点或超节点的电流之和。注意符号“–”。
6. 建立每个电压源两端的电压与节点电压之间的关系。可以通过KVL完成，每个超节点需要一个这样的方程。
7. 用合适的节点电压表示任何未知量（即除了节点电压以外的电流或电压）。当电路中包含受控源时会出现这种情况。
8. 组织方程。根据节点电压合并方程中各项。
9. 求解方程得到每个节点电压（有 $N-1$ 个）。

可以看出，超节点分析过程比一般的节点分析过程增加了两个步骤。但是实际上对一个包含电压源的电路，当该电压源不连接到参考节点时，应用超节点技术可以减少所需要的KCL方程数。下面考虑图4.11所示的电路，它包含所有的4种电源以及5个节点。

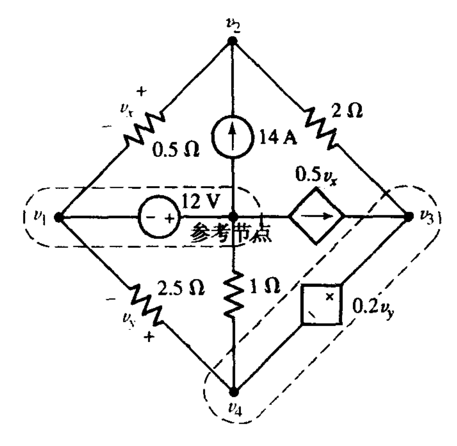


图4.11 包含4种不同类型电源的五节点电路

例题4.6 确定图4.11所示电路中各节点相对参考节点的电压。

解： 将每个电压源定义为一个超节点后可以看出只需要写出节点2和包含受控电压源的超节点的KCL方程。通过观察可以得到 $v_1 = -12$ V。

对于节点 2：

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \qquad [20]$$

而对于超节点 3~4：

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \qquad [21]$$

接下来建立电源电压与节点电压之间的关系如下：

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \qquad [22]$$

以及

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \qquad [23]$$

最后，用指定的变量表示受控电流源：

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \qquad [24]$$

在一般节点分析中，5 个节点需要 4 个 KCL 方程，但是通过超节点技术只需要两个方程，因为组成两个独立的超节点。每个超节点需要一个 KVL 方程（式[22]以及 $v_1 = -12$ V，后者通过观察写出）。两个受控电源都不受节点电压的控制，因此需要两个额外方程。

通过上述分析，现在可以消除 v_x 和 v_y 了，我们得到 4 个方程且包含 4 个节点电压：

$$\begin{aligned}
-2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 \qquad\qquad &= 14 \\
0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= 0 \\
v_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= -12 \\
0.2v_1 \qquad + v_3 - 1.2v_4 &= 0
\end{aligned}$$

求解得到 $v_1 = -12$ V, $v_2 = -4$ V，$v_3 = 0$ V, $v_4 = -2$ V。

练习

4.5　求图 4.12 所示电路中的节点电压。

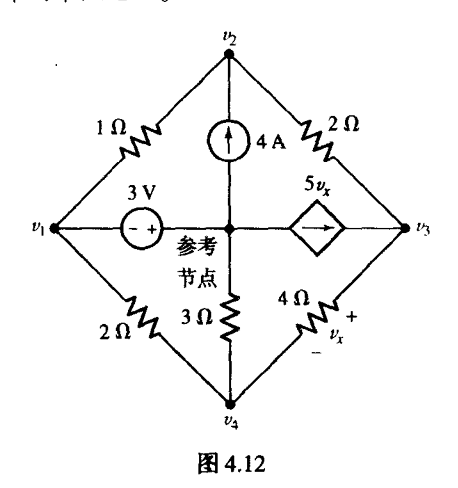


图 4.12

答案：$v_1 = 3$ V, $v_2 = 5.09$ V, $v_3 = 1.28$ V, $v_4 = 1.68$ V。

4.3 网孔分析

上一节中描述的节点分析技术是一种通用的方法，它可以用于任何电气网络。另一种方法称为网孔分析，该方法有时更易于应用到某些特定的电路。尽管这种方法不对所有网络都适用，但它可以应用于许多网络。网孔分析只能用于平面网络，我们很快会给出该术语的定义。

如果一个电路图能够在一个平面上画出，并且任何支路既不从上面跨过也不从下面穿过任何一条其他支路，那么这个电路就称为平面网络。因此，图4.13(a)所示就是一个平面网络，图4.13(b)所示是一个非平面网络，图4.13(c)所示也是一个平面网络，尽管它乍一看像是一个非平面网络。

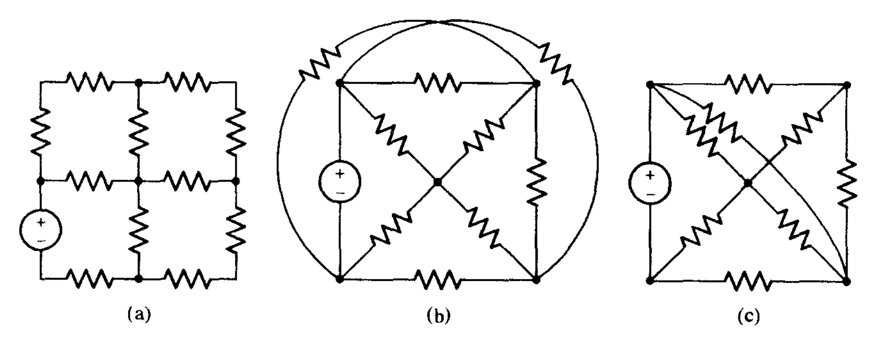


图4.13 平面网络和非平面网络的例子，没有实点的交叉线不存在物理连接

3.1节中定义了路径、闭合路径以及回路的概念。在定义网孔之前，首先考虑图4.14所示图形中粗线表示的支路集。第一组支路不是一条路径，因为4条支路都连接到中心节点，显然也不是一条回路。第二组支路不能组成路径，因为要遍历它必须两次经过中心节点。其他4组路径都是回路，电路包含11条支路。

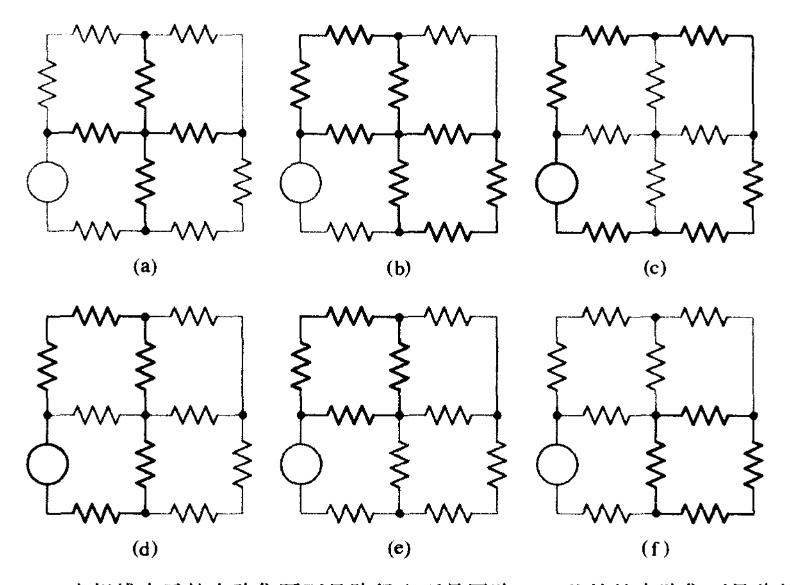


图4.14 (a) 由粗线表示的支路集既不是路径也不是回路；(b) 此处的支路集不是路径，因为一次遍历需要两次经过中心节点；(c) 该路径是回路但不是网孔，因为它包围了其他回路；(d)该路径是一个回路但不是网孔；(e, f) 这两条路径都是回路，也都是网孔

说明： 应该注意网孔分析不能应用于非平面电路，因为它不可能对这种电路定义唯一的网孔集，因此不可能得到唯一的网孔电流。

网孔是平面电路的特点，对于非平面电路则没有网孔的概念。在一个电路中，网孔定义为不包含任何其他回路的回路，因此，图4.14(c)和图4.14(d)所示的是回路，但不是网孔，而图4.14(e)和图4.14(f)所示的是网孔。如果一个电路可以画成整洁的平面形式，那么它通常看起来像一个具有多格子的窗口，在窗口中每个格子的边界都可以看成一个网孔。

如果一个网络是平面网络，则可以利用网孔分析法来完成分析。该方法涉及网孔电流的概念，我们通过图4.15(a)所示的二网孔电路的分析来介绍网孔电流的概念。

与单回路电路分析一样，首先定义流过某条支路的电流。假设向右流过6 Ω电阻的电流为i_1。对两个网孔分别应用KVL定律可以列出两个方程，并可以求得两个未知的电流。接着定义向右流过4 Ω电阻的电流为第二个电流i_2，也可以选择向下流过中央支路的电流为i_3，但显然由KCL定律可知i_3可以用前面两个假设的电流表示为$(i_1 - i_2)$。假设的电流如图4.15(b)所示。

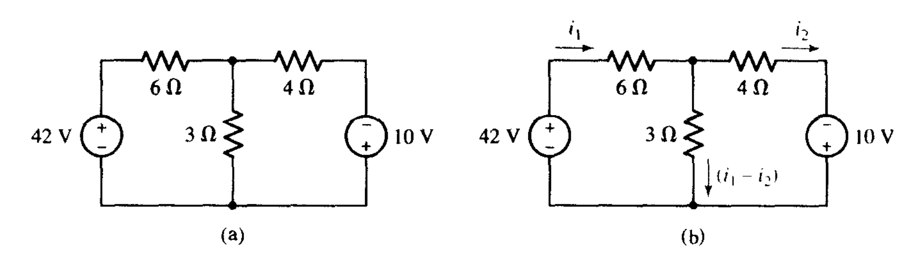


图4.15　(a, b) 一个需要求电流的简单电路

按照单回路电路的求解方法，现在对左边的网孔应用KVL定律，可得

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

或者为

$$9i_1 - 3i_2 = 42 \qquad [25]$$

对右边网孔应用KVL定律，可得

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

或者为

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \qquad [26]$$

式[25]和式[26]为独立方程，其中一个不能由另一个推导得到。由于现在有两个方程以及两个未知量，因此很容易得到

$$i_1 = 6\text{ A} \qquad i_2 = 4\text{ A} \qquad 和 \qquad (i_1 - i_2) = 2\text{ A}$$

如果电路包含M个网孔，那么我们就有M个网孔电流，因此需要写出M个独立的方程。

现在利用网孔电流以一种不同的方式来考虑相同的问题。我们把网孔电流定义为只在网孔周边上流动的电流。这样定义网孔电流的最大好处之一是可以自动满足基尔霍夫电流定律。如果一个网孔电流流入某个节点，那么它必定也流出该节点。

如果我们把左边网孔标为网孔1，那么可以建立在该网孔中顺时针流动的网孔电流i_1。网孔电流用几乎封闭的弯箭头表示，并在相应的网孔中画出，如图4.16所示。对另一个网孔建立网孔电流

i_2，同样为顺时针方向。尽管方向选择为任意，但是我们总是选择顺时针方向的网孔电流，因为由此得出的方程具有一定的对称性，并且产生的错误一定是最少的。

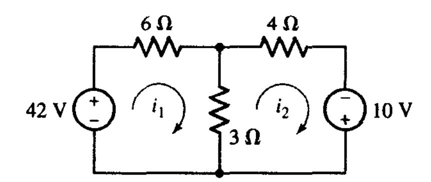


图4.16 与图4.15(b)所示电路相同，略有一点改变

说明： 网孔电流往往等同于某个支路电流，如本例所示的 i_1 和 i_2，但并不总是这样。例如考虑一个方形的9网孔网络，可以发现，中间的网孔电流与任何支路中的电流都不同。

我们不再把电流或电流方向直接标注在电路的每条支路上。流过任何支路的电流由该支路所在的各网孔的网孔电流确定。做到这一点并不难，因为任何支路都不会出现在两个以上的网孔中。例如，3 Ω 电阻出现在两个网孔中，向下流过该电阻的电流为 $i_1 - i_2$。6 Ω 电阻只存在于网孔1中，并且向右流过该支路的电流等于网孔电流 i_1。

对于左边的网孔：

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

而对于右边的网孔：

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

这两个公式与式[25]和式[26]等效。

例题 4.7 求图4.17(a)所示电路中2 V电源所提供的功率。

解： 首先定义如图4.17(b)所示的两个顺时针网孔电流。

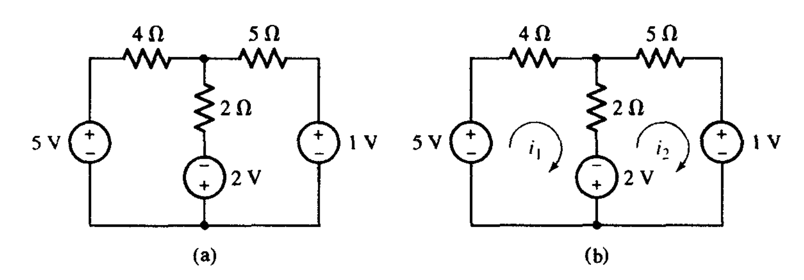


图4.17 (a) 包含3个电源的二网孔电路；(b) 为网孔分析进行的电路标注

从网孔1的左下角节点开始，按顺时针方向沿支路写出下列KVL方程：

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

同样写出网孔2的方程为：

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

整理并合并同类项，可得

$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

以及

$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

求解可得 $i_1 = 43/38 = 1.132$ A，$i_2 = -2/19 = -0.1053$ A。

流出 2 V 电源正参考极性端的电流为 $i_1 - i_2$，因此 2 V 电源提供的功率为(2)(1.237) = 2.474 W。

练习

4.6　求图 4.18 所示电路中的电流 i_1 和 i_2。

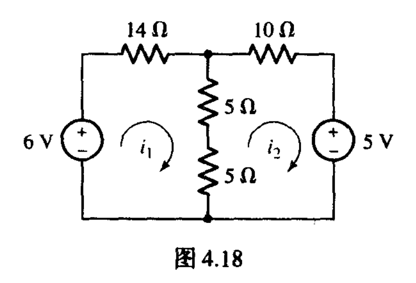


图 4.18

答案：$i_1 = 184.2$ mA；$i_2 = -157.9$ mA。

下面考虑一个具有 5 个节点、7 条支路及 3 个网孔的电路，如图 4.19 所示。由于多了一个网孔，该电路有些复杂。

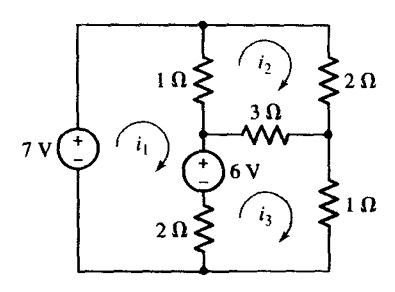


图 4.19　具有 5 个节点、7 条支路及 3 个网孔的电路

例题 4.8　采用网孔分析法求解图 4.19 所示电路中的 3 个网孔电流。

解：所要求解的 3 个网孔电流如图 4.19 所示，对每个网孔应用 KVL 定律，可得

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$
$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$
$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

简化为

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$
$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

求解可得：$i_1 = 3$ A，$i_2 = 2$ A，$i_3 = 3$ A。

练习

4.7　求图 4.20 所示电路中的 i_1 和 i_2。

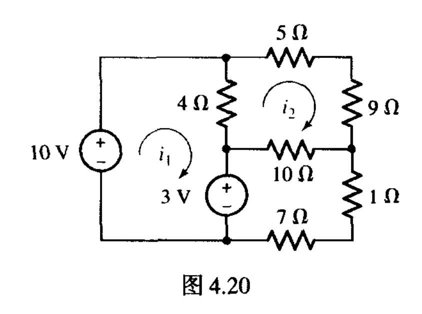


图 4.20

答案：2.220 A，470.0 mA。

前面例题中的电路完全由独立电压源提供功率。如果电路中包含电流源，那么分析可能会变得简单，也可能会变得复杂，我们将在4.4节讨论这种情况。正如在介绍节点分析法时讲到的，受控源的存在往往需要建立除 M 个网孔方程以外的一个新的方程，除非控制变量是一个网孔电流（或是几个网孔电流的和）。我们将在下面的例题中讨论这种情况。

例题 4.9 求图 4.21(a)所示电路中的电流 i_1。

解：电流 i_1 实际上是网孔电流，因此可以把右边的网孔电流标为 i_1，并且定义顺时针电流 i_2 为左边网孔的电流，如图 4.21(b)所示。

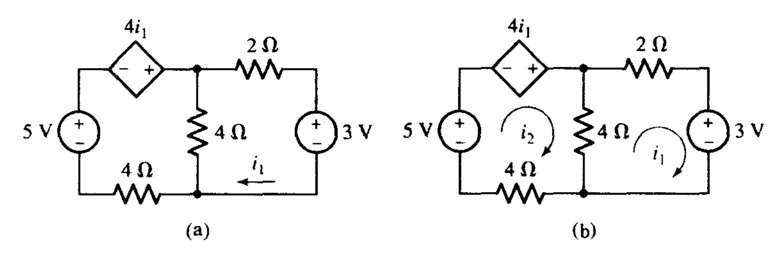


图 4.21 (a) 包含受控源的二网孔电路；(b) 为网孔分析而进行的电路标注

对于左边的网孔，建立 KVL 方程如下：

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \tag{27}$$

对于右边的网孔，可以得到

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \tag{28}$$

合并各项，可得

$$-8i_1 + 8i_2 = 5$$

以及

$$6i_1 - 4i_2 = -3$$

求解可得 $i_2 = 375$ mA，$i_1 = -250$ mA。

因为图 4.21 中的受控源由网孔电流 i_1 控制，因此只需要两个方程，利用式[27]和式[28]可以分析该二网孔电路。在下面的例题中，我们将考虑控制变量不是网孔电流的情况。

例题 4.10 求图 4.22(a)所示电路中的电流 i_1。

解：为了与例题 4.9 进行比较，使用与例题 4.9 相同的网孔电流定义，如图 4.22(b)所示。

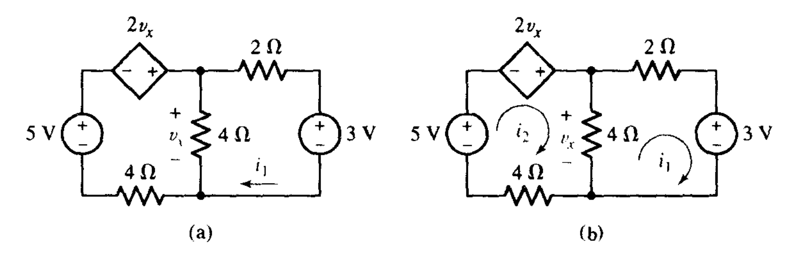


图 4.22　(a) 包含电压控制受控源的电路；(b) 为网孔分析而进行的电路标注

对于左边网孔，列出 KVL 方程为

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \tag{29}$$

对于右边网孔可以得到与前面相同的方程：

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \tag{30}$$

因为受控源由未知电压 v_x 控制，因此面临两个方程、3 个未知量的问题。解决问题的方法是建立用网孔电流表示的 v_x 的方程，即

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \tag{31}$$

将式[31]代入式[29]，简化方程组可以得到

$$4i_1 = 5$$

求解可得 $i_1 = 1.25$ A。在这个具体例子中，除非需要求解 i_2，否则可以不采用式[30]。

练习

4.8　求解图 4.23 所示电路中的 i_1，如果控制变量 A 为：(a) $2i_2$；(b) $2v_x$。

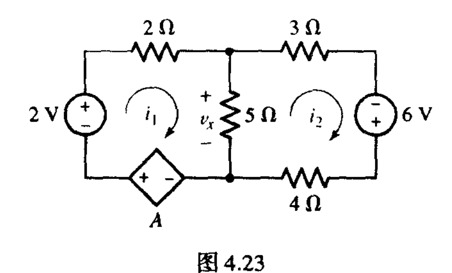


图 4.23

答案：(a) 1.35 A；(b) 546 mA。

网孔分析过程可以总结为以下 7 个步骤。它可以应用于我们遇到的任何平面电路，但电流源的存在需要予以额外注意。这种情况将在 4.4 节中讨论。

网孔分析基本过程的总结

1. 确定电路是否为平面电路。如果不是，采用节点分析。
2. 计算网孔数（M）。如果必要，重画电路。
3. 对 M 个网孔电流进行标注。通常来说，以顺时针方向进行所有网孔电流的定义可以简化分析。

4. 列出每个网孔的KVL方程。从一个合适的节点出发沿网孔电流方向进行。密切注意符号“-”。如果电流源位于网孔周边，则不需要KVL方程，通过观察可直接得到网孔电流。
5. 用合适的网孔电流表示除网孔电流之外的未知电压或电流。这种情况只发生在电路包含电流源和受控源的时候。
6. 组织方程。根据网孔电流进行各项合并。
7. 求解方程组得到网孔电流（将会有 M 个方程）。

4.4 超网孔

当网络中包含电流源时，怎么修改这个分析过程呢？从节点分析得到的启示是：应该有两种可能的方法。第一种可以对电流源两端设定一个未知电压，然后同以前一样对每个网孔应用KVL，再建立电源电流和分配的网孔电流之间的关系。总体来说这种方法相对麻烦一些。

一种较好的方法是类似于节点分析中的超节点方法。这种方法将电压源完全包含在超节点中，从而对于每个电压源都会使非参考节点数减少1。现在创建一个超网孔，它由两个网孔组成，这两个网孔以电流源作为公共元件，因此该电流源就位于超网孔的内部。这样一来，每存在一个电流源都会使网孔数减少1。如果电流源位于电路的周边，那么电流源所在的网孔就可以忽略，因此只需对新得到的网络中的那些超网孔或网孔应用基尔霍夫电压定律即可。

例题 4.11 利用网孔分析法求解图4.24(a)所示电路中的3个网孔电流。

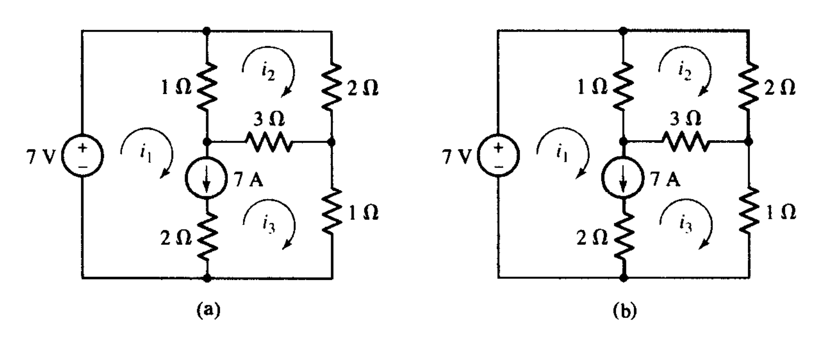


图4.24 (a) 包含一个独立电流源的三网孔电路；(b) 用细线定义了一个超网孔

解： 可以看到7 A的独立电流源位于两个网孔的公共边界上。我们已经定义了网孔电流 i_1, i_2 和 i_3。由于存在电流源，因此可创建一个超网孔，其中包含网孔1和网孔3，如图4.24(b)所示。对这个回路应用KVL，可得

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

或

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \qquad [32]$$

对于网孔2，可得

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

或

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [33]$$

最后，独立源电流与假定的网孔电流的关系为

$$i_1 - i_3 = 7 \qquad [34]$$

对式[32]~ 式[34]进行求解，可得 $i_1 = 9$ A, $i_2 = 2.5$ A, $i_3 = 2$ A。

练习

4.9　求图 4.25 所示电路中的电流 i_1。

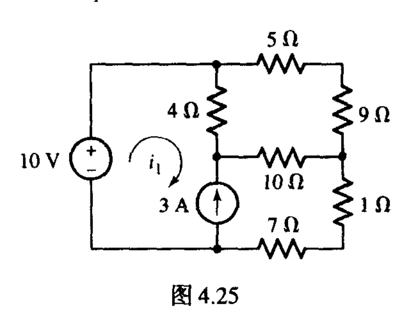


图 4.25

答案：−1.93 A。

如果存在一个或多个受控源，那么只需要用网孔电流来表示受控源变量以及受控源的控制变量。比如，在图4.26中，可以看到该网络同时包含受控电流源和独立电流源。下面来看这两个电源的存在会对电路分析产生怎样的影响以及如何简化。

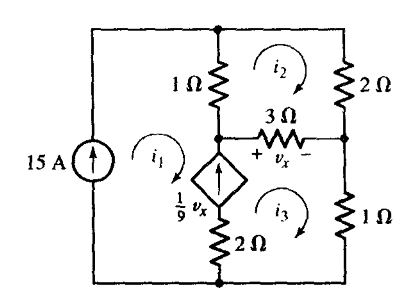


图 4.26　包含一个受控电流源和一个独立电流源的三网孔电路

例题 4.12　利用网孔分析计算图 4.26 所示电路中的 3 个未知电流。

解：这两个电流源位于网孔 1 和网孔 3 中。因为 15 A 的电源位于电路的周边，因此可以不需要考虑网孔 1，因为很明显 $i_1 = 15$ A。

因为已经知道其中一个网孔电流与受控电流源相关，因此不必写出网孔1和网孔3的超网孔方程。相反，只要利用 KCL 就可以简单写出 i_1 和 i_3 与受控源电流的关系为

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

可以将其写成更简洁的形式：

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad 或 \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \qquad [35]$$

现在的情况是：一个方程，两个未知量，因此需要做的是写出网孔 2 的 KVL 方程：

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

或

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \qquad [36]$$

求解式[35]和式[36]，可得 $i_2 = 11$ A, $i_3 = 17$ A；以及前面通过观察已得到 $i_1 = 15$ A。

练习

4.10 利用网孔分析求图 4.27 所示电路中的 v_3。

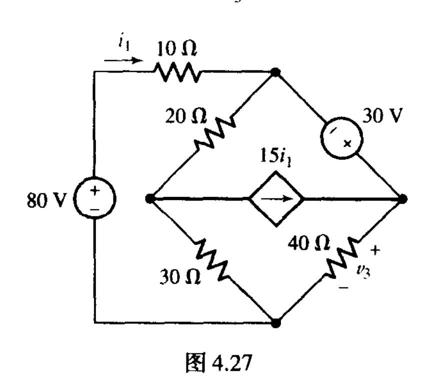


图 4.27

答案：104.2 V。

现在可以总结出获得网孔方程的一般方法，不管电路中是否存在受控源、电压源和/或电流源，只要电路可以画成平面电路即可。

超网孔分析过程的总结

1. 确定电路是否为平面电路。如果不是，采用节点分析。
2. 计算网孔数（M）。如果必要，重画电路。
3. 对M个网孔电流进行标注。通常来说，以顺时针方向进行所有网孔电流的定义可以简化分析。
4. 如果电路包含有两个网孔共享的电流源，则应用这两个网孔共同组成一个超网孔。用包围圈画出超网孔有助于列出 KVL 方程。
5. 列出每个网孔 / 超网孔的 KVL 方程。从一个合适的节点出发，沿网孔电流方向进行。密切注意符号"-"。如果电流源位于网孔周边，则不需要 KVL 方程，通过观察可直接得到网孔电流。
6. 写出每个电流源电流与网孔电流的关系方程。通过应用 KCL 即可，每定义一个超网孔就需要一个这样的方程。
7. 用合适的网孔电流表示除网孔电流以外的未知电压或电流。这种情况只发生在电路包含受控源的时候。
8. 组织方程。根据网孔电流进行各项合并。
9. 求解方程组得到网孔电流（将会有 M 个方程）。

4.5 节点分析和网孔分析的比较

现在已经介绍了两种明显不同的电路分析方法。读者显然会问：是否一种方法要优于另一种方法？当然，如果电路为非平面网络，毫无疑问，只能采用节点分析法。

但是如果考虑平面电路，那么确实存在这种情况，即其中的一种方法可能会比另一种方法要好一些。如果使用节点分析方法，那么具有 N 个节点的电路将至少需要 $N-1$ 个 KCL 方程。每个超节点将减少一个方程。如果同一个电路有 M 个不同的网孔，那么将至少得到 M 个 KVL 方程，每个超网孔将减少一个方程。基于这些事实，我们应该选择具有较少方程的分析方法。

如果电路中包含一个或多个受控源，那么每个控制变量都可能影响我们对节点分析和网孔分析的选择。例如，利用节点分析时，由节点电压控制的受控电压源就不需要额外的方程。同样，当利用网孔分析时，由网孔电流控制的受控电流源也不需要额外的方程。那么当包含由电流控制的受控电压源时会是什么情况呢？或者当包含由电压控制的受控电流源时又是什么情况呢？只要控制变量可以很容易地与网孔电流建立关系，那么网孔分析可能是比较简单的方法。同样，如果控制变量可以很容易地与节点电压建立关系，那么节点分析是较好的选择。最后一点是必须牢记的：电源的位置。如果电流源位于网孔的周边，那么不管是受控源还是独立源，用网孔分析会更简单；如果电压源连接到参考端，那么节点分析会更容易。

当两种方法得到的方程数量相同时，就要看求解的量了。节点分析直接得到节点电压，而网孔分析得到电流。例如，如果我们要求流过一组电阻的电流，若采用节点分析法，则在节点分析完成后，还必须对每个电阻利用欧姆定律求出电流。

举例来说，考虑图 4.28 所示的电路，求电流 i_x。

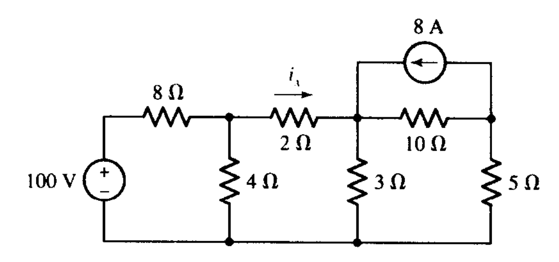


图 4.28　有 5 个节点和 4 个网孔的平面电路

选择最下面的节点为参考节点，这时有 4 个非参考节点。尽管这意味着可以写出 4 个不同的方程，但没有必要标出 100 V 电源和 8 Ω 电阻之间的节点，因为该节点电压显然为 100 V。因此，可将剩余节点电压记为 v_1，v_2 和 v_3，如图 4.29 所示。

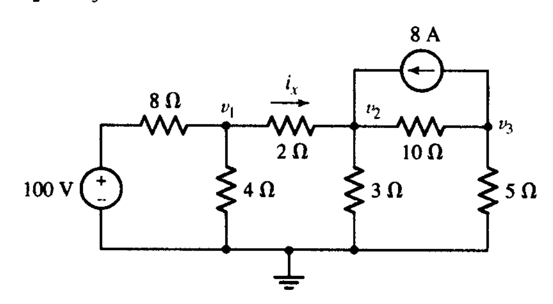


图 4.29　对图 4.28 所示电路进行节点电压标注后得到的电路。注意接地符号表明该端是参考端

写出下列 3 个方程：

$$\frac{v_1-100}{8}+\frac{v_1}{4}+\frac{v_1-v_2}{2}=0 \quad \text{或} \quad 0.875v_1-0.5v_2=12.5 \qquad [37]$$

$$\frac{v_2-v_1}{2}+\frac{v_2}{3}+\frac{v_2-v_3}{10}-8=0 \quad \text{或} \quad -0.5v_1-0.9333v_2-0.1v_3=8 \qquad [38]$$

$$\frac{v_3 - v_2}{10} + \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \qquad \text{或} \qquad -0.1v_2 \quad + 0.3v_3 = -8 \qquad [39]$$

求解可得 $v_1 = 25.89$ V，$v_2 = 20.31$ V。应用欧姆定律可得电流 i_x 为

$$i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79 \text{ A} \qquad [40]$$

接下来采用网孔分析法来求解。从图 4.30 可知有 4 个不同的网孔，但显然 $i_4 = -8$ A，因此只需写出 3 个不同的方程。

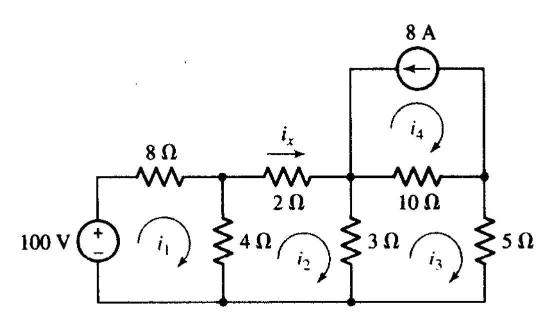


图 4.30 对图 4.28 所示电路进行网孔电流标注

写出网孔 1、网孔 2 和网孔 3 的 KVL 方程：

$$-100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \qquad \text{或} \quad 12i_1 - 4i_2 \qquad = 100 \qquad [41]$$

$$4(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{或} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0 \qquad [42]$$

$$3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{或} \qquad -3i_2 + 18i_3 = -80 \qquad [43]$$

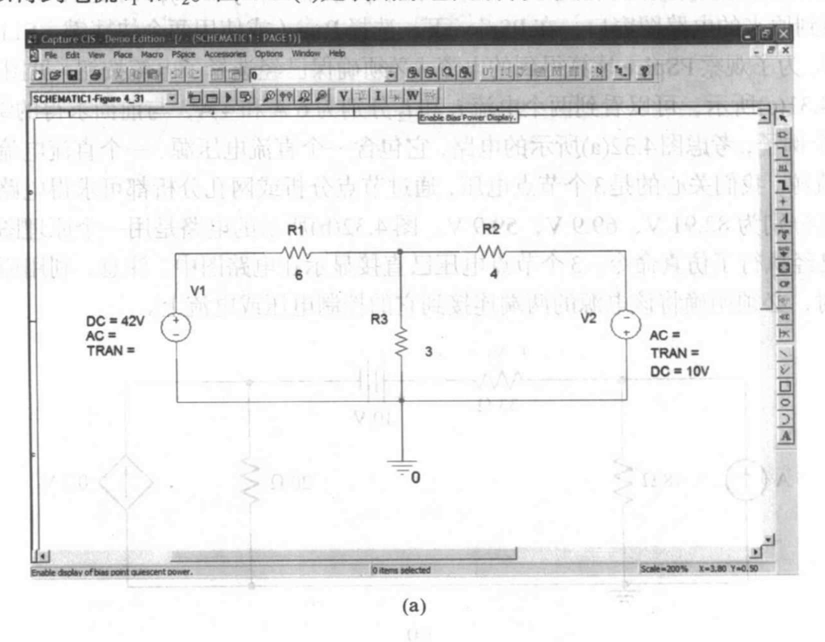
求解可得 $i_2(= i_x) = 2.79$ A。对本例来说，网孔分析更加简单。但是因为两种方法都有效，因此可以利用两种方法来求解同一个问题，从而可以验证结果。

4.6 计算机辅助电路分析

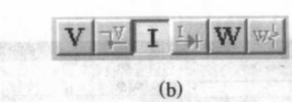
我们已经知道构建一个相对复杂的电路并不需要很多元件。当我们分析更加复杂的电路时，显然更容易犯错，并且手工验证非常耗时。通常采用PSpice软件包进行快速电路分析，PSpice是一种功能强大的计算机软件包，它将原理图绘制工具和印制电路板或者集成电路设计工具集成在一起。SPICE（Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis）最早是在 20 世纪 70 年代由加州大学伯克利分校开发出来的，现在已成为一个工业标准。1984 年，MicroSim 公司引入了 PSpice，它是以SPICE程序库为核心的一个直观的图形界面。根据实际电路应用类型的不同，不同的公司提供了几种基本的 SPICE 软件包。

尽管计算机辅助分析是确定电路中电压和电流的一种相对快速的方法，但是不应该用它完全代替传统的“纸笔”分析。原因如下：首先，先学会分析然后才能够进行设计，过多依赖软件工具将限制必要的分析技能的培养，这类似于过早在小学中引入计算器。其次，长时间使用这些复杂的软件包后，在输入数据时显然不可能不犯一些错误。如果对仿真可以给出什么样的结果缺乏基本的理解，那么要确定该仿真结果是否正确是不可能的，因此，“计算机辅助分析”这个名称本身就是一个恰当的描述。无论如何，人类的智慧是无穷的。

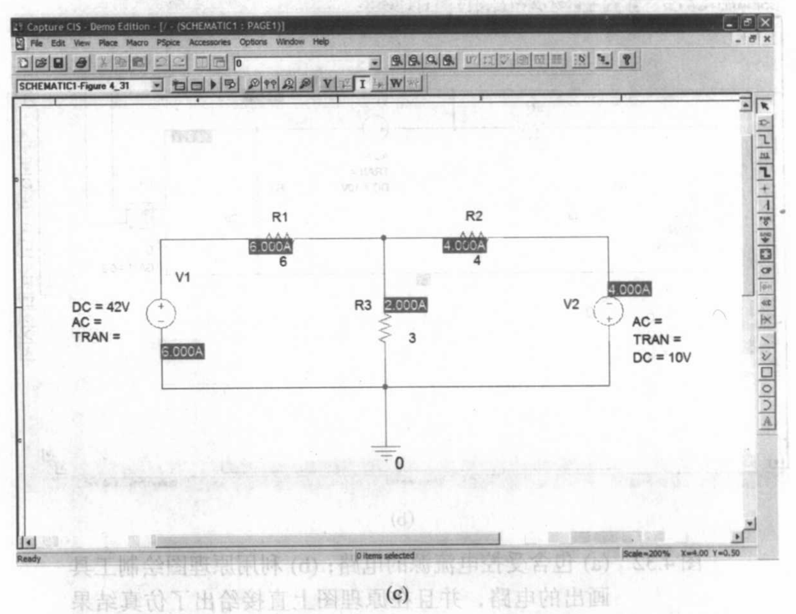
举例来说，考虑图4.15(b)所示电路，它包括两个直流电压源和3个电阻。用PSpice对该电路进行仿真可以得到电流 i_1 和 i_2。图4.31(a)是利用原理图绘制工具①得到的电路图。



(a)



(b)



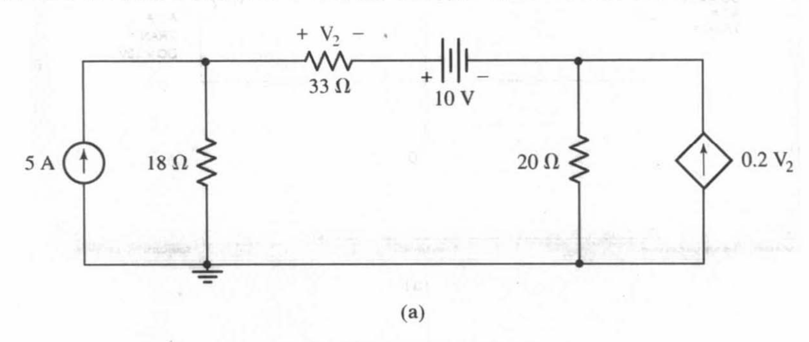
(c)

图4.31 (a) 图4.15(a)所示的电路，现在用Orcad电路图绘制软件画出；(b) 电流、电压和功率显示按钮；(c) 仿真运行后的电路，可以显示电流

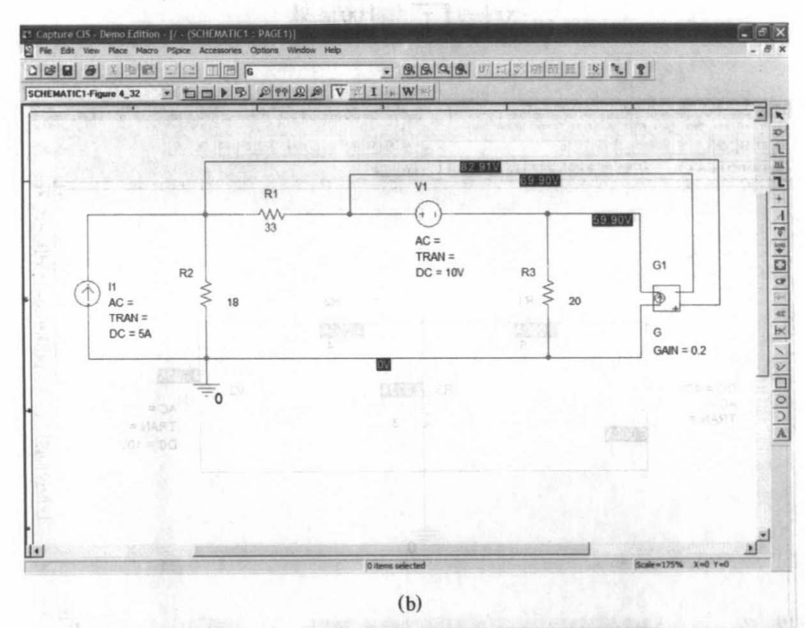
① PSpice和电路图绘制简单教程参见附录4。

为了确定网孔电流，只需运行偏置点仿真。在PSpice下，选择New Simulation Profile。输入实例1（或其他你喜欢的名字），然后按Create。在下拉菜单Analysis Type:中选择Bias Point，然后单击OK。回到原来的电路图窗口，在PSpice下，选择Run（或使用两个快捷键：F11或单击蓝色的Play符号）。为了观察PSpice计算得到的电流，必须确保已经选择了电流按钮[见图4.31(b)]。仿真结果如图4.31(c)所示，可以看到两个电流i_1和i_2分别为6 A和4 A，与前面求得的结果相同。

再举一个例子，考虑图4.32(a)所示的电路，它包含一个直流电压源、一个直流电流源以及一个电压控制电流源。我们关心的是3个节点电压，通过节点分析或网孔分析都可求得电路上部从左到右的3个电压分别为82.91 V，69.9 V，59.9 V。图4.32(b)所示的电路是用一个原理图绘制工具画出的，并且已经执行了仿真命令。3个节点电压已直接显示在电路图中。注意，利用原理图绘制工具画受控源时，必须明确将该电源的两端连接到它的控制电压或电流上。



(a)



(b)

图4.32　(a) 包含受控电流源的电路；(b) 利用原理图绘制工具画出的电路，并且在原理图上直接给出了仿真结果

实际应用——基于节点的PSpice原理图创建

结合计算机辅助电路分析来描述电路的最常用方法是利用一些图形化的原理图绘制软件包，其中的一个例子如图4.32所示。但是SPICE出现于这种软件之前，它要求用一种特殊的文本方式来

描述电路。这种格式基于穿孔机使用的语法。电路描述的基础是元件的定义，元件的每个端子都有一个节点号。虽然我们已经介绍了两种不同的电路分析方法：节点分析和网孔分析方法，然而有趣的是 SPICE 和 PSpice 都明确采用节点分析方法来编写。

尽管现代电路分析大多是通过面向图形的交互软件来完成的，但当产生错误时（通常是因为在画电路图或在选择分析选项组合时产生的），读懂由原理图绘制工具生成的基于文本的“输入面板”（input deck）对找出问题是很有帮助的。掌握这种能力的最简单方法是学会如何直接从用户编写的输入面板来运行 PSpice。

例如，考虑下面的输入面板的例子（以星号开始的行是注释行，SPICE 运行时会跳过它们）。

```
* Example input deck for a simple voltage divider.
.OP                          (请求 SPICE 确定电路的直流工作点)
R1 1 2 1k                    (R1 定义在节点 1 和节点 2 之间，电阻值为 1 kΩ)
R2 2 0 1k                    (R2 定义在节点 2 和节点 0 之间，电阻值为 1 kΩ)
V1 1 0 DC 5                  (V1 定义在节点 1 和节点 0 之间，电压值为直流 5 V)
*End of input deck.
```

可以利用 Windows 的写字板软件或自己喜欢的文本编辑器来创建输入面板。将文件保存为 example.cir，接下来调用 PSpice A/D（参见附录 4）。在 File 下选择 Open，找到文件 example.cir 所在的目录，对于文件类型（Files of Type:），选择 Circuit Files(*.cir)。选择好文件后，单击 Open 就可以看到 PSpice A/D 窗口，窗口中加载了我们的电路文件［见图 4.33(a)］。原理图绘制软件会创建一个包含需要执行的仿真指令的网表，在本例中，该网表既可由原理图输入软件创建也可通过手工创建。

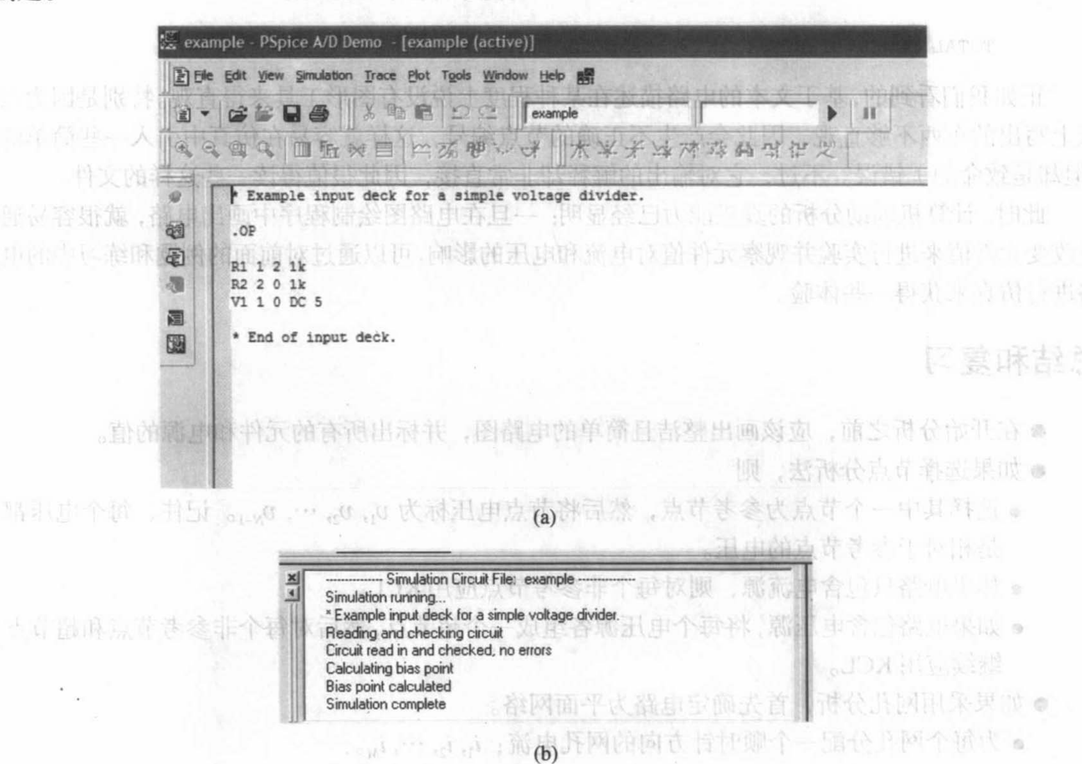


图 4.33　(a) PSpice A/D 窗口，其中加载了电路文件；(b) 仿真操作小结

单击右上角的运行（Play）按钮或在Simulation下选择Run就可以开始仿真了。在主窗口的左下角有一个更小的小结窗口，它会告诉我们仿真是否成功运行［见图4.33(b)］。为了看到结果，选择View菜单下的Output File可以看到：

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** Pspice Lite (Jan 2003) **************
 * Example input deck for a simple voltage divider.
 ***     CIRCUIT DESCRIPTION
**********************************************************************
.OP
R1 1 2 1k
R2 2 0 1k
V1 1 0 DC 5
*End of input deck.
```

（在输出中重复输入面板是为了便于参考并有助于检查错误）

```
**** 02/18/04 09:53:57 ************** Pspice Lite (Jan 2003) **************
 * Example input deck for a simple voltage divider.
 ****     SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION       TEMPERATURE =   27.000 DEG C
**********************************************************************
 NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE     NODE   VOLTAGE
 (    1)     5.000   (     2)     2.5000

    VOLTAGE SOURCE CURRENTS
    NAME          CURRENT
    V1           -2.500E-03

    TOTAL POWER DISSIPATION   1.25E-02  WATTS
```

（在输出总结中，给出了每个节点与节点0之间的电压。5 V电压连接在节点1和节点0之间，电阻R2连接在节点2和节点0之间，两端的电压为2.5 V，与预计的一致。发现SPICE有一个规定：由电流源提供的电流遵循无源符号规则（例如，-2.5 mA）。）

正如我们看到的，基于文本的电路描述在某种程度上说没有图形工具来得直观。特别是因为在纸上写出的东西不够直观，因此会产生不正确的节点编号，这样就容易在仿真中引入一些简单的（但却是致命的）错误。不过，它对输出的解释却非常直接，因此很值得读一些这样的文件。

此时，计算机辅助分析的真正能力已经显明：一旦在电路图绘制程序中画出电路，就很容易通过改变元件值来进行实验并观察元件值对电流和电压的影响。可以通过对前面的例题和练习中的电路进行仿真来获得一些体验。

总结和复习

- 在开始分析之前，应该画出整洁且简单的电路图，并标出所有的元件和电源的值。
- 如果选择节点分析法，则
  - 选择其中一个节点为参考节点，然后将节点电压标为 $v_1, v_2, \cdots, v_{N-1}$。记住，每个电压都是相对于参考节点的电压。
  - 如果电路只包含电流源，则对每个非参考节点应用KCL。
  - 如果电路包含电压源，将每个电压源各组成一个超节点，然后对每个非参考节点和超节点继续应用KCL。
- 如果采用网孔分析，首先确定电路为平面网络。
  - 为每个网孔分配一个顺时针方向的网孔电流：$i_1, i_2, \cdots, i_M$。
  - 如果电路只包含电压源，则对每个网孔应用KVL。

- 如果电路包含电流源，对由两个网孔共有的电流源创建超网孔，然后对每个网孔及超网孔应用KVL。
- 在应用节点分析法时，如果受控源的控制变量为电流，则应针对受控源增加额外的方程；但如果控制变量为节点电压，则无需增加方程。相反，对于网孔分析法，如果受控源的控制变量为电压，则针对受控源增加额外方程；但如果控制变量为网孔电流，则无需增加方程。
- 对于平面网络，在选择应用节点分析法还是网孔分析法时，如果该电路的节点/超节点数比网孔/超网孔数少，则应用节点分析法将得到更少的方程数。
- 计算机辅助电路分析在检查结果以及分析元件数很多的电路时非常有用。但必须利用常识检查仿真结果。

深入阅读

在下面的书中可以找到有关节点分析和网孔分析的详细描述：

R. A. DeCarlo 和 P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001。

SPICE 参考手册：

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSPICE*, 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1995。

习题

4.1 节点分析

1. (a)如果 $0.1v_1 - 0.3v_2 - 0.4v_3 = 0$, $-0.5v_1 + 0.1v_2 = 4$, $-0.2v_1 - 0.3v_2 + 0.4v_3 = 6$，求 v_2。(b) 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. (a) 如果 $v_A + v_B + v_C = 27$，$2v_B + 16 = v_A - 3v_C$，$4v_C + 2v_A + 6 = 0$，求 v_A，v_B 和 v_C。(b) 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. (a) 求解下列方程组：



$$4 = v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_x)/50$$
$$10 - 4 - (-2) = (v_x - v_1)/50 + (v_x - v_2)/40$$
$$-2 = v_2/25 + (v_2 - v_x)/40 + (v_2 - v_1)/20$$

(b) 利用 MATLAB 对结果进行验证。

4. 求图 4.34 所示电路中 v_1 的电压值。

5. 求图 4.35 所示电路中 v_1 的电压值。

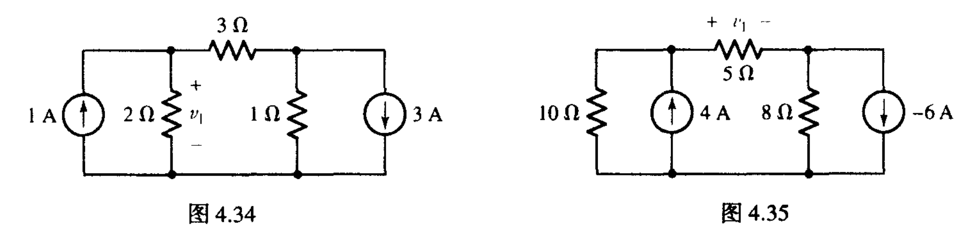


图 4.34　　　　图 4.35

6. 电路如图 4.36 所示，求电压 v_1 和电流 i_1。

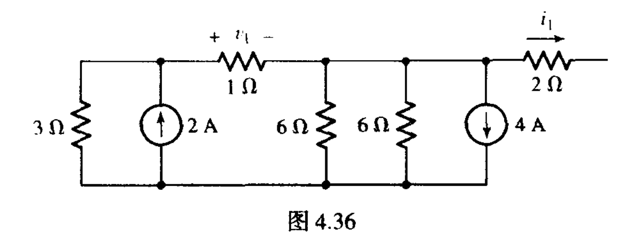


图 4.36

7. 利用节点分析法求图 4.37 所示电路中的 v_P。

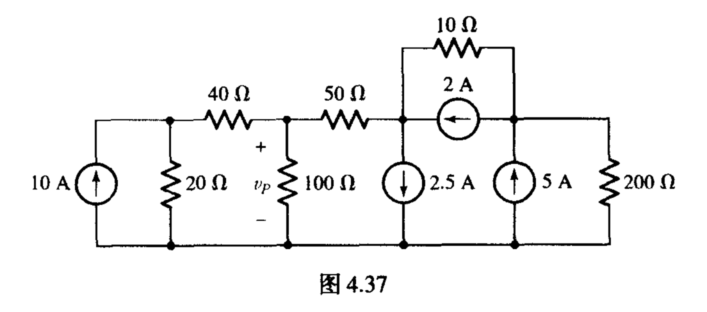


图 4.37

8. 利用节点分析法求图 4.38 所示电路中的 v_x。

9. 电路如图 4.39 所示：(a) 利用节点分析法，求 v_1 和 v_2。(b) 计算 6 Ω 电阻吸收的功率。

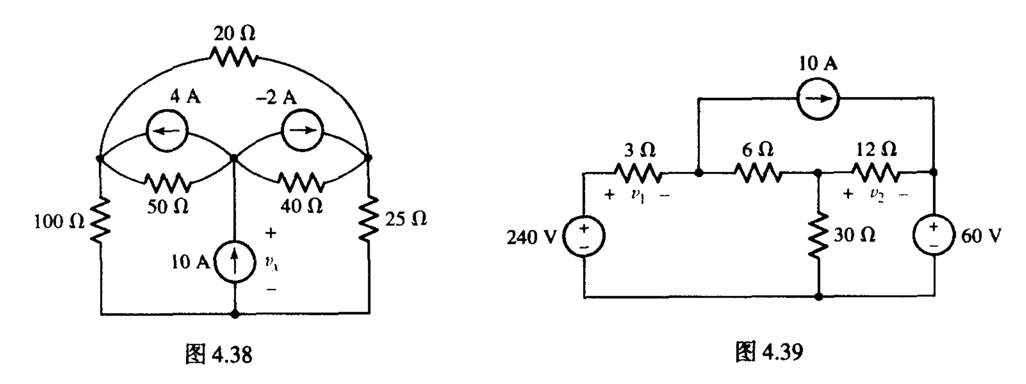


图 4.38　　　　图 4.39

10. 利用节点分析法求图 4.40 所示电路中的 v_1 和 i_2。

11. 考虑图 4.41 所示电路，利用节点分析法，求使 $v_1 = 0$ 时 V_2 的值。

12. 电路如图 4.42 所示，采用节点分析法求电流 i_5。

13. 电路如图 4.43 所示，采用节点分析法求 v_x 的值。

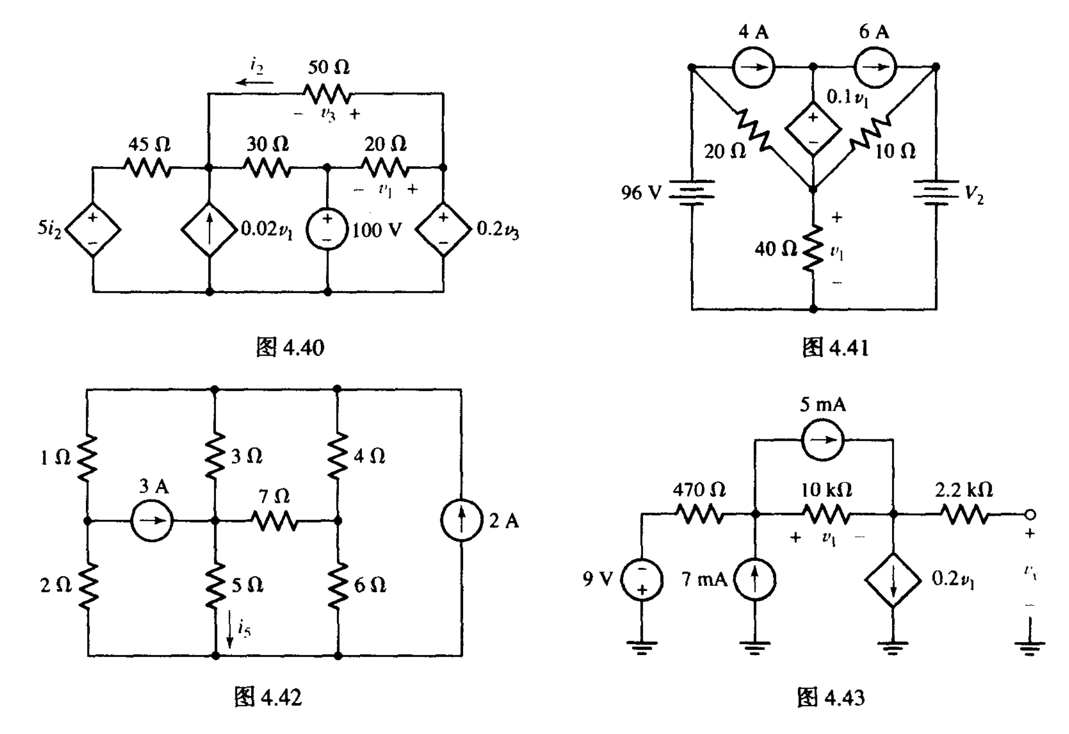


图 4.40

图 4.41

图 4.42

图 4.43

14. 采用节点分析法求图 4.44 所示电路中标注为 v 的电压。

15. 电路如图 4.45 所示，求图中所标注的各节点电压。

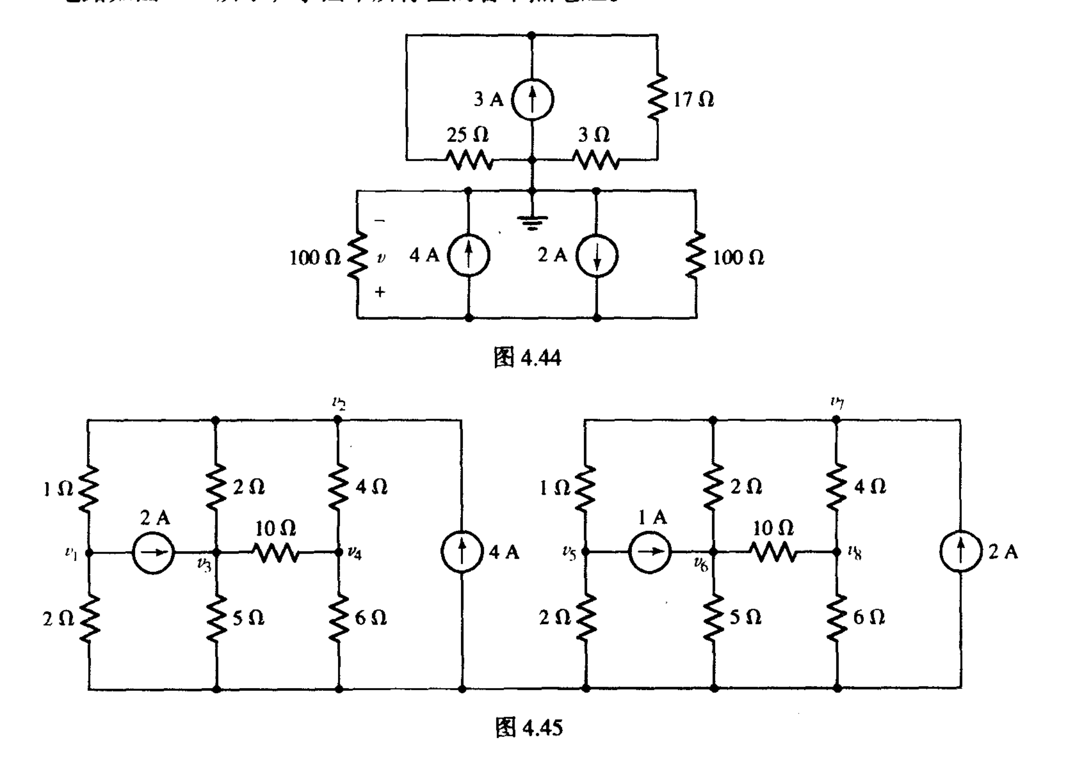


图 4.44

图 4.45

4.2 超节点

16. 采用节点分析法，求图 4.46 所示电路中的 v_4 电压。
17. 电路如图 4.47 所示，借助节点法，求：(a) v_A；(b) 2.5 Ω 电阻消耗的功率。

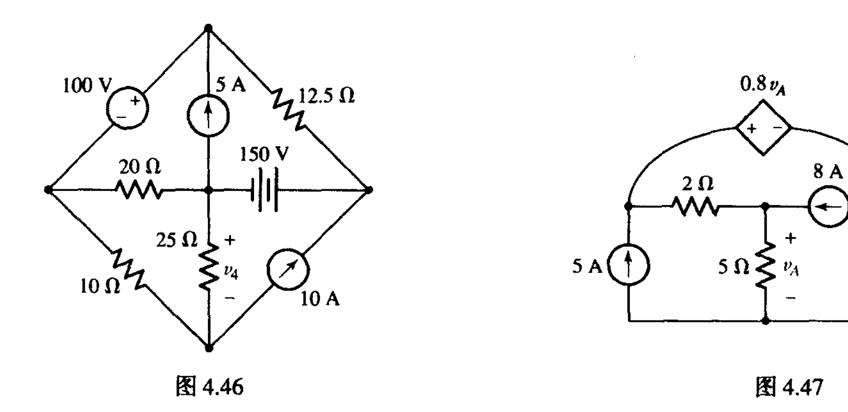


图 4.46　　图 4.47

18. 电路如图 4.48 所示，采用节点分析法，求电压 v_1 以及受控电流源提供的功率。
19. 电路如图 4.49 所示，采用节点分析法，求 k 的值，使 $v_y = 0$。

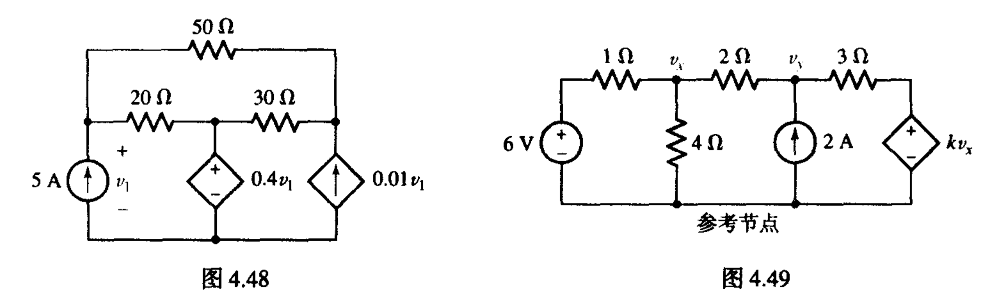


图 4.48　　图 4.49

20. 电路如图 4.50 所示，求电流 i_1。
21. 利用超节点的概念，求图4.51所示电路中的 v_{20}。交叉点不用圆点标注的表明实际上不相连。

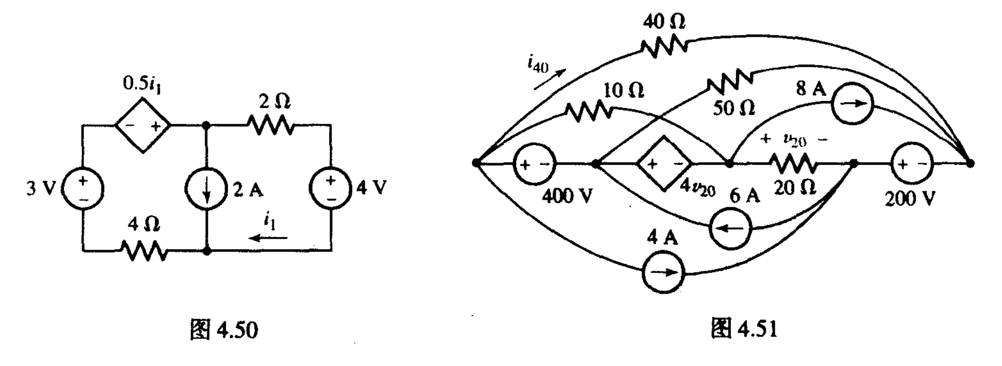


图 4.50　　图 4.51

22. 电路如图 4.52 所示，求 4 个节点电压。
23. 求图 4.53 所示电路中 2 A 电源提供的功率。
24. 求图 4.54 所示电路中 2 A 电源提供的功率。
25. 求图 4.55 所示电路的各个节点电压。

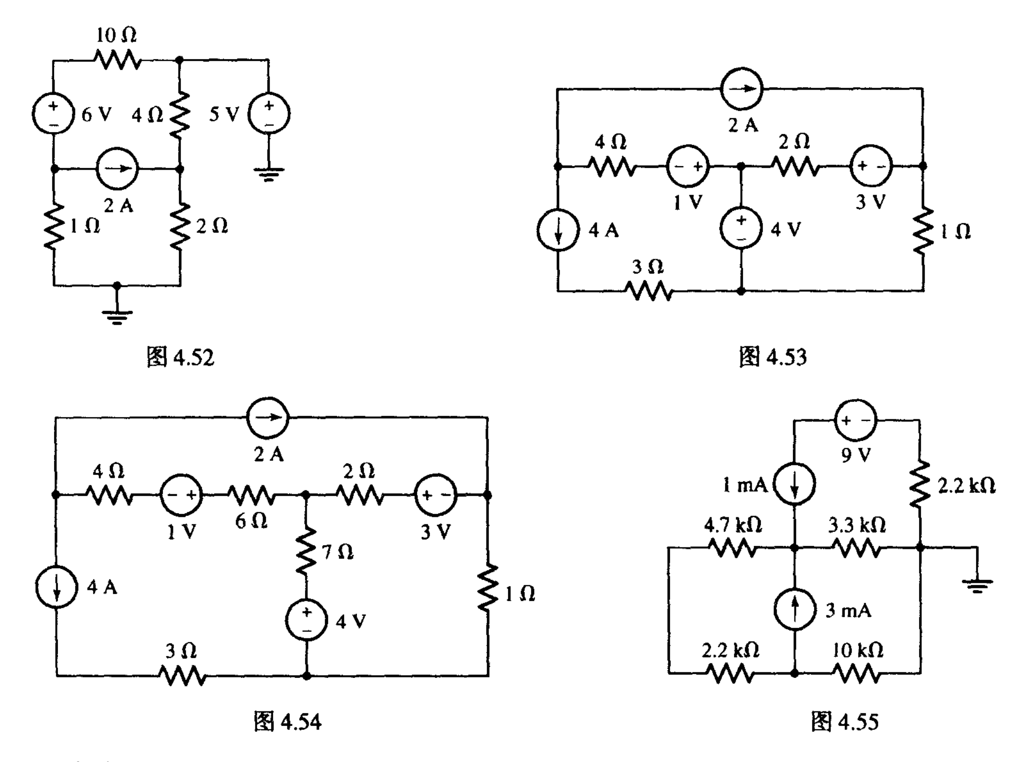


图 4.52　图 4.53

图 4.54　图 4.55

4.3　网孔分析

26. 求图 4.56 所示电路中的网孔电流 i_1 和 i_2。
27. 电路如图 4.57 所示，采用网孔分析法，求：(a) 电流 i_y；(b) 10 V 电源提供的功率。

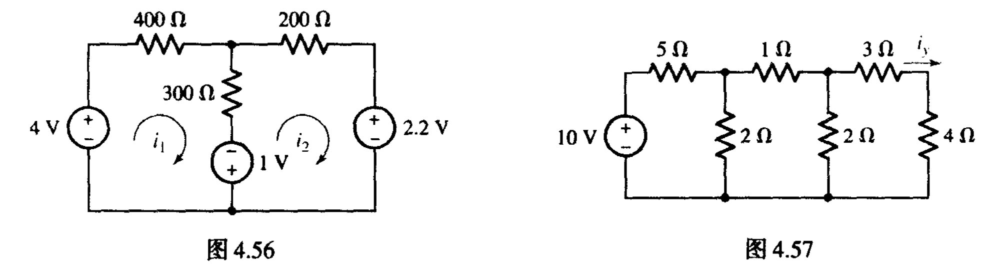


图 4.56　图 4.57

28. 采用网孔分析法，求图 4.58 所示电路中流过下列电阻的电流：(a) 2 Ω 电阻；(b) 5 Ω 电阻。
29. 电路如图 4.59 所示，利用网孔分析法，求：(a) 电流 i_x；(b) 25 Ω 电阻吸收的功率。

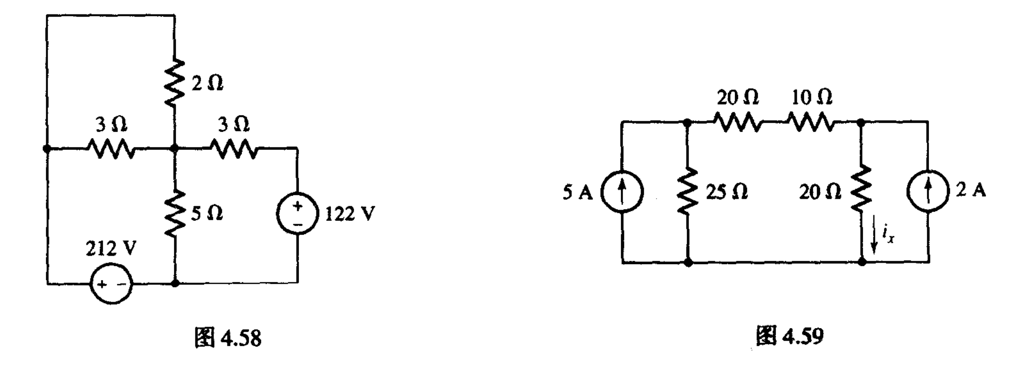


图 4.58　图 4.59

30. 采用网孔分析法，求图 4.60 所示电路中的电流 i。

31. 采用网孔分析法，求图 4.61 所示电路中的 i_x。

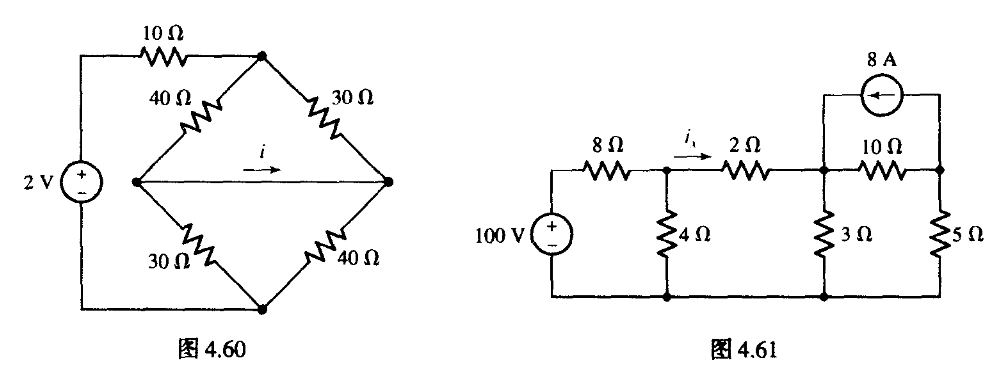


图 4.60　　　　图 4.61

32. 电路如图 4.62 所示，计算 2 Ω 电阻消耗的功率。

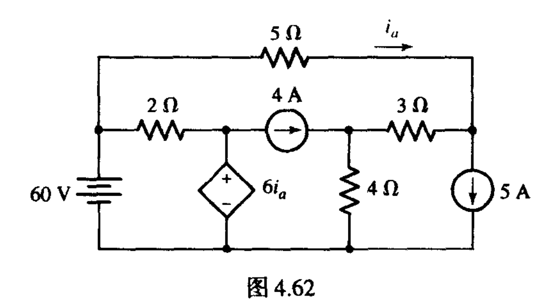


图 4.62

33. 采用网孔分析法对图 4.48 所示电路进行分析，求受控电压源提供的功率。

34. 电路如图 4.63 所示，采用网孔分析法求 i_x。

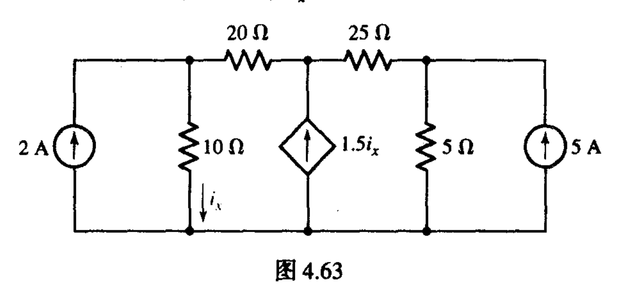


图 4.63

35. 电路如图 4.64 所示，求顺时针网孔电流。

36. 求图 4.65 所示电路中的各网孔电流。

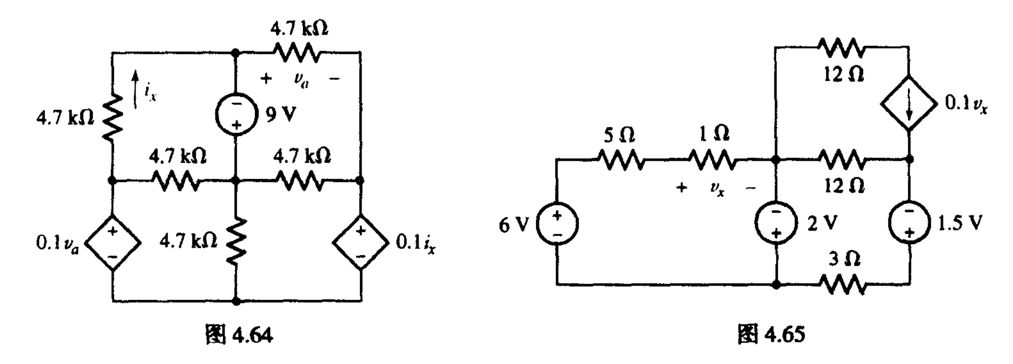


图 4.64　　　　图 4.65

37. (a) 电路如图 4.66 所示，如果已知网孔电流 $i_1 = 1.5$ mA，那么 R 为多少？(b) R 是否唯一？解释原因。

38. 电路如图 4.67 所示，采用网孔分析法求每个电阻吸收的功率。

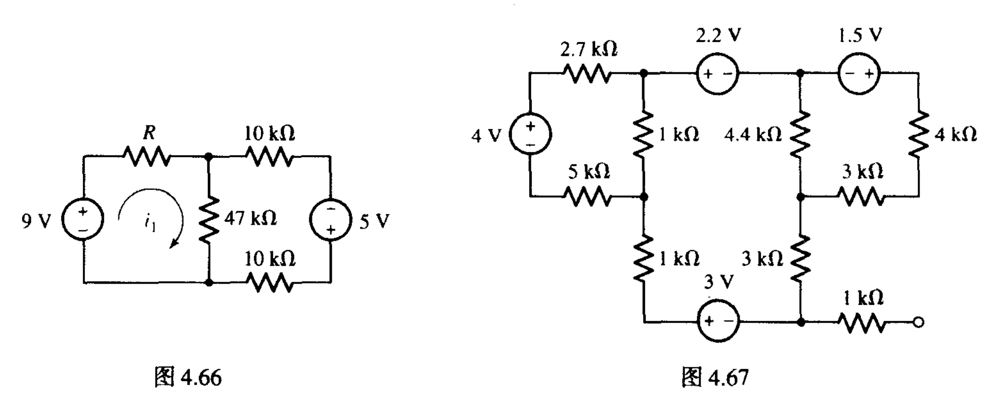


图 4.66　　图 4.67

39. 图4.68所示电路为共基双极型晶体管放大器的等效电路。输入端短路，且输出设备用一个1 V电源替代。(a) 采用网孔分析法求I_x; (b) 利用节点分析法验证结果; (c) V_s/I_x的物理意义是什么？

40. 电路如图 4.69 所示，确定 3 个电压源的值，使电路中任何一个电阻上都没有电流流过。

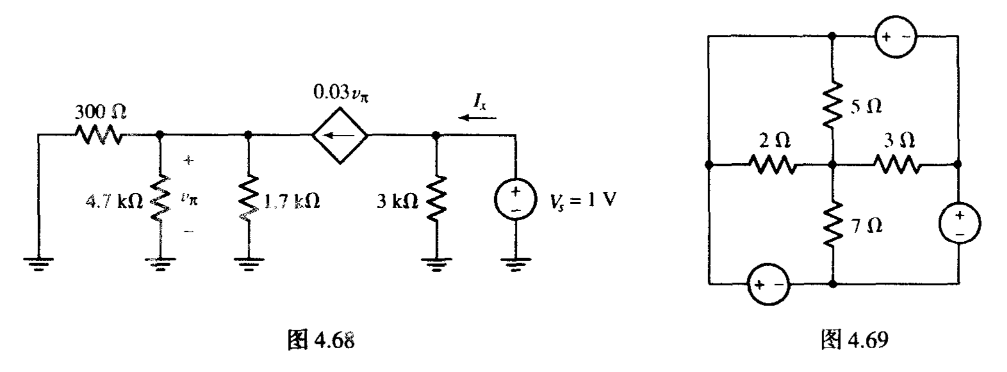


图 4.68　　图 4.69

4.4 超网孔

41. 电路如图 4.70 所示，采用网孔分析法，求 5 个电源产生的功率。

42. 求图 4.71 所示电路中的 i_A。

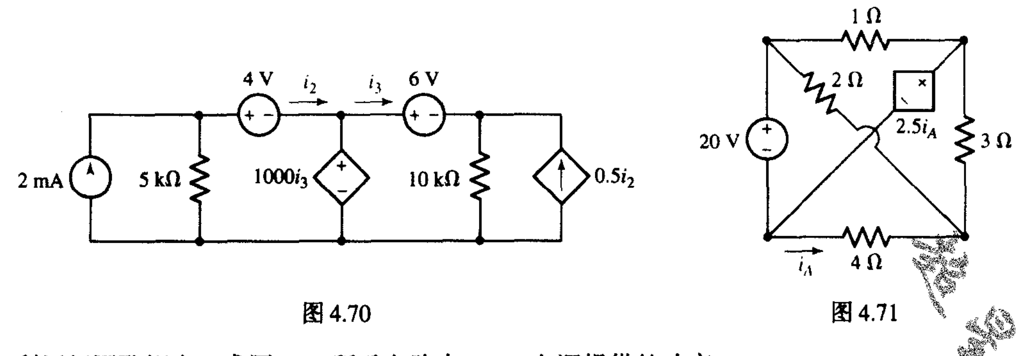


图 4.70　　图 4.71

43. 利用超网孔概念，求图 4.72 所示电路中 2.2 V 电源提供的功率。

44. 求图 4.73 所示电路中 2 mA 电源两端的电压，假定底部节点接地。



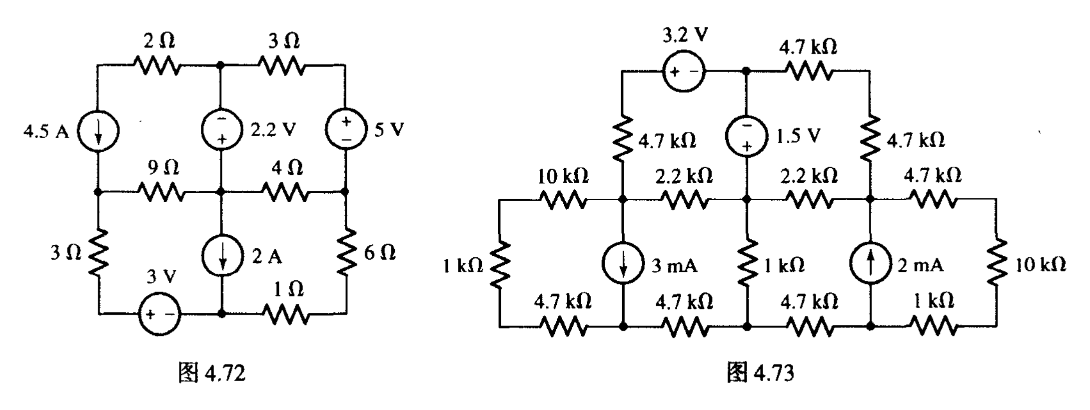


图 4.72　　图 4.73

45. 电路如图 4.74 所示，采用网孔分析法，求 2.5 Ω 电阻两端的电压。

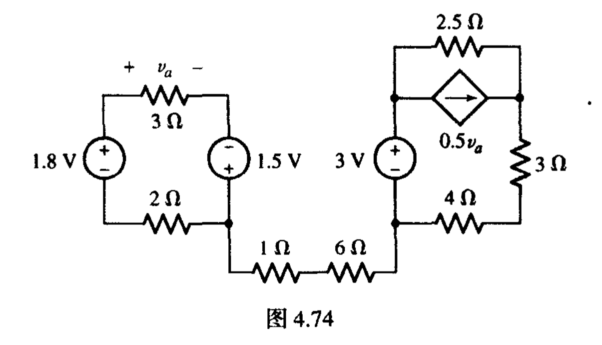


图 4.74

46. 计算图 4.75 所示电路中的网孔电流。

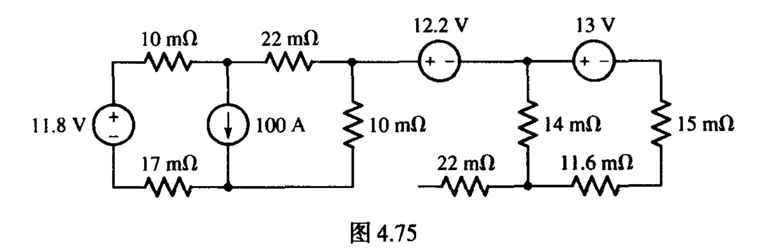


图 4.75

47. 电路如图 4.76 所示，如果 $i_2 = 2.273$ A，求电阻 X 的值。

48. 电路如图 4.77 所示，计算所标注的 3 个网孔电流。

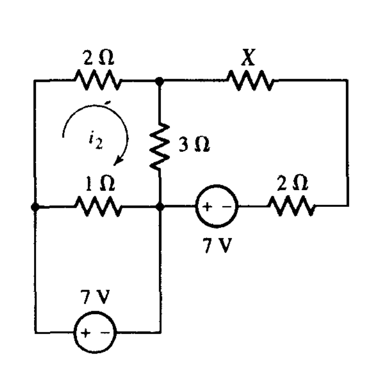


图 4.76

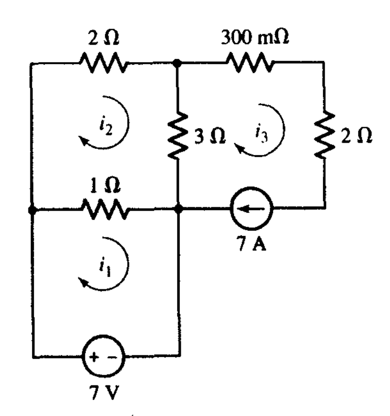


图 4.77

4.5　节点分析和网孔分析的比较

49. 求图 4.78 所示的每个电路中的 v_x 电压。

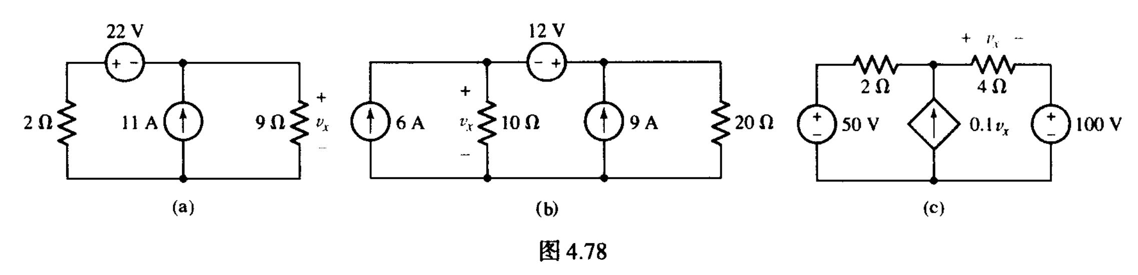


图 4.78

50. 电路如图 4.79 所示，求元件 A 为下列情况下的电压 v_3：(a)短路线；(b) 9 V 独立电压源，左边为正；(c) 受控电流源，箭头向左，值为 $5i_1$。
51. 电路如图 4.79 所示，如果元件 A 为 12 Ω 的电阻，求电流 i_1 和 i_2。解释选择节点分析法或网孔分析法的原因。
52. 求图 4.80 所示电路中 i_{10} 的值。

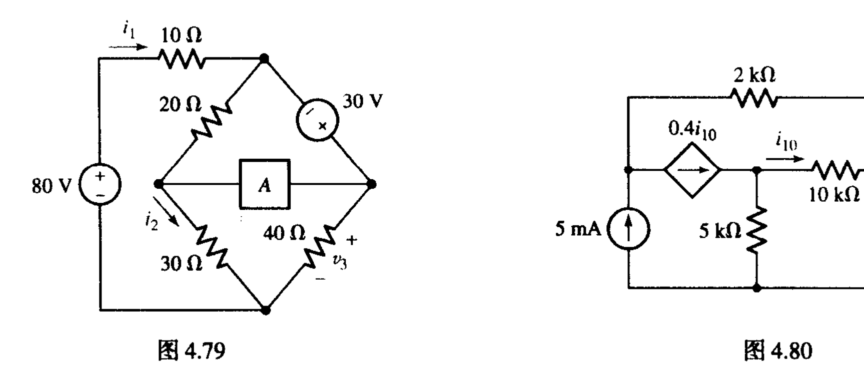


图 4.79　　图 4.80

53. 求图 4.81 所示电路中标注的两个电流。
54. 电路如图 4.82 所示，求中心节点的电压。

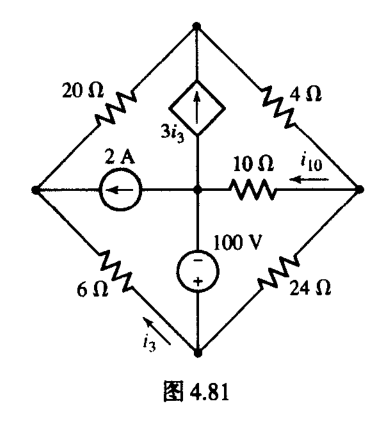


图 4.81

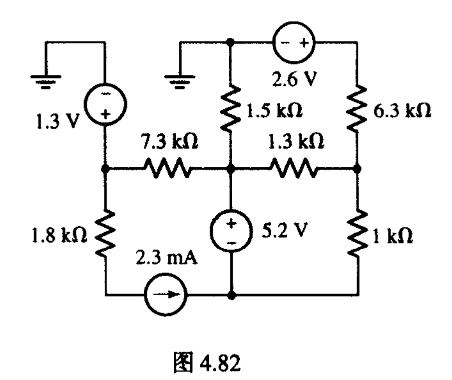


图 4.82

55. 电路如图 4.83 所示，求流过每条支路的电流。
56. 求图 4.84 所示电路中 2 mA 电流源两端的电压。

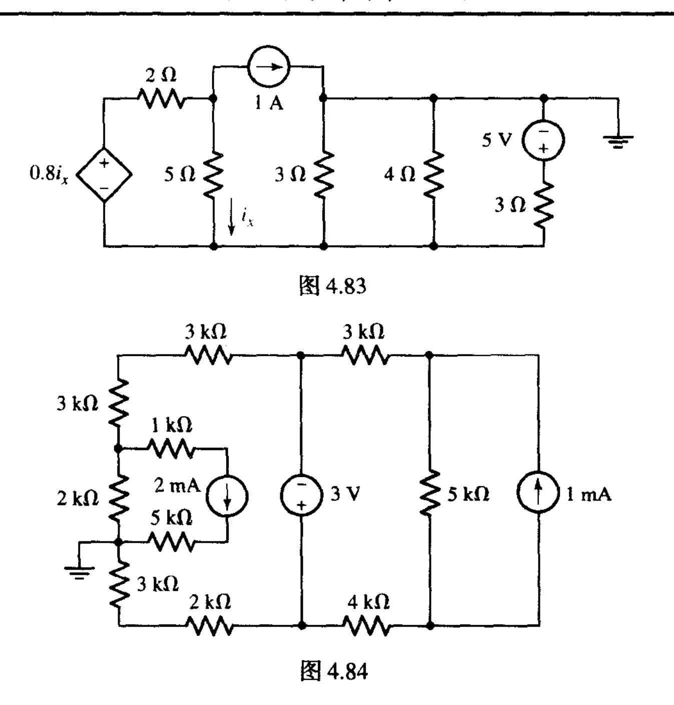


图 4.83

图 4.84

57. 考虑图4.85所示电路，假设A为5 V电压源并且上端为正，B为箭头向下的3 A电流源，C为3 Ω电阻，D为箭头指向地的2 A电流源，F为1 V电压源并且右边为负，E为4 Ω电阻。计算i_1。
58. 为I_1, I_2和V_1选择非零数值，使6 Ω电阻上消耗的功率为6 W。电路如图4.86所示。

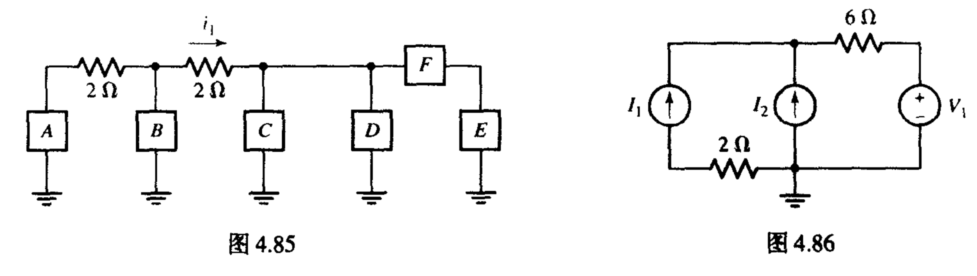


图 4.85　　图 4.86

59. 对于图4.84所示电路，用底端为正参考端的2 V电压源替换2 mA电流源，并且将3 V电源替换为7 mA电流源，箭头向下。求新电路的网孔电流。
60. 电路如图4.85所示，A为箭头向下且数值为$5i_1$的受控电流源，B和E为2 Ω电阻，C为箭头指向地的2 A电流源，F为负参考极性在右边的2 V电压源，D为箭头向上的3 A电流源。求节点电压和所有网孔电流。

4.6 计算机辅助电路分析

61. 采用PSpice对习题52的结果进行验证。提交一份正确标注的原理图打印稿，包括手工计算的结果。
62. 采用PSpice对习题54的结果进行验证。提交一份正确标注的原理图打印稿，包括手工计算的结果。

63. 采用PSpice对习题56的结果进行验证。提交一份正确标注的原理图打印稿，包括手工计算的结果。

64. 采用PSpice对习题58的结果进行验证。提交一份正确标注的原理图打印稿，包括手工计算的结果。

65. 采用PSpice对习题60的结果进行验证。提交一份正确标注的原理图打印稿，包括手工计算的结果。

66. 构建一个电路，该电路包含一个与100 Ω电阻串联的5 V电源，将该电路连接至某网络中，该网络至少包含一个3 A电源、3个不同的电阻以及一个受到100 Ω电阻两端电压控制的电压控制电流源。(a) 求所有的节点电压和支路电流；(b) 采用PSpice对结果进行验证。

67. 利用一个10 V电池、一个3 A电源以及足够多的1 Ω电阻来构建一个电路，要求3 A电源两端的电压为5 V。采用PSpice对手工计算的结果进行验证。

68. 电路如图4.87所示，写出正确的SPICE输入网表，求 v_5。提交一个打印的输出文件，并特别注明你的答案。

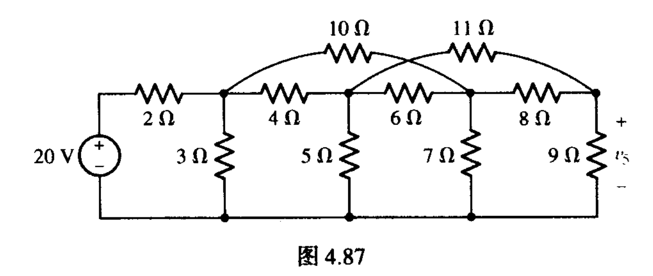


图4.87

69. 只用一个9 V电池和若干个电阻构造一个电路，使得该电路的各节点电压分别为4 V，3 V和2 V。写出合适的SPICE输入面板进行仿真，并提交特别注明了所求电压的打印文件。作为一个参考，在打印出的图纸上画出标注好的原理图，并标出节点编号。

70. 在一所房子中安装了一长串户外彩灯，当加电的时候，房屋主人发现两盏灯已烧坏。(a) 这些灯是串联连接还是并联连接的？(b) 写出SPICE输入面板来仿真这些彩灯，假定使用20 AWG的导线，用115 V交流电源供电，单个灯的额定功率为1 W，共有400盏灯。为简化起见，试用少于25个元件的等效电路来仿真，提交一个打印的输出文件，并突出表示插座电源提供的功率。(c)在替换了烧坏的灯后，房屋主人发现最靠近电源插座的那些灯比最远端的灯亮10%。给出一个可能的解释。记住，这一串彩灯中处处都是有电阻的。

第5章　常用电路分析方法

主要概念

- 叠加——确定不同电源对任何电流或电压的单独贡献的方法
- 电源变换，简化电路的方法
- 戴维南定理
- 诺顿定理
- 戴维南和诺顿等效网络
- 最大功率传输
- 电阻网络的 Δ-Y 变换
- 选择特定的分析技术的组合
- 利用 PSpice 进行直流扫描仿真

引言

第4章中描述的节点分析和网孔分析法是可靠且非常有效的方法。但是，它们都需要构建完整的描述特定电路的方程组（即使只关心一个电流、电压或功率量）。本章将讨论几个不同的分析方法，它们可以分离出电路的特定部分来简化分析。介绍完这些方法后，我们将关注怎样选择这些方法。

5.1　线性和叠加

本书要分析的所有电路都可归结为线性电路，因此需要更确切地给线性电路下一个定义，然后考虑最重要的线性结果——叠加定理。该定理是一个基本定理，并且会在线性电路分析中不断出现。实际上，叠加定理对非线性电路的不可应用性恰恰是非线性电路分析困难的原因。

> 叠加定理指的是包含一个以上独立电源的线性电路的响应（电流或电压）可以通过对每个独立源单独产生的响应进行相加得到。

线性元件和线性电路

首先，线性元件定义为具有线性伏安关系的无源元件。线性伏安关系仅仅指若通过元件的电流乘以常数K，则元件两端的电压也将乘以常数K。这里只定义了一个无源元件（电阻），其伏安关系为

$$v(t) = Ri(t)$$

显然它是线性的。实际上，如果将$v(t)$作为$i(t)$的函数作图，那么它将是一条直线。

同时还必须定义线性受控源。线性受控源指的是输出电流或电压只与电路中指定的电流或电压（或这些量之和）的一次幂成正比的受控电流源或受控电压源。例如，受控电流源 $v_s = 0.6i_1 - 14v_2$ 为线性，而 $v_s = 0.6i_1^2$ 和 $v_s = 0.6i_1v_2$ 为非线性。

现在可以线性电路的定义了，即完全由独立电源、线性受控源和线性元件组成的电路定义为线性电路。从该定义可以看出响应与激励源成比例①，或者说所有独立源的电压或电流乘以常数K将使所有的电流和电压响应也增大为原来的K倍（包括受控源的电压或电流输出）。

叠加定理

线性性最重要的结果是叠加性。首先通过图5.1所示电路来得出叠加定理的具体内容，该电路包含两个独立电流源i_a和i_b。电源通常称为激励函数，电源在各节点产生的节点电压称为响应函数，或简称为响应。激励函数和响应都可能是时间的函数。该电路的两个节点方程为

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \qquad [1]$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \qquad [2]$$

现在我们做一个实验x。将两个激励函数改为i_{ax}和i_{bx}；产生的两个未知电压也将发生变化，分别记为v_{1x}和v_{2x}。因此，

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \qquad [3]$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \qquad [4]$$

接下来做实验y。将电源电流改为i_{ay}和i_{by}，测量得到响应为v_{1y}和v_{2y}：

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \qquad [5]$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \qquad [6]$$

这3组方程描述的是同一个电路，只是电源的电流不同。对后面两组方程进行相加或叠加。即将式[3]和式[5]相加，得到

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \qquad [7]$$

$$0.7v_1 \qquad - \qquad 0.2v_2 \qquad = \qquad i_a \qquad [1]$$

将式[4]和式[6]相加，得到

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \qquad [8]$$

$$-0.2v_1 \qquad + \qquad 1.2v_2 \qquad = \qquad i_b \qquad [2]$$

其中，我们将式[1]排在式[7]下面，将式[2]排在式[8]下面以便于比较。

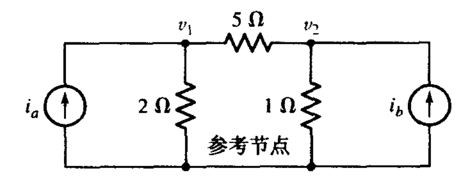


图5.1 包含两个独立电流源的电路

由于这些方程都为线性方程，因此可以对式[7]和式[1]以及式[8]和式[2]进行比较，从而得出一个有趣的结论。如果选择i_{ax}和i_{ay}使它们的和为i_a，以及选择i_{bx}和i_{by}使它们的和为i_b，那么响应v_1

① 证明过程：首先对线性电路应用节点分析，从而得到如下形式的线性方程：$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_Nv_N = b$。其中，$a_i$为常数（由电阻或电导值、出现在受控源表达式中的常数以及0或±1组合而成），b是独立源的值或各个独立电源之和。给定一组这样的方程，如果将所有的b乘以K，显然这一新方程组的解就是节点电压$Kv_1, Kv_2, \cdots, Kv_N$。

和 v_2 可以分别通过将 v_{1x} 与 v_{1y} 相加和 v_{2x} 与 v_{2y} 相加得到。换句话说，可以进行实验 x，记下响应，然后进行实验 y，记下响应，最后将两组响应进行相加，从而可以导出叠加定理的基本概念：将其他独立源“关闭”或“置零”以观察单个独立源（及其产生的响应）。

如果将电压源电压降到 0 V，就可以得到短路线［见图 5.2(a)］。如果将电流源电流降到 0 A，就可以得到断开的电路［见图 5.2(b)］。因此，叠加定理可以描述为：

在任何一个线性电阻网络中，任何电阻或电源两端的电压或流经任何电阻或电源的电流都可以通过每一个独立源单独作用引起的电压或电流响应的代数和得到，此时其他所有的独立电压源用短路替代，其他所有的独立电流源用断路替代。

因此，如果有 N 个独立源，必须做 N 次实验，每次实验中只有一个独立源作用，其他都不作用，即关断或置零。注意，受控源在每次实验中一般都是起作用的。

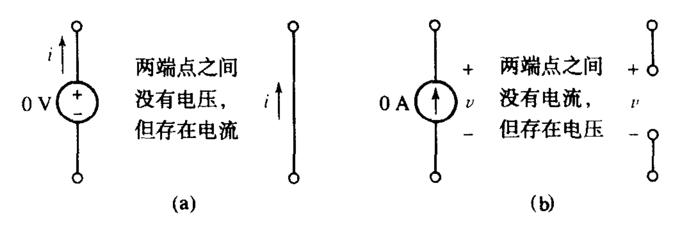


图 5.2 (a) 置零的电压源相当于一个短接电路；(b) 置零的电流源相当于一个断开电路

从刚才的例子可以写出一个很有用的定理。一组独立源可以选择性地设为工作和不工作。比如，假定有 3 个独立源。定理指出可以这样求得电路响应：将 3 个源单独作用的结果相加。或者让第一个和第二个源工作，而让第三个源不工作。然后将结果与第三个源单独工作的结果相加。这等于将这组电源看做一种超级源，然后有选择地处理某些源，使其起作用。

在上述几次实验中独立源并不一定只能取给定值或零值，只要几次实验中源取值的和等于原来的值就行。不过置 0 的源通常可以使电路简化。

下面通过例题来说明叠加定理的应用，例题包含两种类型的独立源。

例题 5.1 *电路如图 5.3(a)所示，利用叠加定理写出未知支路电流 i_x 的表达式。*

解： *首先将电流源置零并重画电路，得到如图 5.3(b)所示的电路。由电压源产生的部分 i_x 记为 i'_x，很容易可以求得 i'_x 为 0.2 A。*

接下来设电压源为零［见图 5.3(a)］，得到图 5.3(c)所示电路。利用电流分流关系可以得出 i''_x（由 2 A 电流源产生的部分 i_x）为 0.8 A。

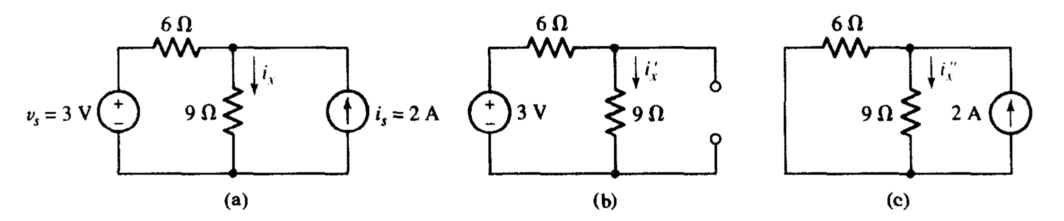


图 5.3 (a) 包含两个独立源的电路，其中支路电流 i_x 为需要求解的量；(b) 将电流源开路后得到的电路；(c) 将电压源短路后得到的电路

将这两部分相加可以计算完整电流 i_x：

$$i_x = i_x|_{3\ \mathrm{V}} + i_x|_{2\ \mathrm{A}} = i'_x + i''_x$$

或者为

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0\text{ A}$$

考虑例题 5.1 的另一种方法是 3 V 电源和 2 A 电源都作用于该电路，产生一个总电流 i_x 流过 9 Ω 电阻。但是，3 V 电源对 i_x 的贡献并不取决于 2 A 电源对 i_x 的贡献，反之亦然。比如，如果将 2 A 电源的输出增大为 4 A，那么该电源为流过 9 Ω 电阻的总电流 i_x 贡献 1.6 A 电流。然而，3 V 电源仍然只为 i_x 贡献 0.2 A，因此新的总电流为 0.2 + 1.6 = 1.8 A。

练习

5.1　电路如图 5.4 所示，利用叠加定理计算电流 i_x。

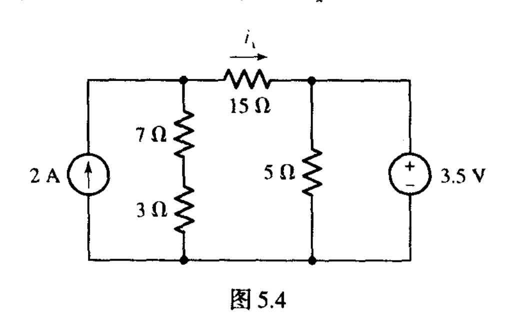


图 5.4

答案：660 mA。

如前所述，在考虑一个具体电路时，应用叠加定理并不能减少工作量，因为为了得到响应需要对几个新电路进行分析。但是，在区分复杂电路不同部分的重要性时，叠加定理就显得非常有用了。叠加定理也是第 10 章中将要介绍的相量分析的基础。

例题 5.2　电路如图 5.5(a)所示，确定电流源 I_X 的最大值，保证每个电阻上的功率不超过额定值而导致过热。

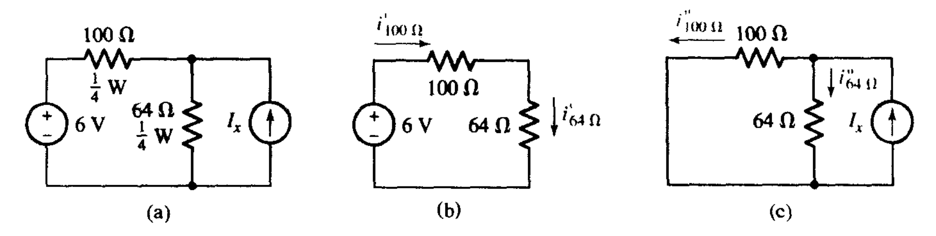


图 5.5　(a) 包含两个电阻的电路，电阻额定功率为 1/4 W；(b) 只有 6 V 电源作用时的电路；(c) I_x 电源作用时的电路

解：明确题目的要求

每个电阻额定的最大功耗为 250 mW。如果电路允许超过该值（任何一个电阻被迫流过太大的电流）将产生过热，从而有可能导致事故。6 V 电源不能改变，因此需要列出包含 I_x 和流过每个电阻最大电流的方程。

收集已知信息

基于 250 mW 的额定功率，可以得出 100 Ω 电阻所能承受的最大电流为

$$\sqrt{\frac{P_{max}}{R}}=\sqrt{\frac{0.250}{100}}=50\ \text{mA}$$

同样，流过 64 Ω 电阻的电流必须小于 62.5 mA。

▶ 方案设计

可以采用节点分析法或网孔分析法来求解，但叠加定理可能更具优势，因为我们感兴趣的是电流源的作用。

▶ 建立一组合适的方程

应用叠加定理，重画如图 5.5(b)所示的电路，可求得 6 V 电源为 100 Ω 电阻贡献的电流为

$$i'_{100\Omega}=\frac{6}{100+64}=36.59\ \text{mA}$$

因为 64 Ω 电阻和 100 Ω 电阻串联，因此该电源对 64 Ω 电阻贡献的电流也为 $i'_{64\Omega}=36.59$ mA。图 5.5(c)所示的电路为电流分流器，可以看出 $i''_{64\Omega}$ 应该与 $i'_{64\Omega}$ 相加，而 $i''_{100\Omega}$ 与 $i'_{100\Omega}$ 方向相反。因此 I_X 对 64 Ω 电阻电流的贡献为 62.5 - 36.59 = 25.91 mA，而对 100 Ω 电阻电流的贡献为 50 - (-36.59) = 86.59 mA。

因此 100 Ω 电阻对 I_X 的约束条件为

$$I_X<(86.59\times10^{-3})\left(\frac{100+64}{64}\right)$$

64 Ω 电阻的要求为

$$I_X<(25.91\times10^{-3})\left(\frac{100+64}{100}\right)$$

▶ 尝试求解

首先考虑 100 Ω 电阻，可以看出 I_X 必须满足 $I_X<221.9$ mA。64 Ω 电阻的限制使得 $I_X<42.49$mA。

▶ 验证结果是否合理或是否与预计相符

为了同时满足两个限制条件，I_X 必须小于 42.49 mA。如果电流增大，那么 64 Ω 电阻将会在 100 Ω 电阻之前发生过热。验证解的特别有效的方法是应用下面第二个例题中介绍的PSpice中的直流扫描分析方法。可是一个有趣的问题是，64 Ω 电阻真会首先过热吗?

最初我们觉得由于 100 Ω 电阻的最大允许电流较小，似乎它的电流应该会限制 I_X。但是因为 I_X 与 6 V 电源在 100 Ω 电阻上产生的电流方向相反，而与 6 V 电源在 64 Ω 电阻上产生的电流相同，因此，结论是 64 Ω 电阻限制了电流 I_X。

例题 5.3 电路如图 5.6(a)所示，利用叠加定理求 i_x。

解： 首先将 3 A 电源开路［见图 5.6(b)］。得到唯一的网孔方程为

$$-10+2i'_x+1i'_x+2i'_x=0$$

求解得

$$i'_x=2\ \text{A}$$

接下来，将 10 V 电源短路［见图 5.6(c)］，写出单节点方程：

$$\frac{v''}{2}+\frac{v''-2i''_x}{1}=3$$

并且写出受控源控制变量与 v'' 的关系：

$$v'' = 2(-i_x'')$$

可求得

$$i_x'' = -0.6\ \text{A}$$

因此，

$$i_x = i_x' + i_x'' = 2 + (-0.6) = 1.4\ \text{A}$$

值得注意的是，在重画子电路时，总是使用某种下标以表示所引用的变量不是原始变量，这样做是为了防止对有关变量求和时可能出现的灾难性错误。

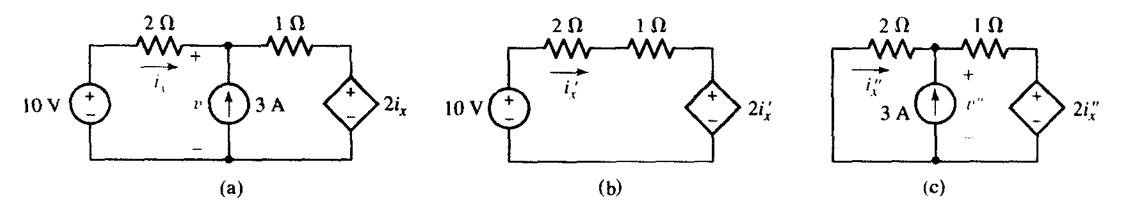


图 5.6　(a) 包含两个独立源和一个受控源的电路，其中支路电流 i_x 为需要求解的量；(b) 3 A 电源开路后的电路；(c) 10 V 电源短路后的电路

练习

5.2　电路如图 5.7 所示，利用叠加定理求每个电流源两端的电压。

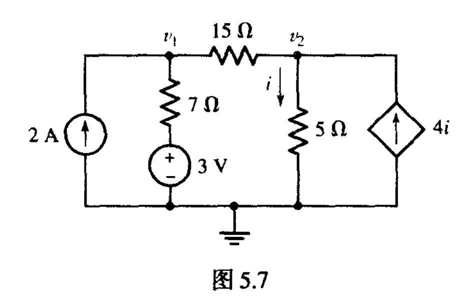


图 5.7

答案： $v_1|_{2\text{ A}} = 9.180$ V, $v_2|_{2\text{ A}} = -1.148$ V, $v_1|_{3\text{ V}} = 1.967$ V, $v_2|_{3\text{ V}} = -0.246$ V； $v_1 = 11.147$ V, $v_2 = -1.394$ V。

基本叠加定理求解过程的总结

1. 选择其中一个独立源，设置其他所有独立源为零。这意味着电压源短路，电流源开路，而受控源保持不变。
2. 利用合适的符号（如 v', i_2''）重新标注电压和电流。确保对受控源的控制变量重新标注以免出现混淆。
3. 分析简化后的电路，求得所需求解的电流或电压。
4. 重复步骤 1~3 直到考虑了所有的独立源。
5. 将单独分析得到的电流或电压相加。在相加时必须小心电压符号和电流方向。
6. 功率不能相加。如果要求解功率，那么只有在所有的电流分量或电压分量相加以后才能计算功率。

注意，步骤1可以有几种方式。第一，独立源可以成组考虑，如果这样可以简化分析的话，那么并不一定要单独考虑，前提是每个独立源不被重复考虑；第二，不一定把电源设为零，虽然此举是最好的。例如，一个3 V电源可以分成两个1.5 V的电源，因为1.5 + 1.5 = 3 V，作用与0 + 3 = 3 V一样。但是这样做不可能简化分析，所以没有多大意义。

计算机辅助分析

PSpice不仅对验证电路分析的正确性非常有用，而且还有助于确定每个电源对某个响应的贡献大小。为此，需要应用直流参数扫描（DC Parameter Sweep）。

考虑例题5.2中给出的电路，要求在两个电阻上的功率不超过额定功率的条件下，确定电流源允许提供的最大正电流。利用Orcad CIS电路图抓取工具重画如图5.8所示的电路。注意，电流源未分配具体数值。

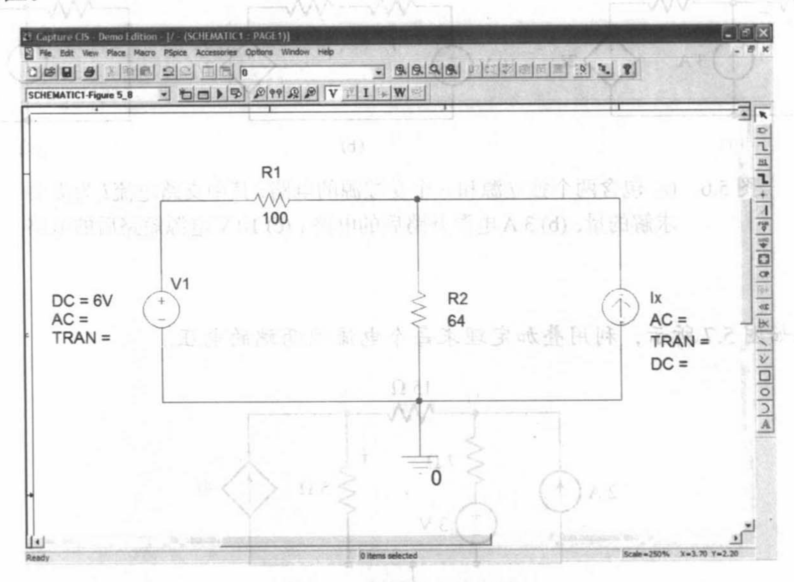


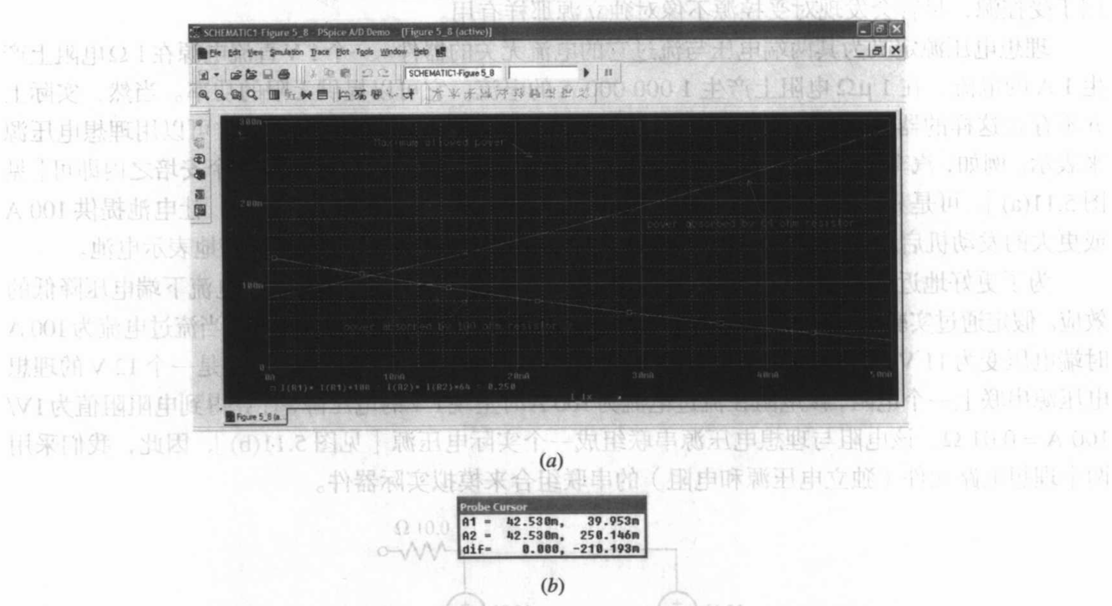
图5.8 例题5.2的电路

输入并保存电路图以后，下一步就是指定直流扫描参数。该选项可以为电压源或电流源（该例中为电流源Ix）指定一定范围的值，而不是具体数值。在PSpice下选择New Simulation Profile，选定一个文件名字，然后可以得到如图5.9所示的对话框。

在Analysis Type下得到DC Sweep选项，指定扫描变量为Current Source，然后在Name一栏中输入Ix。在扫描类型（Sweep Type）下有几个选项：线性（Linear）、对数（Logarithmic）和数值列表（Value List）。最后一个选项允许我们为Ix分配指定的数值。但是为了产生光滑曲线，选择执行线性（Linear）扫描，起始值为0 mA，终止值为50 mA，步进为0.01 mA。

执行仿真以后，图形输出软件包Probe自动运行。这时出现一个窗口，它的横轴为变量Ix，纵轴变量待选。从Trace菜单选择Add Trace，单击I(R1)，然后在Trace Expression选框中输入一个星号，再次单击I(R1)，插入另一个星号，最后输入100。这是让绘图程序画出100 Ω电阻所吸收的功率。同样，重复上述过程，画出64 Ω电阻所吸收的功率，最后结果如图5.10(a)所示。第三次在Trace菜单下选择Add Trace，在Trace Expression选框中输入0.250，即可在曲线图中加上一条位于250 mW的水平参考线。

图 5.9　直流扫描对话框，其中 Ix 为扫描变量



(a)

(b)

图 5.10　(a) 显示两个电阻各自吸收功率的输出曲线，图中还包括一条 250 mW 的水平参考线以及为帮助阅读所加的文字；(b) 光标对话框

从曲线中可以看出 64 Ω 电阻确实在 Ix = 43 mA 附近超过了 250 mW 的额定功率。相反，无论电流源 Ix 怎样变化（只要在 0 ~ 50 mA 范围内），100 Ω 电阻上的功率始终未达到 250 mW。事实上，随着电流源电流的增加，它吸收的功率在下降。如果我们需要更精确的结果，可以使用光标工具。光标工具可以从菜单条中选择 Trace, Cursor, Display 激活。图 5.10(b)给出了把两个光标拖动到 42.53 mA 的结果，只有在该电流水平上，64 Ω 电阻上的功率才会超过额定值。降低直流扫描所用步进的大小可以提高曲线的显示精度。

在分析电子电路时这种方法非常有用，比如，对于一个复杂的放大器电路，可分析为获得零输出电压应该采用多大的输入电压。我们还注意到还可以执行其他几种不同类型参数的扫描（包括直流电压扫描）也可以改变温度参数，这在处理包含温度参数的器件模型（如二极管和晶体管）时非常有用。

遗憾的是，在分析含有受控源的电路时，应用叠加定理几乎不会少花时间，因为每次至少要分析含有两个电源的电路：一个独立源和所有的受控源。

必须时刻记住叠加定理的限制。它只能应用于线性响应，所以最常见的非线性响应（功率）不属于叠加定理的应用范围。例如，考虑两个1 V电池与1 Ω电阻串联。显然，提供给电阻的功率是4 W，但是如果错误地应用叠加定理会得到：每个电池单独作用可提供1 W的功率，所以总功率为2 W。这显然是不正确的，但却是一个非常容易犯的错误。

5.2 电源变换

实际电压源

到目前为止，我们考虑的都是理想电压源和电流源，现在应该更接近实际一点，即考虑实际电源。这些电源可以更贴切地表示实际器件。一旦定义了实际电源，就会看到实际电流源和电压源可以彼此替换而不影响电路的其余部分，这样的电源称为等效电源。这种方法既适用于独立源，也适用于受控源，尽管会发现对受控源不像对独立源那样有用。

理想电压源定义为其两端电压与流过它的电流无关的器件。一个1 V直流电源在1 Ω电阻上产生1 A的电流，在1 μΩ电阻上产生1 000 000 A的电流。它可以提供无限的功率。当然，实际上并不存在这样的器件，前面已经知道，仅在较小的电流或功率下实际电压源才可以用理想电压源来表示。例如，汽车电池可以用12 V理想电压源近似，只要它的电流限制在几个安培之内即可[见图5.11(a)]。可是只要试过在前灯点亮的条件下启动发动机的人一定会观察到，让电池提供100 A或更大的发动机启动电流时车灯会变暗。在这种条件下，理想电压源不能很好地表示电池。

为了更好地近似实际器件的性能，必须修改理想电压源，使其能够表示大电流下端电压降低的效应。假定通过实验观察到，当汽车电池没有电流流过时其两端电压为12 V，而当流过电流为100 A时端电压变为11 V，那么该如何对此现象建立模型呢？一个更精确的模型可能是一个12 V的理想电压源串联上一个电阻，该电阻在流过电流为100 A时呈现1 V的电压降，计算得到电阻阻值为1V/100 A = 0.01 Ω。该电阻与理想电压源串联组成一个实际电压源[见图5.11(b)]，因此，我们采用两个理想电路元件（独立电压源和电阻）的串联组合来模拟实际器件。

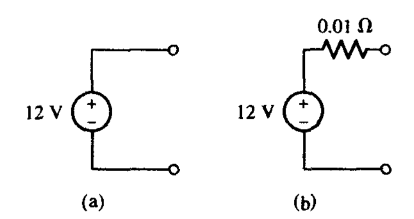


图5.11 (a)表示12 V汽车电池的理想电压源；(b)能够表示大电流下端电压降低效应的精确模型

当然，不能指望在汽车电池内部找到这样的理想元件结构。任何实际器件在其端子上可以表示成一定的电流电压关系。问题是需要构造出理想元件的某种组合，该组合至少在一定的电流、电压和功率范围内能够具有类似的电流电压特性。

在图5.12(a)所示电路中，由两个元件组成的汽车电池实际模型连接到某一负载电阻R_L上。实际电源的端电压与电阻R_L两端的电压相同，标为V_L①。图5.12(b)所示为该实际电源负载电压V_L与负载电流I_L的关系曲线。图5.12(a)电路的KVL方程可以用I_L和V_L写为

① 从这里开始将尽量遵守参数标识规范，用大写字母标记严格的直流量，用小写字母标记含有时变成分的量。但是在描写那些既适用于直流又适用于交流的一般定理时，将继续使用小写字母以强调概念的一般性质。

$$12 = 0.01I_L + V_L$$

因此，

$$V_L = -0.01I_L + 12$$

这是I_L和V_L的线性方程，图5.12(b)所示的曲线为一条直线，线上每一点对应于不同的R_L值。例如，直线的中间点对应于负载电阻等于实际电源的内阻或$R_L = 0.01\ \Omega$。此时，负载电压为理想电源电压的一半。

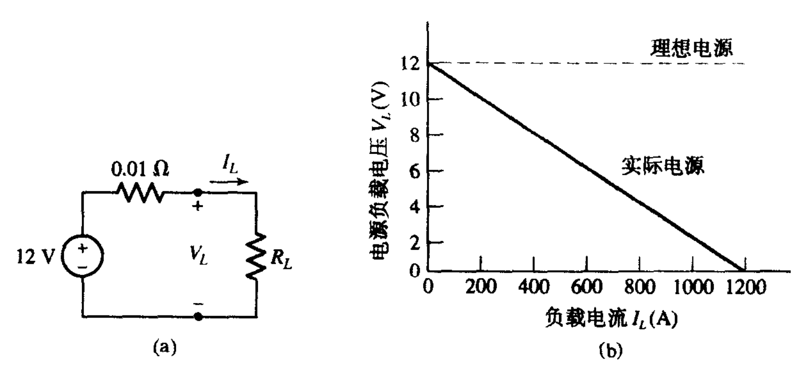


图5.12　(a) 近似表示12 V汽车电池性能的实际电源，它接有负载电阻R_L；(b) I_L和V_L之间呈线性关系

当$R_L = \infty$（负载在任何时候都没有电流流过）时，实际电源开路并且端电压或开路电压为$V_{Loc} =$ 12 V。相反，如果$R_L = 0$，即负载端短路，则负载电流或短路电流$I_{Lsc} = 1200$ A。（实际上，该试验会导致电路短接、电池和连接到电路中的任何其他测量仪器损坏。）

因为对于实际电压源，$I_L - V_L$关系是一条直线，可以注意到V_{Loc}和I_{Lsc}的值唯一地确定了整个$I_L - V_L$曲线。

图5.12(b)所示的水平虚线表示理想电压源的$V_L - I_L$曲线，对任何负载电流值，端电压都为常数。只有当负载电流较小时，实际电源的端电压才比较接近理想电压源的值。

现在考虑如图5.13(a)所示的一般实际电压源。理想电源电压为v_s，电阻R_s称为内阻或输出电阻，它们串联连接。同时必须注意该电阻并不作为一个分立元件而真实存在，只是用来说明当负载电流增大时端电压会减小。它的存在可以更贴切地模拟实际电压源的特性。

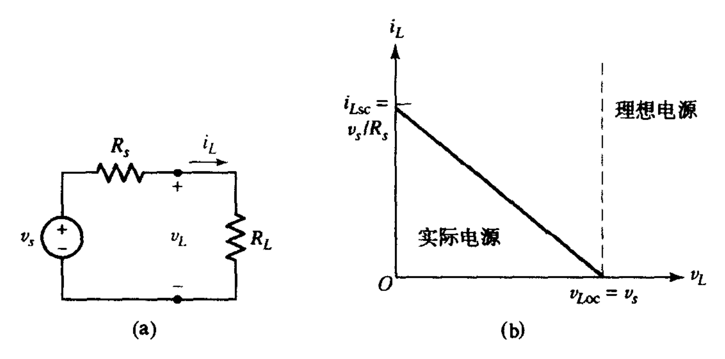


图5.13　(a) 接有负载电阻R_L的一般实际电压源；(b) 实际电压源的端电压随着i_L增大而减小，随着$R_L = V_L/i_L$减小而减小。理想电压源的端电压在任何负载电流下保持不变（同时画出）

v_L与i_L的线性关系为

$$v_L = v_s - R_s i_L \tag{9}$$

曲线如图5.13(b)所示。开路电压（$R_L=\infty, i_L=0$）为

$$v_{L\text{oc}} = v_s \tag{10}$$

短路电流（$R_L=0, v_L=0$）为

$$i_{L\text{sc}} = \frac{v_s}{R_s} \tag{11}$$

这些值是图5.13(b)中直线的两个截点，可以用它们来完整地定义直线。

实际电流源

现实中也不存在理想电流源，没有一个实际器件能够提供不变的电流而不考虑连接到它的负载电阻或它两端的电压大小的。一些晶体管电路可以在很大的负载电阻范围内提供固定的电流，但负载电阻总是很大，以至于流过的电流很小。无限的功率永远是不可能得到的（很遗憾）。

一个实际电流源定义为一个理想电流源与一个内阻R_p的并联，如图5.14(a)所示，图中给出了与负载电阻R_L相关的电流i_L和v_L。由KCL可知

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_p} \tag{12}$$

这也是一个线性方程。开路电压和短路电流分别为

$$v_{L\text{oc}} = R_p i_s \tag{13}$$

和

$$i_{L\text{sc}} = i_s \tag{14}$$

通过改变R_L的大小可以观察到负载电流随负载电压变化的情况，如图5.14(b)所示。直线从短路端（即“西北”端）出发，直到开路端（即“东南”端），对应电阻R_L从零变到无穷大。中点出现在$R_L=R_p$处。显然，只是在较小的负载电压下，负载电流i_L才近似等于理想电流源的电流，此时R_L的值小于R_p。

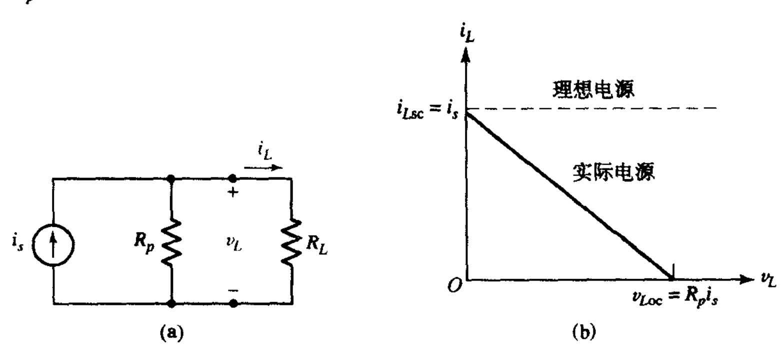


图5.14 (a) 接有负载电阻R_L的一般实际电流源；(b) 实际电流源提供的负载电流和负载电压的函数关系

实际电源的等效

定义了两种实际电源后，现在开始讨论它们的等效电路。在接有相同的R_L时，无论R_L数值为多少，如果两个电源产生的v_L和i_L相同，则定义这两个电源等效。因此在$R_L=\infty$和$R_L=0$时，等

效电源必须提供相同的开路电压和短路电流。换句话说，如果给定两个等效电源，一个是实际电压源，另一个是实际电流源，它们分别封装在只留有一对端点的黑匣子内，那么就没有办法通过测量负载电阻上的电流和电压来判断它是哪种电源。

考虑图 5.15(a)所示的实际电压源和电阻R_L，以及图 5.15(b)所示的实际电流源和电阻R_L组成的电路。通过简单计算可知图 5.15(a)所示电路中负载 R_L 两端的电压为

$$v_L = v_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \qquad [15]$$

通过类似计算可知图 5.15(b)所示电路中负载 R_L 两端的电压为

$$v_L = \left[i_s \frac{R_p}{R_p + R_L} \right] \cdot R_L$$

若使这两个实际电源在电气上等效，必须有

$$R_s = R_p \qquad [16]$$

和

$$v_s = R_p i_s = R_s i_s \qquad [17]$$

其中 R_s 表示两个实际电源的内阻，这是习惯性标注。

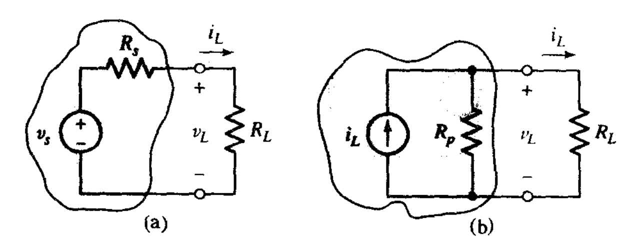


图 5.15　(a) 接有负载电阻 R_L 的给定实际电压源；(b)接有同一负载的等效电流源

我们用图 5.16(a)所示的实际电流源来解释这些概念。因为内阻为 2 Ω，所以等效的实际电压源的内阻也为 2 Ω，包含在实际电压源内的理想电压源的电压为(2)(3) = 6 V。等效的实际电压源如图 5.16(b)所示。

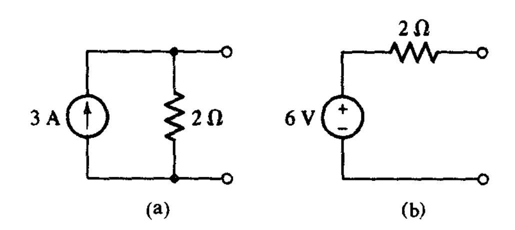


图 5.16　(a) 给定的实际电流源；(b) 等效的实际电压源

为了检查等效性，假设两个电源接 4 Ω 电阻。在两种情况下，与 4 Ω 电阻关联的电流都为 1 A，电压都为 4 V，功率都为 4 W。但是，必须非常注意理想电流源提供的总功率是 12 W，而理想电压源只提供 6 W 的功率。此外，实际电流源内阻吸收 8 W 功率，而实际电压源内阻只吸收 2 W 功率，因此可以看出两个实际电源只是在输出到负载端上的情况等效，它们内部并不等效。

例题 5.4 将图 5.17(a)所示电路中的 9 mA 电源变换成等效电压源后，计算流过 4.7 kΩ 电阻的电流。

解： 该等效电源由一个(9 mA) × (5 kΩ) = 45 V 的独立电压源和一个 5 kΩ 的电阻串联组成，如图 5.17(b)所示。

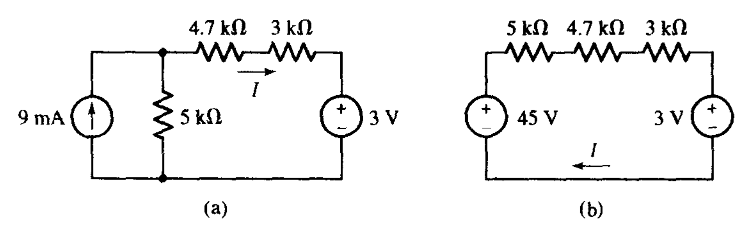


图 5.17 (a) 包含电压源和电流源的电路；(b) 9 mA 电源变换成等效电压源后的电路

写出该回路的 KVL 方程为

$$-45 + 5000I + 4700I + 3000I + 3 = 0$$

可以很容易求出电流 I = 3.307 mA。

练习

5.3 电路如图 5.18 所示，对电压源进行电源变换后，计算流过 47 kΩ 电阻的电流 I_x。

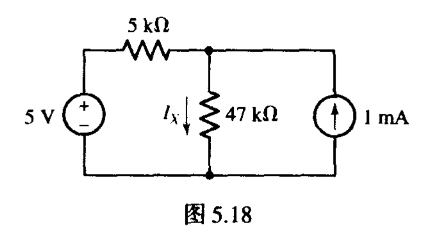


图 5.18

答案： 192 μA。

例题 5.5 首先利用电源变换简化图 5.19(a)所示的电路，然后计算流过 2 Ω 电阻的电流。

解： 首先将每个电流源变换成电压源［见图 5.19(b)］，其目的是将该电路转换成单回路电路。

必须注意保留 2 Ω 的电阻，原因有两个：首先，它两端的电压是受控源的控制变量；其次，我们要得到流过它的电流。但是，由于 17 Ω 电阻和 9 Ω 电阻串联，因此可以将它们合并。同样，可以将 3 Ω 电阻和 4 Ω 电阻合并成一个 7 Ω 电阻，并用它将 15 V 电源变换成 15/7 A 的电源，如图 5.19(c)所示。

最后再进行一步简化，将两个 7 Ω 电阻合并成一个 3.5 Ω 电阻，然后将 15/7 A 电流源变换成 7.5 V 电压源，结果得到如图 5.19(d)所示的单回路电路。

利用 KVL 可以求得电流 I

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

其中，

$$V_x = 2I$$

因此，

$$I = 21.28\ \text{mA}$$

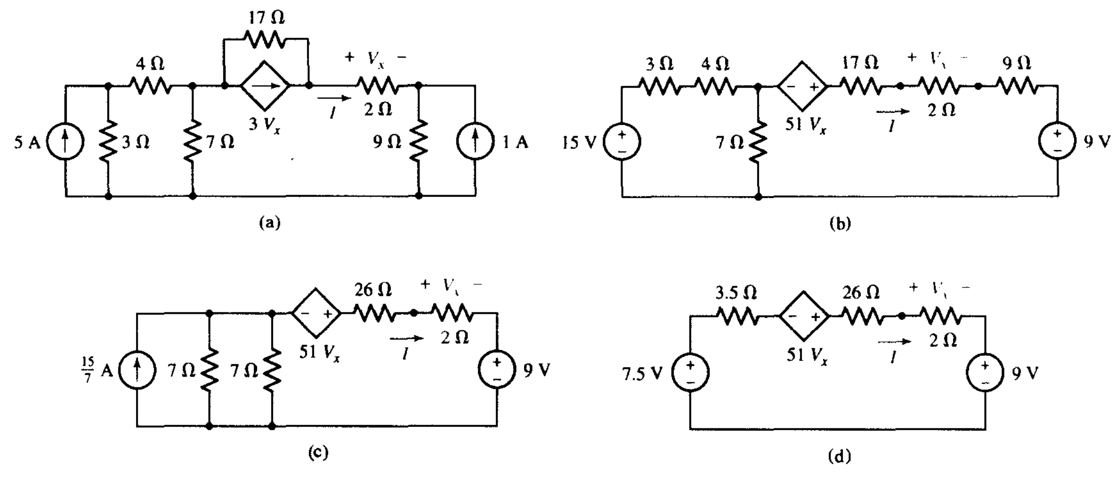


图5.19　(a) 包含两个独立电流源和一个受控源的电路；(b) 将每个电源变换成电压源后的电路；(c) 进一步合并后的电路；(d) 最终电路

练习

5.4　电路如图5.20所示，重复利用电源变换计算1 MΩ电阻两端的电压V。

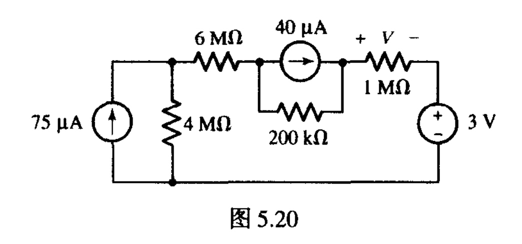


图5.20

答案：27.23 V。

几个关键点

我们以对实际电源和电源变换的具体观察结果作为总结。首先，当对电压源进行变换时，必须确保电源实际上与考虑的电阻串联连接。例如，参见图5.21所示电路，利用10 Ω电阻对电压源进行电源变换非常有效，因为它们串联。但是尝试着对60 V电源和30 Ω电阻进行电源变换是不正确的，这是一个很常见的错误类型。

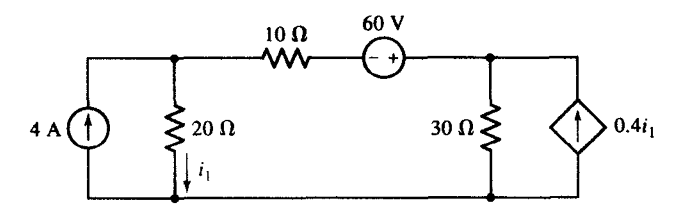


图5.21　如何确定是否可以执行电源变换的电路

同样，当对电流源和电阻组合进行变换时，必须确保它们并联连接。考虑图5.22(a)所示电路中的电流源，因为它与3 Ω电阻并联，因此可以对它们进行电源变换，但是变换后可能会不知道电阻该放在何处。在这种情况下，首先将需要变换的元件重画成如5.22(b)所示的电路，然后可以正确得到变换后的电压源和电阻的串联，如图5.22(c)所示，电阻可以画在电压源的上面，也可以画在下面。

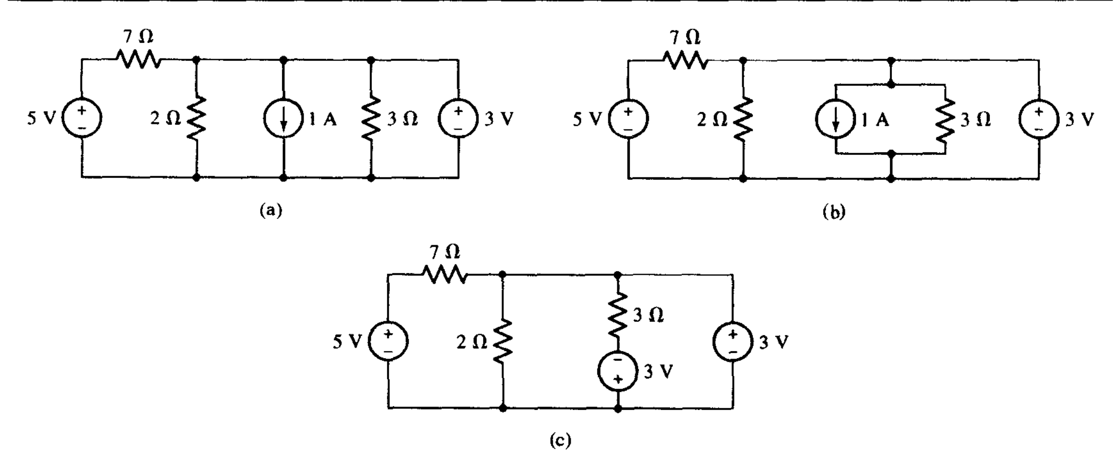


图 5.22 (a) 包含电流源的电路，该电流源可以变换到电压源；(b) 为了避免错误，重画后得到的电路；(c) 变换后的电源 / 电阻组合

有时也需要考虑电流源与电阻串联的情况以及电压源和电阻并联的情况，虽然这两种情况并不常见。首先考虑图 5.23(a)所示的简单电路，其中我们只关心电阻 R_2 两端的电压。我们注意到不管电阻 R_1 为多大，$V_{R_2} = I_x R_2$。尽管可以对该电路进行不合适的电源变换，但是实际上可以忽略电阻 R_1（只要我们对它不感兴趣）。类似的情况是电压源与电阻的并联，如图 5.23(b)所示。同样，如果只对电阻 R_2 的某些量感兴趣，我们可能会尝试着对电压源和电阻 R_1 进行电源变换（这是奇怪的并且也是不正确的）。实际上，如果只关心 R_2，我们就可以忽略掉电阻 R_1，它的存在不会改变电阻 R_2 两端的电压以及流过它的电流和消耗的功率。

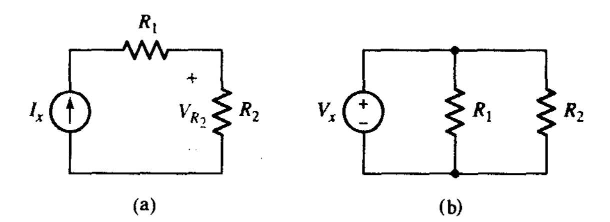


图 5.23 (a) 与电阻 R_1 相串联的电流源电路；(b) 一个电压源与两个电阻并联

电源变换的小结

1. 在电源变换中，一般的目标是在最终电路中只出现电压源或者只出现电流源。特别是进行这样的变换可以使节点分析或网孔分析变得更简单。
2. 可以连续使用电源变换，最终使电阻和电源合并以简化电路。
3. 在电源变换过程中，电阻值不能改变，但它不是同一个电阻。这意味着在执行电源变换时，与原来的电阻相关的电流或电压将丢失。
4. 如果与某个电阻相关的电压或电流是受控源的控制变量，那么该电阻不能包含在任何电源变换中。原来的电阻必须在最后的电路中完好地保留下来。
5. 如果与某个元件关联的电压或电流是我们所关心的变量，那么该元件不能包含在任何电源变换中。原来的元件必须在最终电路中完好地保留下来。
6. 在电源变换时，电流源的箭头对应电压源的“+”端。
7. 对电流源和电阻进行电源变换，要求这两个元件并联。
8. 对电压源和电阻进行电源变换，要求这两个元件串联。

5.3　戴维南和诺顿等效电路

既然已经介绍了电源变换和叠加定理,则可以导出两个能够对许多线性电路进行简化的分析方法。第一个以从事电信研究的法国工程师 M. L. Thévenin 命名，他于 1883 年发表了戴维南定理；第二个可以认为是第一个的推论，归功于 E. L. Norton —— 一位在贝尔电话实验室工作的科学家。

假设我们只需对电路的一部分进行分析。比如，某个电路可能由许多电源和电阻组成［见图 5.24(a)］, 我们可能需要求该电路除了单一负载电阻以外的剩余部分传输到该负载的电流、电压和功率。或者，可能希望求出负载电阻取不同值时的响应。戴维南定理告诉我们可以用一个独立电压源和一个电阻的串联来替换除负载电阻以外的电路部分［见图 5.24(b)］, 而在负载电阻上测量得到的响应不会改变。利用诺顿定理可以得到由一个独立电流源和电阻并联组成的等效电路［见图 5.24(c)］。

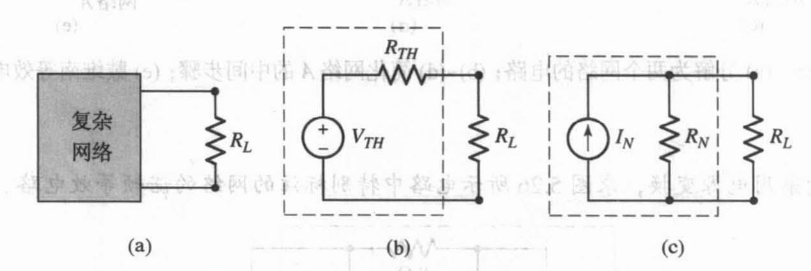


图 5.24　(a) 包含负载电阻 R_L 的复杂网络; (b) 戴维南等效网络接至负载电阻 R_L; (c) 诺顿等效网络接至负载电阻 R_L

很明显，戴维南和诺顿定理的一个主要应用就是用一个非常简单的等效电路替换一大块电路——它常常是复杂的电路。利用新得到的简单电路可以快速计算原来电路提供给负载的电流、电压和功率。此举还有助于选择最佳的负载电阻值。例如在晶体管功率放大器中，利用戴维南或诺顿等效电路能够确定从放大器输出并传递给扬声器的最大功率。

例题 5.6　考虑图 5.25(a)所示电路，确定网络 A 的戴维南等效电路，并计算传递给负载电阻 R_L 的功率。

解： 虚线区域将电路分解为网络 A 和网络 B。我们感兴趣的主要是网络 B，它只包含负载电阻 R_L。网络 A 可以通过连续的电源变换进行简化。

首先把 12 V 电源和 3 Ω 电阻看成实际电压源，并由 4 A 电源与 3 Ω 电阻并联组成的实际电流源替换［见图 5.25(b)］。然后将并联电阻合并成 2 Ω 电阻［见图 5.25(c)］，将得到的实际电流源变换为实际电压源［见图 5.25(d)］。最后得到图 5.25(e)所示电路。

从负载电阻 R_L 的角度看，这时的网络 A（戴维南等效）等效于原始网络 A，从读者角度看，这时的电路更简单，可以更容易地计算出传输到负载的功率为

$$P_L = \left(\frac{8}{9+R_L}\right)^2 R_L$$

再进一步，从等效电路可以看出 R_L 两端能够得到的最大电压为 8 V，此时 $R_L = \infty$。将网络 A 变换成一个实际电流源（诺顿等效）可以看出 R_L 的最大电流为 8/9 A，此时 $R_L = 0$。这两点在原来的电路中很难得出。

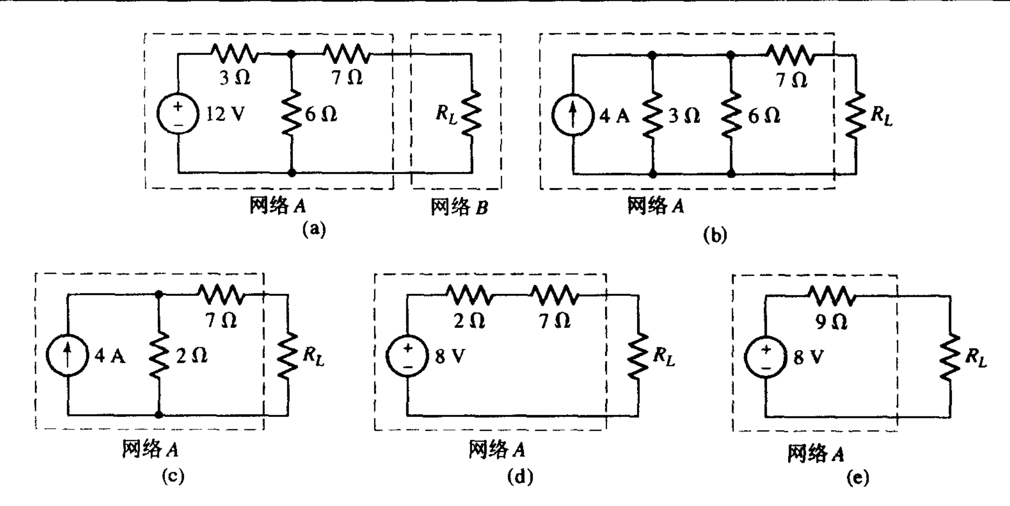


图 5.25 (a) 分解为两个网络的电路；(b)~(d) 简化网络 A 的中间步骤；(e) 戴维南等效电路

练习

5.5 连续采用电源变换，求图 5.26 所示电路中特别标注的网络的诺顿等效电路。

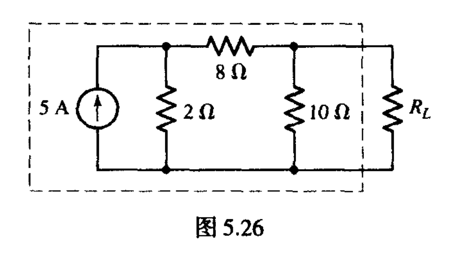


图 5.26

答案：1 A，5 Ω。

戴维南定理

在例题 5.6 中，利用电源变换方法求戴维南或诺顿等效网络很有效，但是当电路包含受控源或由大量的元件组成时，它就变得不实用了。另一种方法是采用戴维南定理（或诺顿定理）。我们用一个正式的过程来表述该定理，然后考虑几种方法使其能够更有效地解决我们遇到的问题。

戴维南定理说明①

1. 给定任何线性电路，将它分成两个网络：A 和 B，用两根导线将它们相连。A 是将要简化的网络，B 原封不动地保留。
2. 断开网络 B。此时网络 A 两端的电压定义为 v_{oc}。
3. 将网络 A 中的所有独立源关闭或置零，形成一个无源网络。受控源保持不变。
4. 用一个电压值为 v_{oc} 的独立电压源与该无源网络串联连接。不必使电路完整，让另外两个端子保持断开。
5. 将网络 B 接入到新的网络 A 的两端。B 中所有的电流和电压将保持不变。

注意，如果每个网络都包含受控源，那么受控源的控制变量必须与受控源在同一个网络中。

① 戴维南定理的证明比较长，因此把它放在附录 3 中，有兴趣的读者可以查阅。

下面来看戴维南定理是否可以成功地应用到图5.25所示的电路中。在例题5.6中已经得到R_L左边电路的戴维南等效，然而是否有更容易的方法可以得到相同的结果呢？

例题5.7　采用戴维南定理求图 5.25(a)所示电路中 R_L 左边电路的戴维南等效电路。

解： 首先将 R_L 断开。注意在图 5.27(a)所示电路中，没有电流流过 7 Ω 电阻，因此 6 Ω 电阻两端的电压为 V_{oc}（7 Ω 电阻上没有电流流过，因此它两端没有电压降），根据分压可得

$$V_{oc} = 12\left(\frac{6}{3+6}\right) = 8\ \text{V}$$

将网络 A 置零（即用短路线代替 12 V 电源），向无源网络看进去，其电路为 7 Ω 电阻串联 6 Ω 和 3 Ω 电阻的并联，组合形式如图 5.27(b)所示。

因此该无源网络可以用一个 9 Ω 电阻表示，该电阻为网络 A 的戴维南等效电阻。戴维南等效电路为 V_{oc} 与 9 Ω 电阻的串联，与前面的结果一致。

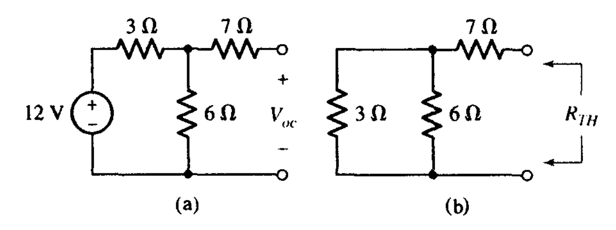


图 5.27　(a) 将图 5.25(a)所示网络 B 断开后的电路，外接端口上的电压为 V_{oc}；(b) 令图 5.25(a)所示网络中的独立源为零，从连接网络 B 的端口处向网络 A 看进去，以确定网络 A 的等效电阻

练习

5.6　利用戴维南定理求图 5.28 所示电路中流过 2 Ω 电阻的电流（提示：将 2 Ω 电阻作为网络 B）。

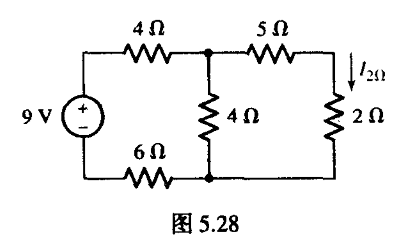


图 5.28

答案： $V_{TH} = 2.571$ V, $R_{TH} = 7.857$ Ω, $I_{2\Omega} = 260.8$ mA。

几个关键点

前面介绍的求等效电路的方法与网络 B 完全无关，因为事先已说明要除去网络 B，并测量网络 A 产生的开路电压，该操作与网络 B 毫不相干。在定理中提到网络 B 只是想表明：不管连接到网络 A 的元件是一个怎样的组合（网络 B 代表一般网络），都可以获得网络 A 的等效电路。

关于该定理有几点需要强调：

- 对网络 A 或网络 B 的唯一限制是，网络 A 中所有受控源的控制变量也必须包含在网络 A 中。对于网络 B 也一样。

- 对网络A或网络B的复杂性没有限制。它们允许包含独立电压源或电流源、线性受控电压源或电流源、电阻或任何其他线性电路元件的任意组合。
- 无源网络A可以用单个等效电阻R_{TH}来表示，该电阻称为戴维南等效电阻。无论无源网络A中是否存在受控源，这一点都适用，稍后将给出解释。
- 戴维南等效电路包含两个元件：电压源和串联电阻。其中任何一个都可以为零，但这并不常见。

诺顿定理

诺顿定理与戴维南定理非常相似，现表述如下：

1. 给定任何一个线性电路，将它分成两个网络：A和B，用两根导线将它们相连。A是将要简化的网络，B原封不动地保留。如前所述，如果任何一个网络包含受控源，那么受控源及其控制变量必须在同一个网络中。
2. 将网络B断开，并将网络A的两个端子短接。定义流过网络A的短路电流为i_{sc}。
3. 将网络A中的所有独立源关闭或置零，形成一个无源网络。受控源保持不变。
4. 用一个电流值为i_{sc}的独立电流源与该无源网络并联连接。留出两个未连接的端子。
5. 将网络B接入到新的网络A的两端。B中的所有电流和电压将保持不变。

线性网络的诺顿等效电路为诺顿电流源i_{sc}与戴维南电阻R_{TH}的并联。因此，可以看出实际上可以通过对戴维南等效电路进行电源变换得到网络的诺顿等效电路。这样就得到了v_{oc}，i_{sc}和R_{TH}之间的直接关系：

$$v_{oc} = R_{TH} i_{sc} \quad [18]$$

在包含受控源的电路中，经常会发现通过求开路电压和短路电流以及R_{TH}的值来确定戴维南或诺顿等效电路更加方便，因此最好熟练掌握求开路电压和短路电流（即使是在下面的简单例题中）。如果分别求得了戴维南和诺顿等效电路，那么可以用式[18]来检验。

下面来考虑3个求戴维南或诺顿等效电路的例子。

例题5.8 求图5.29(a)所示网络中连接1 kΩ电阻的网络的戴维南和诺顿等效电路。

解： 从题目可知，网络B为1 kΩ电阻，网络A为除1 kΩ电阻外的剩余电路。该电路不包含受控源，求戴维南等效电路的最简单方法是直接求无源网络的R_{TH}，然后求V_{oc}或I_{sc}。

首先确定开路电压，在本例题中，通过叠加定理可以很容易求得。当只有4 V的电源工作时，开路电压为4 V；当只有2 mA电源工作时，开路电压为2 mA × 2 kΩ = 4 V（因为1 kΩ电阻断开，因此没有电流流过3 kΩ电阻）。当两个电源都工作时，可知$V_{oc} = 4 + 4 = 8$ V。

接着将两个独立源置零得到网络A的无源形式。由于4 V电源短路，2 mA电源开路，如图5.29(b)所示，因此电路就变成2 kΩ电阻和3 kΩ电阻的串联，或者说，等效电阻为5 kΩ。

这样就确定了戴维南等效电路，如图5.29(c)所示，并且从该等效电路可以很快得到图5.29(d)所示的诺顿等效电路。作为检验，对所给电路［见图5.29(e)］求I_{sc}。利用叠加定理和分流原理可得

$$I_{sc} = I_{sc}|_{4\,V} + I_{sc}|_{2\,mA} = \frac{4}{2+3} + (2)\frac{2}{2+3}$$
$$= 0.8 + 0.8 = 1.6\ mA$$

至此检验完成[①]。

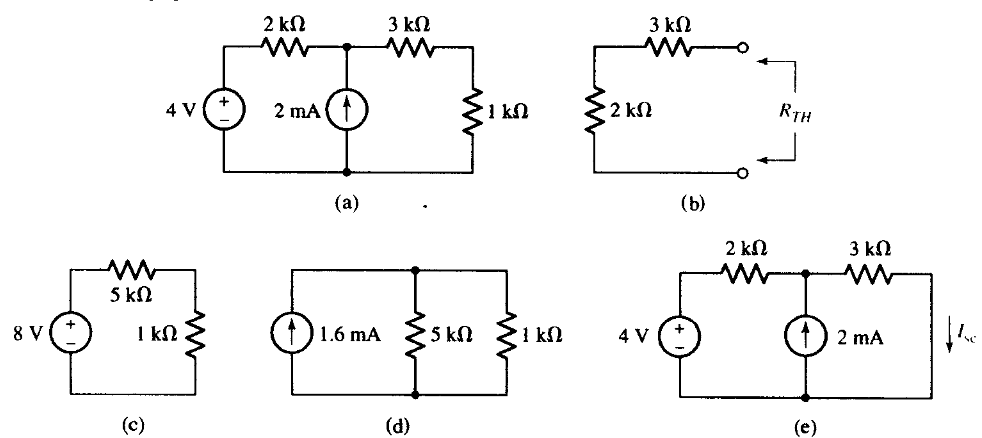


图 5.29 (a) 给定电路，其中1 kΩ电阻指定为网络B; (b) 所有独立源置零后的网络A; (c) 网络A的戴维南等效; (d) 网络A的诺顿等效; (e) 求I_{sc}的电路

练习

5.7 确定图5.30所示电路的戴维南和诺顿等效电路。

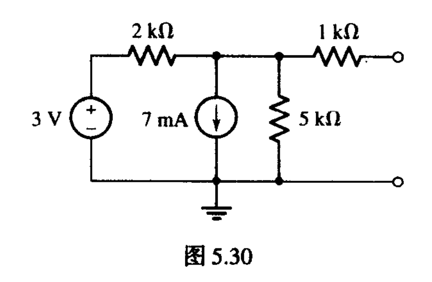


图 5.30

答案: −7.857 V, −3.235 mA, 2.429 kΩ。

存在受控源的情况

从技术上讲，在利用戴维南定理或诺顿定理时并不一定要有网络B。即使该网络的两个端子没有连接到其他网络，也可以要求得到某个网络的等效电路。如果网络B不属于简化过程所涉及的网络，但是它包含受控源，那么我们必须小心处理。在这种情况下，控制变量及与其关联的元件必须包含在网络B中，而不能包含在网络A中，否则无法分析最后的电路，因为控制变量将会丢失。

如果网络A包含受控源，那么必须确保控制变量及与其关联的元件不被包含在网络B中。到目前为止，我们只考虑包含电阻和独立源的电路。尽管从技术上讲，当创建戴维南或诺顿等效电路时受控源保留在无源网络中是正确的，然而实际上这并不能得到任何简化。我们想要得到的是一个独

① 注意：如果在所有电路中电阻都以kΩ为单位，电压以V为单位，那么电流总是自动地以mA为单位。

立电压源与单个电阻的串联或一个独立电流源与单个电阻的并联，换句话说，是两个元件的等效。在下面的例题中，讨论将包含把受控源和电阻的网络化简成单个电阻的方法。

例题 5.9 确定图 5.31(a)所示电路的戴维南等效电路。

解： 为了求得 V_{oc}，我们注意到 $v_x = V_{oc}$，而且受控源电流必定流过 2 kΩ 电阻，这是因为没有电流能够流过 3 kΩ 电阻。围绕外环应用 KVL：

$$-4 + 2 \times 10^3 \left(-\frac{v_x}{4000}\right) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0$$

和

$$v_x = 8\ \text{V} = V_{oc}$$

然后，根据戴维南定理，等效电路由无源网络 A 与 8 V 电源串联构成，如图 5.31(b)所示。该结果虽然正确，但不够简单，也不太有用。在线性电阻网络情况下，一定能找到无源网络 A 的非常简单的等效电路，即 R_{TH}。

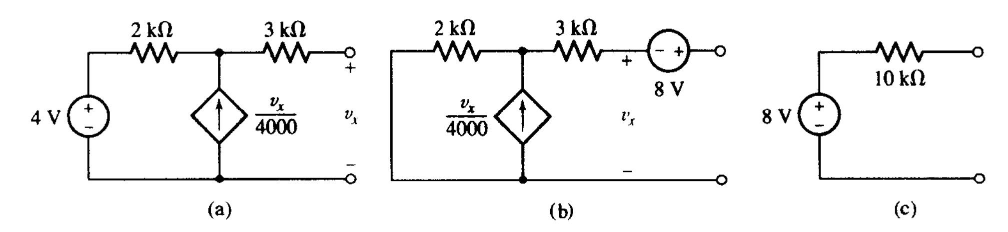


图 5.31 (a) 需要求戴维南等效电路的网络；(b) 可能得到的无用的戴维南等效电路形式；(c) 该线性电阻网络的最佳戴维南等效形式

受控源的存在使得我们不能通过电阻合并直接得到无源网络的 R_{TH}，因此需要求 I_{sc}。即将图 5.31(a)所示电路的输出端短路，显然有 $V_x = 0$，则受控电流源为零，因此 $I_{sc} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8$ mA。由此可得

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{8}{(0.8 \times 10^{-3})} = 10\ \text{k}\Omega$$

可以得到图 5.31(c)所示的可接受的戴维南等效电路。

练习

5.8 求图 5.32 所示网络的戴维南等效电路（提示：对受控源进行电源变换将有助于求解）。

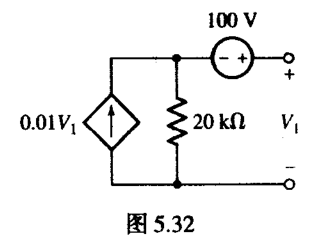


图 5.32

答案： −502.5 mV, −100.5 Ω。

作为最后一个例子，考虑包含受控源但不包含独立源的网络。

例题 5.10　求图 5.33(a)所示电路的戴维南等效电路。

解： 因为最右边端子已经开路，$i=0$，因此，受控源为零，所以 $v_{oc}=0$。

接着求该二端网络表示的 R_{TH} 的值，但是不能采用求解 v_{oc} 和 i_{sc} 进而获得它们的商的方法，因为网络不含独立源，v_{oc} 和 i_{sc} 均为零，因此需要采用一点技巧。

外加一个 1 A 电源，测量由此产生的电压 v_{test}，然后设 $R_{TH}=v_{test}/1$。参见图 5.33(b)，可以得到 $i=-1$ A。采用节点分析法：

$$\frac{v_{test}-1.5(-1)}{3}+\frac{v_{test}}{2}=1$$

可得

$$v_{test}=0.6\ \text{V}$$

因此，

$$R_{TH}=0.6\ \Omega$$

戴维南等效电路如图 5.33(c)所示。

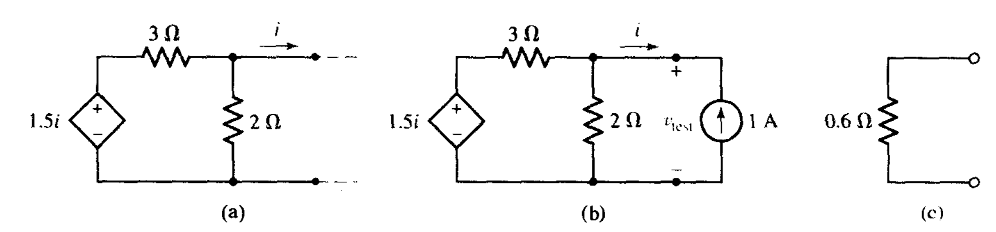


图 5.33　(a) 不包含独立源的网络；(b) 获得 R_{TH} 的虚拟测量；(c) 原始电路的戴维南等效

过程的简短回顾

我们给出了 3 个确定戴维南或诺顿等效电路的例题。第一个例子（见图 5.29）只包含独立源和电阻，可以采用几种不同的方法。一种方法是计算无源网络的 R_{TH}，然后计算有源网络的 V_{oc}。也可以求 R_{TH} 和 I_{sc} 或者 V_{oc} 和 I_{sc}。

第二个例子（见图 5.31）包含独立源和受控源，采用的方法是求 V_{oc} 和 I_{sc}。因为受控源不能置零，所以不容易求得无源网络的 R_{TH}。

最后一个例子不包含任何独立源，因此戴维南和诺顿等效电路不包含独立源。通过施加 1 A 电源然后计算 $v_{test}=1\times R_{TH}$ 可求得 R_{TH}。也可以施加 1 V 电源，确定 $i=1/R_{TH}$，求 R_{TH}。这两种方法可用于任何含受控源的电路，但是先要将所有独立源置零。

另外两种方法具有一定的吸引力，因为它们适用于所考虑的 3 种网络类型中的任何一种。首先用电压源 v_s 取代网络 B，定义离开其正端的电流为 i，然后分析网络 A 以获得 i，按照 $v_s=ai+b$ 的形式写出方程，因此 $a=R_{TH}$，$b=v_{oc}$。

也可以施加一个独立源 i_s，设它的电压为 v，然后确定 $i_s=cv-d$，其中 $c=1/R_{TH}$，$d=i_{sc}$（负号是由于假定两个电流源箭头都指向同一个节点）。最后两个方法是通用方法，但是其他方法可能更容易或更快地得到结果。

尽管本书几乎完全专注于线性电路的分析，但是我们应当知道，如果网络 B 为非线性，只要网络 A 为线性，戴维南和诺顿定理也都有效。

实际应用——数字万用表



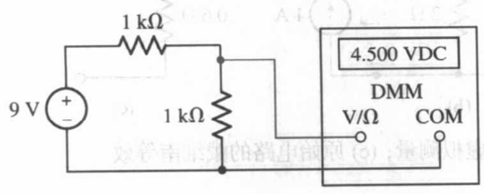
图 5.34 手持数字万用表

最常用的电子测试设备是DMM，即数字万用表（见图5.34），我们可以用它来测量电压、电流和电阻值。

进行电压测量时，从DMM引出的两根导线连接在合适的电路元件两端，如图5.35所示。正参考端标有“V/Ω”符号，而负参考端（通常指公共端）一般标有“COM.”字样。习惯用法是红笔表示正参考端，而黑笔表示公共端。

从戴维南和诺顿等效电路的讨论可知，很显然DMM有它自己的戴维南等效电阻。该等效电阻与电路并联，并且其值会影响测量结果（见图5.36）。在测量电压时，DMM不向被测电路提供功率，因此其戴维南等效电路只包含一个电阻，称为R_{DMM}。

一个高性能的DMM的输入电阻通常为10 MΩ或更高，因此测量电压V出现在1 kΩ‖10 MΩ = 999.9 Ω两端。根据分压原理可求得V = 4.4998 V，比预期的4.5 V略小，因此电压表有限的输入电阻在测量时引入了一个小误差。



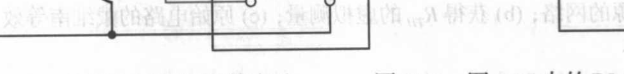


图 5.35 测量电压时的连接方法

图 5.36 图5.35中的DMM用它的戴维南等效电阻R_{DMM}表示

为了测量电流，DMM必须与电路元件串联连接，通常要求将导线切开（见图5.37），即DMM的一根导线接到表的公共端，另一根接到通常标有“A”（表示电流测量）的一端。同样，在这种测量中，DMM不向电路提供功率。

从该图可以看到DMM的戴维南等效电阻（R_{DMM}）与电路串联，因此它的值会影响测量结果。写出该回路的简单KVL方程：

$$-9 + 1000I + R_{\text{DMM}}I + 1000I = 0$$

注意：因为已经将万用表重新配置成电流测量，因此戴维南等效电阻与电压测量时的等效电阻不同。实际上，理想的R_{DMM}要求在电流测量时为0 Ω，在电压测量时为∞。如果此时R_{DMM}为0.1 Ω，则可以看到测量得到的电流I为4.4998 mA，与预期的4.5 mA只有微小的差别。根据电压表所能显示的位数，在测量时DMM的非零电阻的影响可能觉察不到。

可以用同一个电表测量电阻，只要在测量过程中没有独立源参与工作即可。在内部，一个已知电流流过被测电阻，用电压表电路测量产生的电压。用诺顿等效电路替换DMM（现在包含一个工作的独立电流源以产生预定的电流），可见R_{DMM}与未知电阻R并联（见图5.38）。

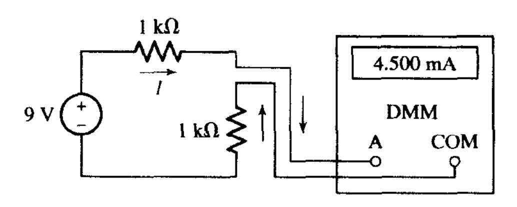


图 5.37　测量电流时的 DMM 连接

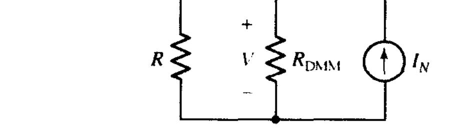


图 5.38　用诺顿等效电路取代电阻测量接法时的 DMM，显示 R_{DMM} 与未知的待测电阻 R 相并联

实际上，DMM 测量的是 $R \| R_{DMM}$。如果 $R_{DMM} = 10\ \text{M}\Omega$，$R = 10\ \Omega$，那么 $R_{measured} = 9.999\ 99\ \Omega$，在大多数情况下，这足够精确了。但是，如果 $R = 10\ \text{M}\Omega$，那么 $R_{measured} = 5\ \text{M}\Omega$，因此 DMM 的输入电阻实际上限制了所能测量的电阻值的上限，必须采用特殊的方法来测量比较大的电阻。需要注意的是，如果数字万用表是可编程的并且知道 R_{DMM} 的值，则可以对结果进行补偿，以测量较高阻值的电阻。

练习

5.9　求图 5.39 所示网络的戴维南等效电路（提示：用 1 V 测试电源）。

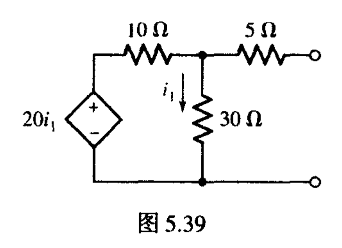


图 5.39

答案：$I_{test} = 50\ \text{mA}, R_{TH} = 20\ \Omega$。

5.4　最大功率传输

考察实际电压源或电流源可以得出一个非常有用的功率定理。对于图 5.40 所示的实际电压源，传输给负载 R_L 的功率为

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2} \qquad [19]$$

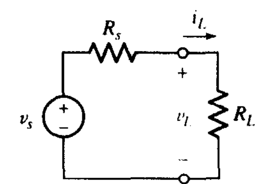


图 5.40　实际电压源和负载电阻 R_L 的连接

为了求得从给定实际电源获得最大功率的 R_L 的值，将上式对 R_L 求导：

$$\frac{d\,p_L}{d\,R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

并令导数为零，可得

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

或者

$$R_s = R_L$$

因为$R_L = 0$和$R_L = \infty$都将使功率最小（$p_L = 0$），并且已经推导出实际电压源和电流源之间的等效，因此可以证明下面的最大功率传输定理：

当$R_L = R_s$时，一个与电阻R_s串联的独立电压源，或一个与电阻R_s并联的独立电流源向负载电阻R_L提供最大功率。

读者也可以利用网络的戴维南等效电阻来认识最大功率传输定理：

当R_L等于网络的戴维南等效电阻时，网络提供给负载电阻R_L的功率最大。

因此，最大功率传输定理指出，2 Ω电阻从图5.16所示的两种实际电源吸收最大功率（4.5 W），而在图5.11中，0.01 Ω的电阻获得最大功率（3.6 kW）。

从一个电源获得最大功率和给负载提供最大功率之间有一个明显的不同。如果负载网络的戴维南等效电阻等于它所连接的网络的戴维南等效电阻，那么负载网络将从它所连接的那个网络获得最大功率。负载电阻的任何变化都将减小传输给负载的功率。但是只考虑网络本身的戴维南等效电路时，如果从电压源获得最大可能的电流（将网络两端短路即可），那么将从该电压源获得最大可能的功率，只是在这种极端条件下负载获得的功率为零（此时负载为短路），因为$p = i^2R$，并且该网络两端被短路使得$R = 0$。

对式[19]应用一点代数运算以及考虑最大功率传输要求，即$R_L = R_s = R_{TH}$，可得

$$p_{\max}\big|_{\text{提供给负载}} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

其中，v_{TH}和R_{TH}是图5.40所示电路中的实际电压源，同时它也可以是一些具体电源的戴维南等效电路。

人们经常会对最大功率定理产生误解。该定理有助于选择一个最优的负载，使得该负载可以吸收最大的功率。如果已经指定负载电阻，那么最大功率定理就没有任何帮助。如果可以影响连接到负载的网络的戴维南等效电阻，那么使它等于负载并不能保证有最大功率传输到负载上。考虑戴维南电阻上的功率损失可以证实这一点。

例题5.11 图5.41所示电路为共发射极双极型晶体管放大器的模型。选择负载电阻，使从放大器传输给该负载的功率最大，并计算实际吸收的功率。

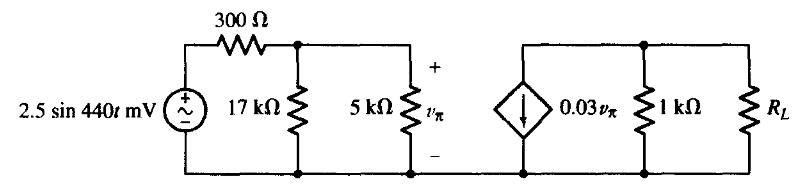
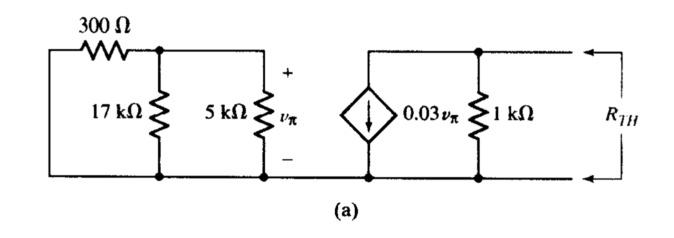
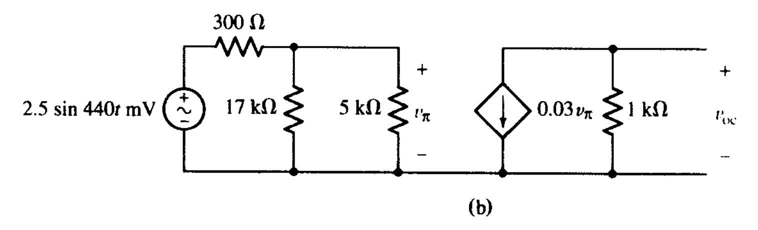


图5.41 共发射极放大器的小信号模型，负载电阻未指定

解： 因为要确定负载电阻，因此可应用最大功率传输定理。第一步求剩余电路的戴维南等效电路。首先确定戴维南等效电阻，要求移去R_L并将独立电源短路，如图5.42(a)所示。



(a)



(b)

图 5.42　(a) 移去 R_L，独立电源短路后的电路；(b) 求 v_{TH} 的电路

因为 $v_\pi = 0$，受控源为开路，因此 $R_{TH} = 1\ \text{k}\Omega$。可以在 1 kΩ 电阻两端接上一个 1 A 的电流源来验证，此时 v_π 仍然为零，因此受控源仍然不工作，从而不对 R_{TH} 产生影响。

为了使传输给负载的功率最大，R_L 必须设为 $R_{TH} = 1\ \text{k}\Omega$。

为了求 v_{TH}，考虑图 5.42(b)所示电路，它是将 R_L 移走后得到的电路（见图 5.41）。可以写出

$$v_{\text{oc}} = -0.03 v_\pi (1000) = -30 v_\pi$$

其中，电压 v_π 可以通过简单的分压原理得到：

$$v_\pi = (2.5 \times 10^{-3} \sin 440t) \left(\frac{3864}{300 + 3864} \right)$$

因此戴维南等效电路为 −69.6 sin440*t* mV 的电压与 1 kΩ 电阻的串联。

最大传输功率为

$$p_{\max} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = 1.211 \sin^2 440t\ \ \mu\text{W}$$

练习

5.10　考虑图 5.43 所示的电路。

(a) 如果 $R_{\text{out}} = 3\ \text{k}\Omega$，求传输给该电阻的功率。

(b) 能够传输给任何 R_{out} 的最大功率为多少？

(c) 能够得到 20 mW 功率的两个不同的 R_{out} 值是多大？

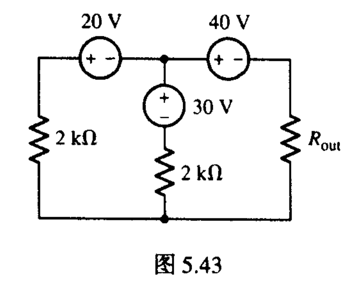


图 5.43

答案：230 mW；306 mW；59.2 kΩ 和 16.88 Ω。

5.5 Δ-Y 转换

前面已经讲到，对电阻的串并联组合常常能够简化电路。在不存在串并联的情况下，通常可以使用电源变换来简化电路。根据网络理论，存在另一种有用的技术，称为Δ-Y 转换。

考虑图5.44所示电路，无法采用串并联组合来进行电路的简化［注意图5.44(a)和图5.44(b)相同，图5.44(c)和图5.44(d)相同］，并且不存在任何电源，也不能进行电源变换。但是，这两种类型之间的电路却是可以互相转换的。

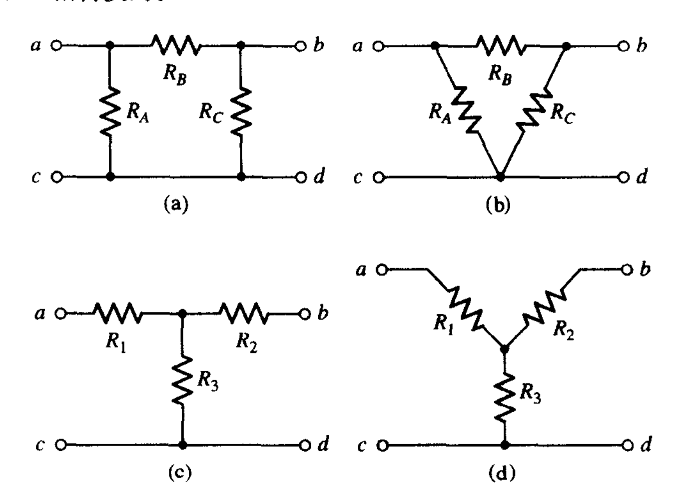


图5.44 (a) 包含3个电阻的Π形网络；(b) 画成Δ形而与(a)相同的网络；(c) 3个电阻组成的T形网络；(d) 画成Y形而与(c)相同的网络

首先定义两个电压 v_{ab}，v_{cd} 和3个电流 i_1, i_2, i_3，如图5.45所示。如果这两个网络等效，那么端电压和电流必须相等（在T形网络中没有电流 i_2）。通过网孔分析可定义 R_A, R_B, R_C 和 R_1, R_2, R_3 之间的一组关系。比如，对于图5.45(a)所示的网络，可以写出

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \qquad [20]$$

$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \qquad [21]$$

$$-R_C i_2 + R_C i_3 = -v_{bc} \qquad [22]$$

对于图5.45(b)所示的网络：

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \qquad [23]$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \qquad [24]$$

接下来利用式[21]将式[20]和式[22]中的 i_2 消去，可得

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \qquad [25]$$

和

$$-\frac{R_A R_C}{R_A+R_B+R_C} i_1+\left(R_C-\frac{R_C^2}{R_A+R_B+R_C}\right) i_3=-v_{bc} \qquad [26]$$

比较式[25]和式[23]，可看出

$$R_3=\frac{R_A R_C}{R_A+R_B+R_C}$$

同样，可以得出用 R_A, R_B, R_C 表示的 R_1 和 R_2，以及用 R_1, R_2, R_3 表示的 R_A，R_B 和 R_C；读者可以自行完成剩余的推导。因此，将 Y 形网络转换成 Δ 形网络，通过下面公式可以得到新电阻值：

$$R_A=\frac{R_1 R_2+R_2 R_3+R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B=\frac{R_1 R_2+R_2 R_3+R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_C=\frac{R_1 R_2+R_2 R_3+R_3 R_1}{R_1}$$

从 Δ 形网络到 Y 形网络的转换为

$$R_1=\frac{R_A R_B}{R_A+R_B+R_C}$$

$$R_2=\frac{R_B R_C}{R_A+R_B+R_C}$$

$$R_3=\frac{R_C R_A}{R_A+R_B+R_C}$$

尽管有时需要集中思想才能辨别实际网络，但这些公式的应用却很简单。

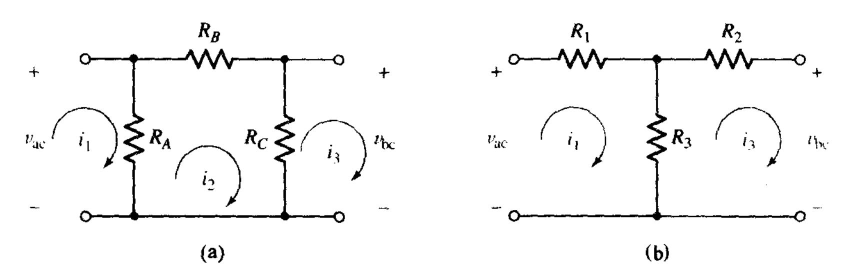


图 5.45　(a) 已标注的 Π 型网络；(b) 已标注的 T 形网络

例题 5.12　采用 Δ-Y 转换方法，求图 5.46(a)所示电路的戴维南等效电阻。

解： 可以看出图 5.46(a)所示网络由两个 Δ 形网络组成，它们共享 3 Ω 的电阻。这里必须十分小心，不要急于把两个 Δ 网络转换成两个 Y 形网络。原因在将 1 Ω，4 Ω 和 3 Ω 电阻组成的上部网络转换成 Y 形网络［见图 5.46(b)］后会显而易见。

注意，在将上部网络转换成 Y 形网络时已经去掉了 3 Ω 电阻。结果是没办法将原来由 2 Ω，5 Ω 和 3 Ω 电阻组成的 Δ 形网络转换成 Y 形网络。

接下来将 $\frac{3}{8}$ Ω 电阻和 2 Ω 电阻合并，将 $\frac{3}{2}$ Ω 电阻和 5 Ω 电阻合并［见图 5.46(c)］。现在再将 $\frac{19}{8}$ Ω 电阻和 $\frac{13}{2}$ Ω 电阻并联，该并联组合再与 $\frac{1}{2}$ Ω 电阻串联。因此，可以用一个 $\frac{159}{71}$ Ω 电阻替换原图 5.46(a)所示的网络［见图 5.46(d)］。

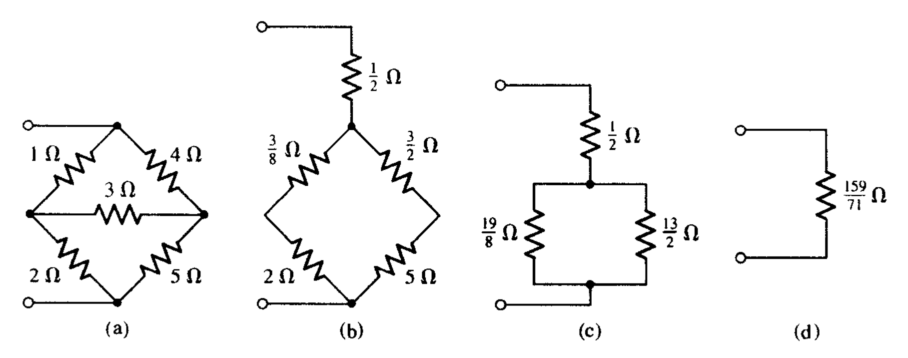


图 5.46 (a) 给定电阻网络，需要求输入电阻；(b) 上部Δ形网络用等效的 Y 形网络替代；(c, d) 串并联组合后得到的单个电阻

练习

5.11 采用Δ-Y 转换方法，求图 5.47 所示电路的戴维南等效电阻。

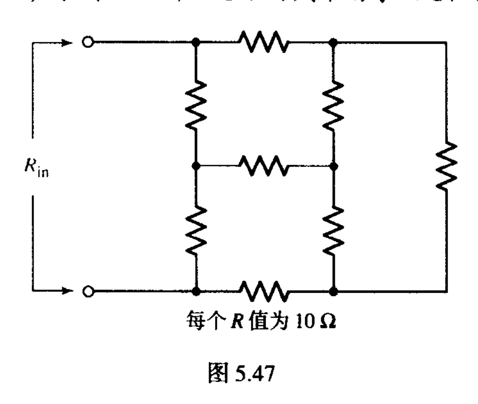


图 5.47

答案：11.43 Ω。

5.6 选择一种方法：各种方法的总结

我们在第 3 章介绍了基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。这两个定律适用于我们遇到的任何电路，只要小心考虑电路代表的整个系统即可。原因是 KCL 和 KVL 分别强调电荷守恒和能量守恒，这是非常基本的原理。根据 KCL 推导出了节点分析法，根据 KVL 可推导出网孔分析法（遗憾的是，其只适用于平面网络），它们都是非常有效的方法。

大多数情况下，本书讨论的是适用于线性电路的分析方法。如果已知电路只含线性元件（换句话说，所有电压和电流都由线性函数相关联），那么在应用网孔或节点分析法之前，通常可以化简电路。在处理完全线性系统的许多知识中，其中最重要的结论也许就是适用于线性系统的叠加定理。当多个给定独立源作用于电路时，可以将每个电源独立的贡献叠加起来。这个方法在工程领域的应用极其普遍。在许多实际情况中将会发现，尽管有几个源同时作用于系统，然而往往只有一个主导系统响应。只要系统线性模型足够精确，应用叠加定理可以很快辨识出相应的源。

但是从电路分析来看，除非要求确定哪个独立源对指定的响应贡献最大，否则直接做节点或网孔分析往往是最直接的策略。原因是对一个包含12个独立源的电路应用叠加定理需要将原来的电路重画12次，并且对于每个子电路经常不得不应用节点分析或网孔分析。

但是电源变换技术在电路分析中是一个非常有用的方法。进行电源变换可以将那些原电路中不是串联或并联的电阻与电源合并起来。电源变换还可以使原电路中所有或至少是大多数电源变换为同一种电源（全部成为电压源或全部成为电流源），因此节点或网孔分析会变得直截了当。

戴维南定理非常重要，原因有几个。在处理电子线路时，总是知道电路中不同部分的戴维南等效电阻，特别是放大器各级的输入和输出电阻。原因在于实现阻抗匹配常常是使给定电路性能最优的最好办法。在最大功率传输的讨论中已经看到这一点，它要求负载电阻与相连网络的戴维南等效电阻匹配。可是在日常电路分析中，将一部分电路变换为其戴维南或诺顿等效电路并不比分析一个完整电路的工作量少。因此，就像叠加定理那样，只是求部分电路的特定响应时才应用戴维南和诺顿定理。

总结和复习

- 叠加定理是指线性电路中的响应可以通过对独立电源单独作用产生的响应求和得到。
- 当必须确定每个电源对特定响应的单独贡献时，往往应用叠加定理。
- 实际电压源的模型是一个电阻与一个独立电压源相串联。实际电流源的模型是一个电阻与一个独立电流源相并联。
- 电源变换可以将实际电压源转换成实际电流源，反之亦然。
- 连续使用电源变换能够实现电阻和电源的合并，从而可以简化电路的分析。
- 网络的戴维南等效电路为一个电阻与一个独立电压源的串联。诺顿等效电路是该电阻与独立电流源的并联。
- 求解戴维南等效电路的方法各不相同，其取决于网络是否包含受控源。
- 当负载电阻与它连接的网络的戴维南等效电阻相匹配时出现最大功率传输。
- 对于Δ形电阻网络，很容易将它转换成Y形网络。在分析之前，这有助于简化电路。相反，Y形电阻网络也可以很容易地转换成Δ形网络，从而简化网络。

深入阅读

关于电池技术的书籍，包括内建电阻的特性：

D. Linden, *Handbook of Batteries*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1995。

详细讨论分析不同电路的理论和病态电路的书籍：

R. A. DeCarlo 和 P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001。

习题

5.1 线性和叠加

1. 线性概念非常重要，因为线性电路比非线性电路的分析要容易得多。遗憾的是，大多数实际系统本质上是非线性的。可是，对一个非线性系统可以构造一个线性模型，使它在控制变量的一个较小范围内有效。作为例子，考虑简单的指数函数 e^x，该函数的泰勒级数为

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

截去线性项（x^1）之后的部分，构造这一函数的线性模型。估计新函数在 $x = 0.001$，0.005，0.01，0.05，0.10，0.5，1.0 和 5.0 时的值。在哪些 x 值下线性模型给出 e^x 的合理近似？

2. 在图 5.48 所示电路中：(a) 确定 4 V 电源对 i_1 电流的贡献；(b) 确定 10 V 电源对 i_1 电流的贡献；(c) 求 i_1。

3. 对于图 5.49 所示的二电源电路，求 1 A 电源对 v_1 的贡献，并计算流过 7 Ω 电阻的总电流。

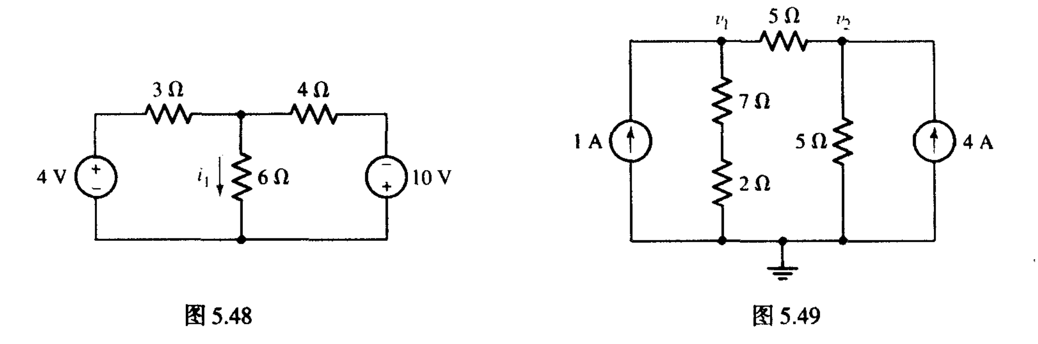


图 5.48　　　　图 5.49

4. 利用叠加定理，通过单独考虑每个电源的贡献，求图 5.50 所示电路中的电流 i_y。

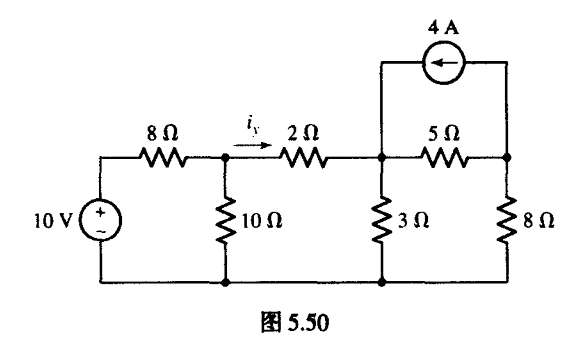


图 5.50

5. 电路如图 5.48 所示，只改变电源值，使得电流 i_1 增大 10 倍。要求这两个电源必须同时改变，但不能同时为零。

6. 电路如图 5.51 所示，当电源 i_A 和 v_B 工作以及 $v_C = 0$ 时，$i_x = 20$ A；当 i_A 和 v_C 工作且 $v_B = 0$ 时，$i_x = -5$ A；当它们都工作时，$i_x = 12$ A。当只有(a) i_A，(b) v_B，(c) v_C 工作时，求 i_x。(d) 如果 i_A 和 v_C 增大一倍而 v_B 反接时，求 i_x。

7. 利用叠加定理，求图 5.52 所示电路中的 v_x。

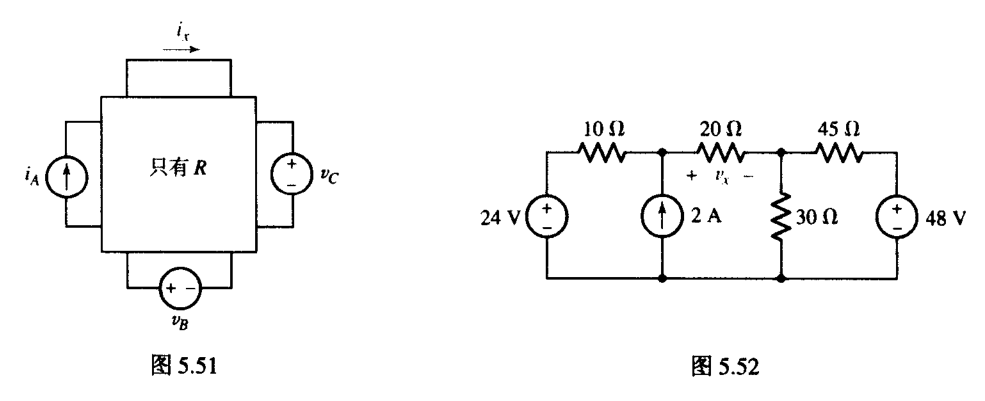


图 5.51　　图 5.52

8. 对图 5.53 所示电路应用叠加定理，求 i_3。

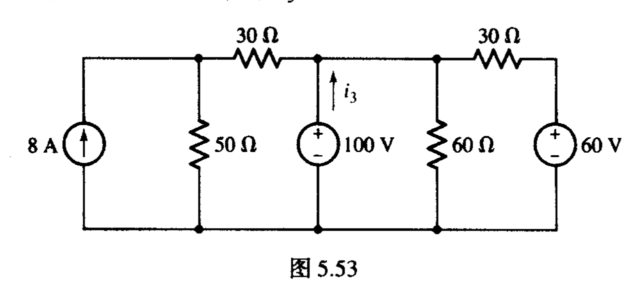


图 5.53

9. (a) 利用叠加定理，求图 5.54 所示电路中的 i_2。(b) 计算 5 个电路元件各自吸收的功率。

10. 对图 5.55 所示电路采用叠加定理，求电压 v。注意电路中存在受控源。

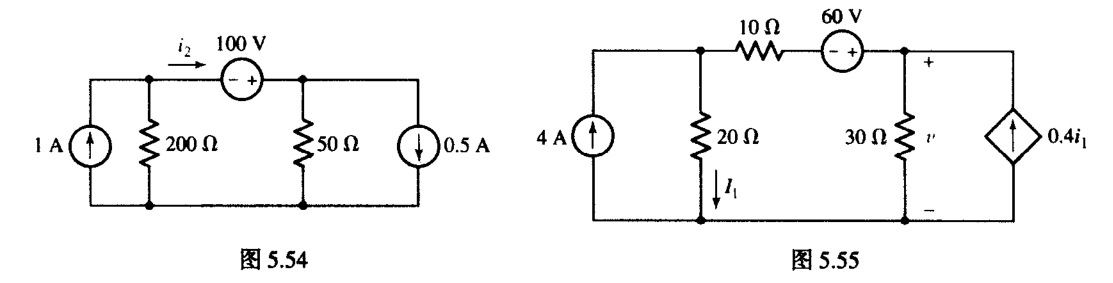


图 5.54　　图 5.55

11. 电路如图 5.56 所示。(a) 如果 $i_A = 10$ A, $i_B = 0$, 那么 $v_3 = 80$ V；如果 $i_A = 25$ A，$i_B = 0$，求 v_3。(b) 如果 $i_A = 10$ A, $i_B = 25$ A，那么 $v_4 = 100$ V；如果 $i_A = 25$ A, $i_B = 10$ A，则 $v_4 = -50$ V；如果 $i_A = 20$ A，$i_B = -10$ A，求 v_4。

12. 利用叠加定理，求图 5.57 所示电路中电流源两端的电压。

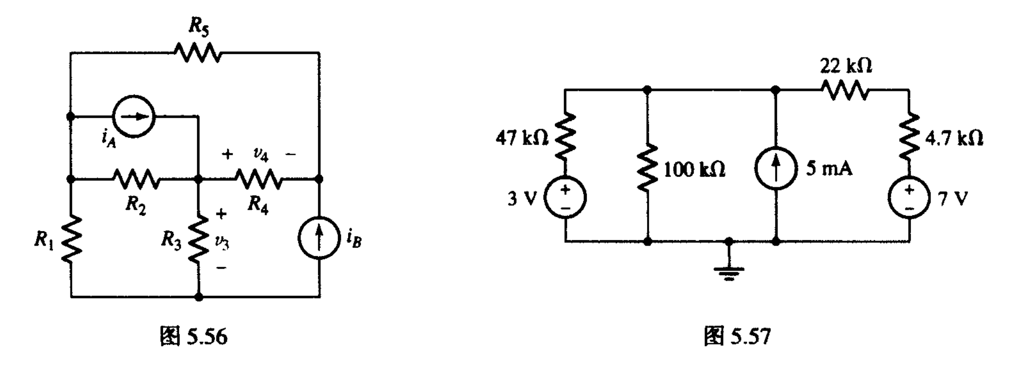


图 5.56　　图 5.57

13. 利用叠加定理，求图 5.58 所示电路中 500 kΩ 电阻消耗的功率。

14. 应用叠加定理，求图 5.59 所示电路中 17 kΩ 电阻两端的电压。如果电阻最大额定功率为 250 mW，那么在电阻过热之前，5 V 电源能增加到的最大正电压是多少？

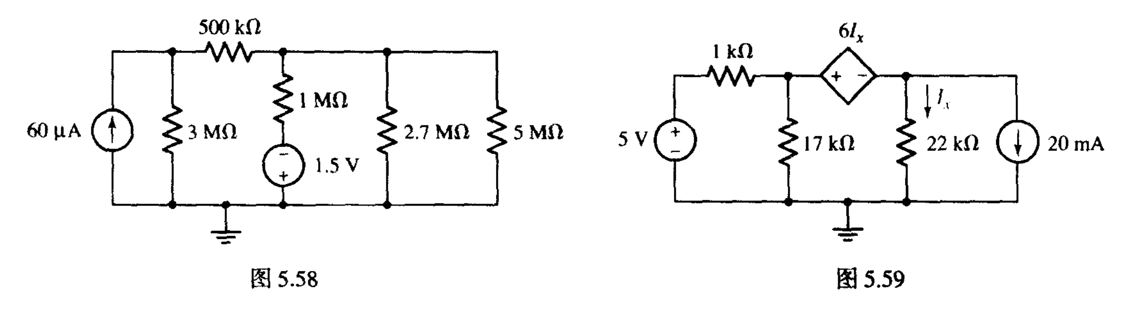


图 5.58　　图 5.59

15. 图 5.60 所示电路中哪个电源对 2 Ω 电阻上的消耗功率贡献最大？哪个贡献最小？ 2 Ω 电阻上消耗的功率是多少？

16. 图 5.61 所示电路为双极型晶体管放大器的常用电路模型，利用叠加定理求电流 i_B。

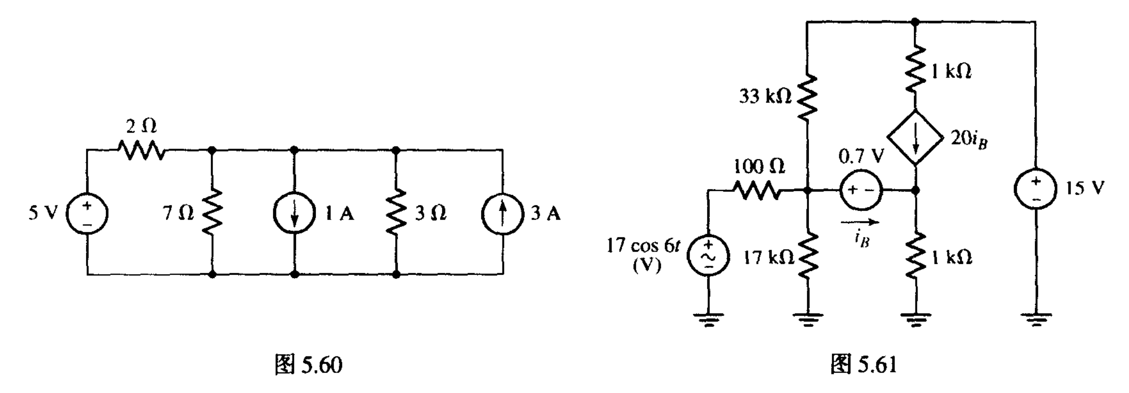


图 5.60　　图 5.61

17. 电路如图 5.62 所示：(a) 采用叠加定理计算 V_x。(b) 利用 PSpice 的直流扫描分析验证每个电源对 V_x 的贡献。提交一份已标注的电路图、相关的输出以及结果的简单总结。

18. 电路如图 5.63 所示：(a) 采用叠加定理计算 V_x。(b) 利用 PSpice 的直流扫描分析验证每个电源对 V_x 的贡献。提交一份已标注的电路图、相关的输出以及结果的简单总结。

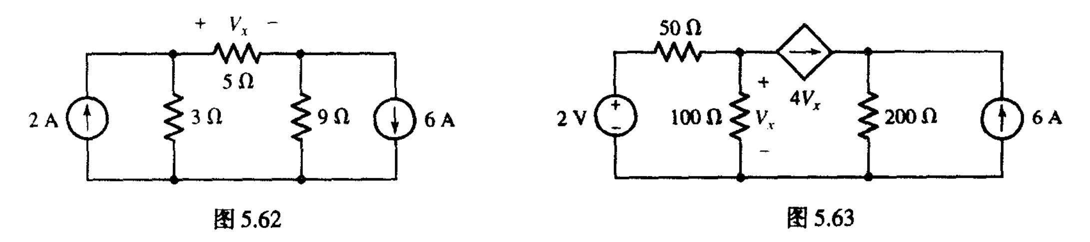


图 5.62　　图 5.63

19. 考虑图 5.64 所示的 3 个电路。分析各个电路并证明 $V_x = V_x' + V_x''$（即尽管叠加定理大多用于将电源置零，而事实上叠加定理具有更广泛的意义）。

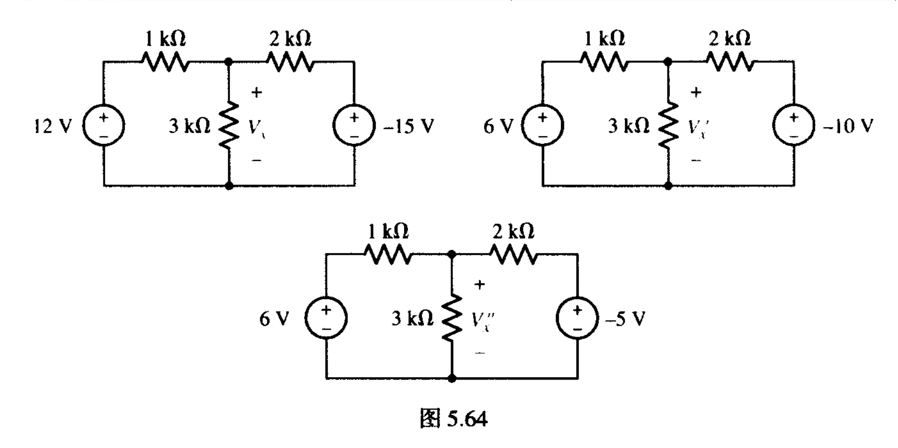


图 5.64

5.2　电源变换

20. 借助于电源变换的方法：(a) 将图5.65(a)所示电路转换为一个独立电压源和一个电阻的串联。(b) 将图5.65(b)所示的电路转换为一个独立电流源和一个电阻的并联。在(a)和(b)的结果电路中保留最右边的端子。

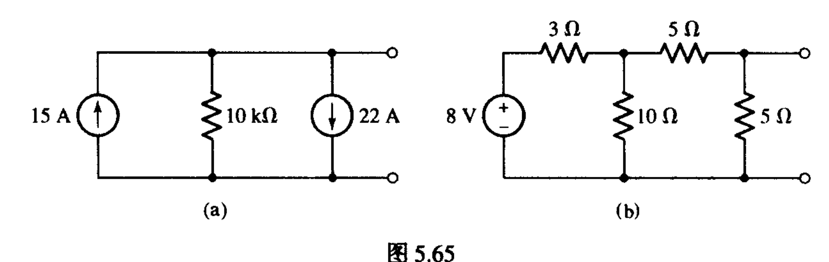


图 5.65

21. (a) 利用电源变换方法，将图 5.66 所示的电路简化为一个实际电压源和 10 Ω 电阻的串联。(b) 计算 v_o。(c) 解释在电源变换时不能包含 10 Ω 电阻的原因。

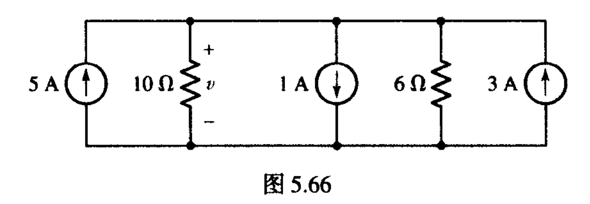


图 5.66

22. 利用电源变换和电阻合并来简化图 5.67 所示的两个电路，直到 a, b 两个端子的左边只包含两个元件。

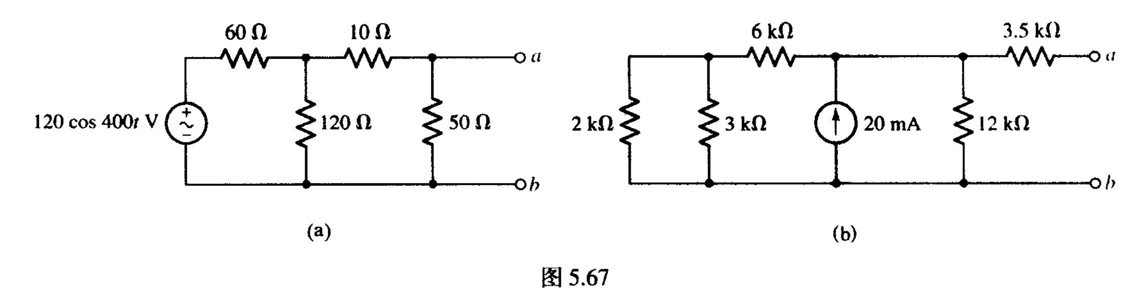


图 5.67

23. 首先利用电源变换简化图 5.68 所示的电路，然后求 5.8 kΩ 电阻消耗的功率。

24. 利用电源变换法，求图 5.69 所示电路中 5.8 kΩ 电阻消耗的功率。

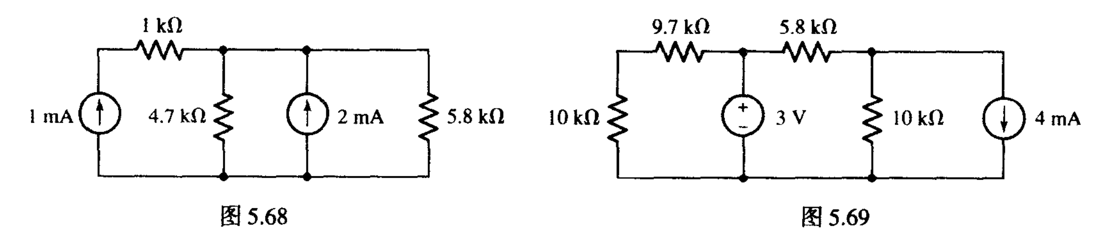


图 5.68　　图 5.69

25. 首先利用电源变换简化图 5.70 所示的电路，然后求 1 MΩ 电阻消耗的功率。

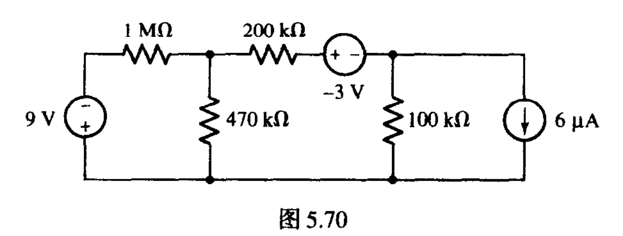


图 5.70

26. 首先利用电源变换简化图 5.71 所示的电路，然后求 I_1。

27. (a) 电路如图 5.72 所示，首先利用电源变换得到简化的等效电路，然后求 V_1。

(b) 对图 5.72 所示的电路进行 PSpice 分析验证结果。提交一份清楚标注 V_1 的原理图。

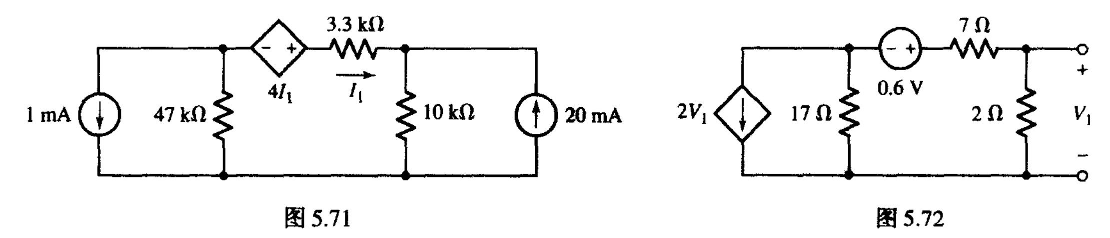


图 5.71　　图 5.72

28. (a) 连续使用电源变换，求图 5.73 所示的电流 I_X。

(b) 对图 5.73 所示的电路进行 PSpice 分析验证结果。提交一份清楚标注 I_X 的原理图。

29. 连续使用电源变换法，求图 5.74 所示电路中的电流 I_X。

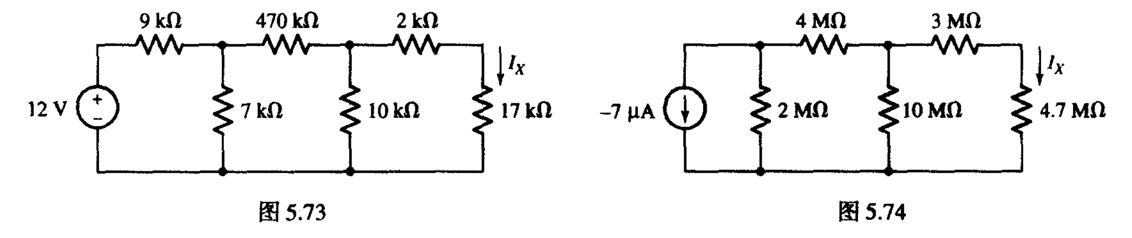


图 5.73　　图 5.74

30. 将图 5.75 所示电路转换成单个电流源与单个电阻并联的电路。

31. 利用电源变换将图 5.76 所示电路转换成单个电流源与单个电阻并联的电路。

32. 求图 5.77 所示电路中 1 MΩ 电阻消耗的功率。

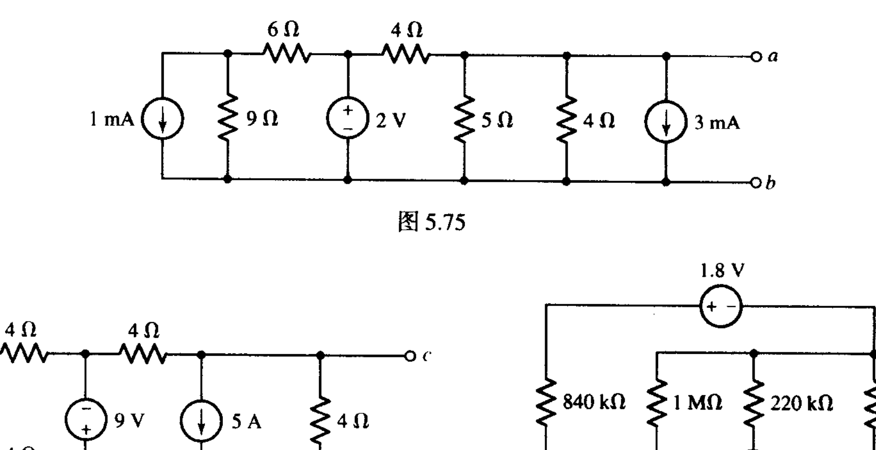


图 5.75

图 5.76

图 5.77

33. 表 5.1 列出了对某个 1.5 V 碱性电池进行的测量。利用该信息为该电池建立一个二元件的实际电压源模型，要求该模型在电流从 1 mA 到 20 mA 范围内比较精确。注意，除了明显的实验误差之外，在实验测量的电流范围内，电池“内阻”明显不同。

表 5.1　接有可变负载电阻的 1.5 V 碱性电池的电流 – 电压特性测量

输出电流（mA）	端电压（V）
0.000 058 9	1.584
0.3183	1.582
1.4398	1.567
7.010	1.563
12.58	1.558

34. 利用表 5.1 中的数据为该电池构建一个二元件实际电流源模型，要求该模型在电流从 1 mA 到 20 mA 的范围内相对精确。注意，除了明显的实验误差之外，在实验测量的电流范围内，电池“内阻”明显不同。

35. 将图 5.78 所示电路化简为单个电压源和单个电阻的串联。在最终电路中保留最右边的端子。

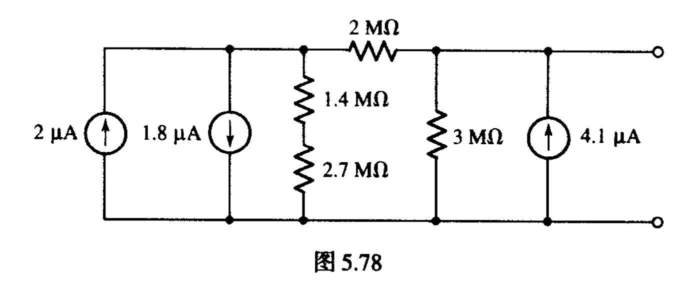


图 5.78

36. 求图 5.79 所示电路中 5 Ω 电阻吸收的功率。

37. (a) 将图 5.80 所示电路转换成一个实际电流源和 R_L 的并联。(b) 假设 R_L 为 5 Ω，利用 PSpice 验证结论。提交一份正确标注的电路图，并指明 R_L 两端的电压。

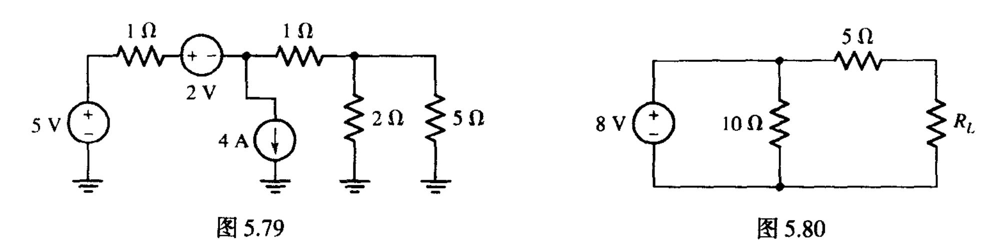


图 5.79　　图 5.80

38. (a) 尽可能化简图 5.81 所示的电路，将两个电压源变换成电流源，然后计算上面的 5 Ω 电阻消耗的功率。(b) 利用 PSpice 验证两个电路的结果。提交一份正确标注的两个电路的原理图并指明前面所指电阻消耗的功率。(c) 1 Ω 或 7 Ω 电阻值是否会影响结果？解释原因。
39. 电路如图 5.82 所示，将所有电源（受控源和独立源）转换成电流源，合并受控源，并计算电压 v_3。

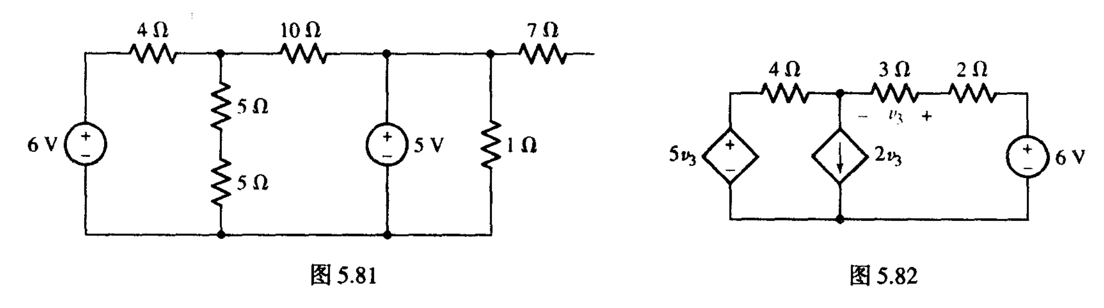


图 5.81　　图 5.82

5.3 戴维南和诺顿等效电路

40. (a) 求图 5.83 所示网络中 a，b 两端之间的戴维南等效电路。在 a，b 之间接上一个电阻 R_{ab}，如果该电阻为：(b) 50 Ω，(c) 12.5 Ω，求传输给该电阻的功率。
41. (a) 采用戴维南定理简化图 5.84 所示的连接到 5 Ω 电阻两端的网络。(b) 利用简化电路计算 5 Ω 电阻吸收的功率。(c) 利用 PSpice 验证结论，提交一份正确标注的每个电路的原理图，并明确指明所求功率。

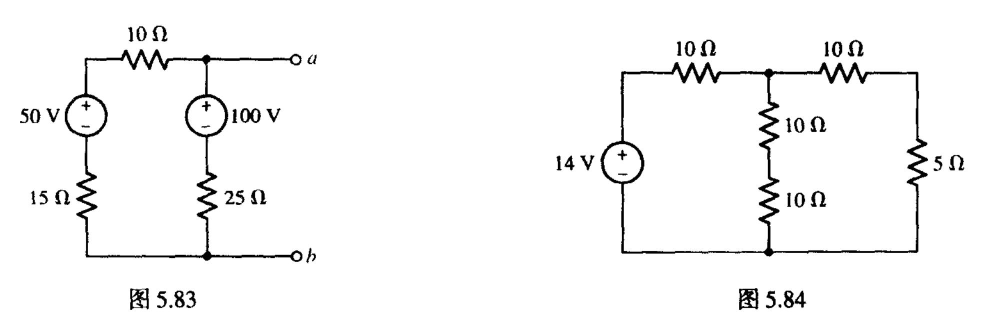


图 5.83　　图 5.84

42. (a) 求图 5.85 所示的连接到 7 Ω 电阻两端的网络的戴维南等效。(b) 求图 5.85 所示的连接到 7 Ω 电阻两端的网络的诺顿等效。(c) 利用两个等效电路计算电压 v_1。(d) 用 1 Ω 电阻替换 7 Ω 电阻，利用两个电路重新计算 v_1。
43. (a) 将一个钨丝灯泡接上 10 mV 测试电压，测量得到电流为 400 μA。那么该灯泡的戴维南等效电路是什么？(b) 现在将灯泡接到 110 V 电源上，测量得到电流为 363.6 mA，基于该测量结果，确定戴维南等效电路。(c) 为何灯泡的戴维南等效电路明显取决于测试条件，在分析一个包含灯泡的电路时，我们从中可以得到什么启示。

44. (a) 求图 5.86 所示的连接到 1 Ω 电阻两端的网络的戴维南和诺顿等效电路。(b) 利用这两个等效电路计算 1 Ω 电阻吸收的功率。(c) 利用 PSpice 验证结论，提交一份正确标注的每个电路的原理图，并明确指明所求的功率量。

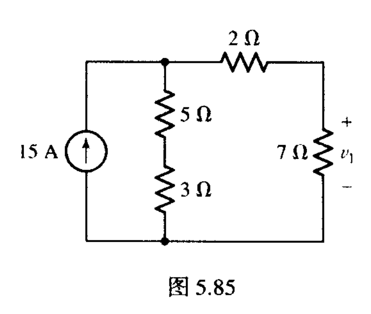


图 5.85

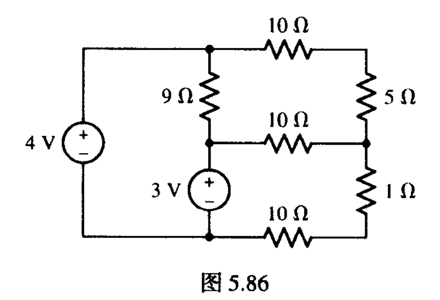


图 5.86

45. 电路如图 5.87 所示：(a) 将 c 点移去，求 a, b 之间的诺顿等效电路。(b) 将 a 移去，求 b, c 之间的诺顿等效。

46. 求图 5.88 所示网络从两端看进去的戴维南等效网络：(a) x 和 x'；(b) y 和 y'。

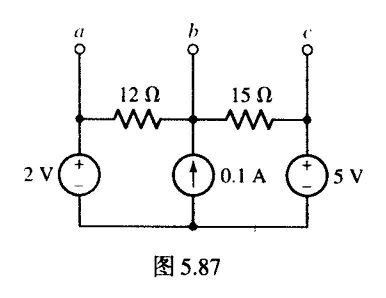


图 5.87

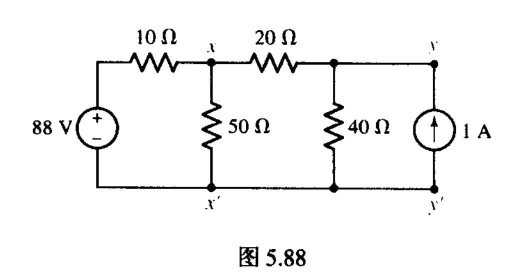


图 5.88

47. (a) 求图 5.89 所示网络的戴维南等效电路。(b) 传输给 a, b 之间 100 Ω 负载电阻的功率是多少？

48. 求图 5.90 所示网络的诺顿等效电路。

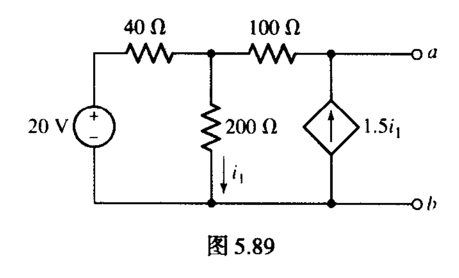


图 5.89

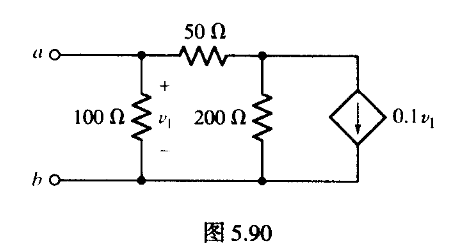


图 5.90

49. 求图 5.91 所示的二端网络的戴维南等效电路。

50. 求图 5.92 所示电路的戴维南等效电路。

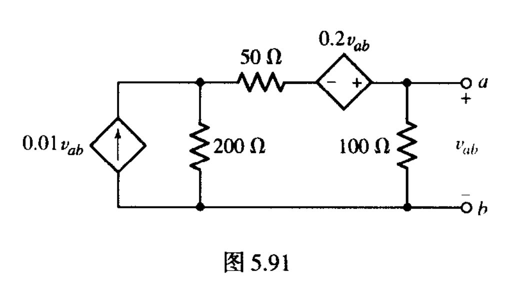


图 5.91

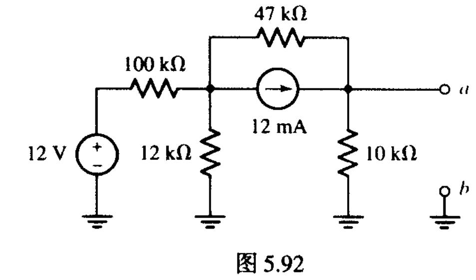


图 5.92

51. 电路如图 5.93 所示，求：(a) 戴维南等效电路；(b) 诺顿等效电路。

52. 电路如图 5.94(a)所示，求连接到 R_L 的网络的诺顿等效电路。对于图 5.94(b)所示的电路，求连接到 R_L 的网络的戴维南等效电路。

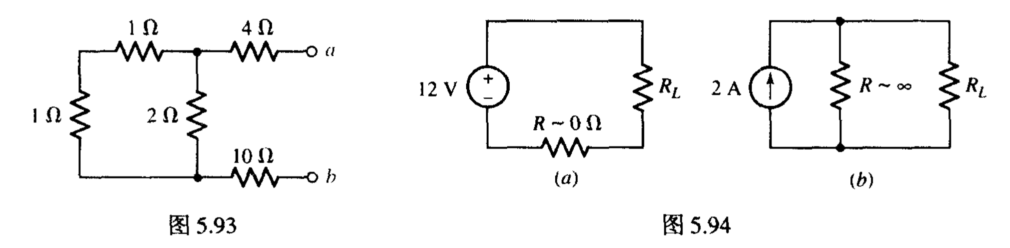


图 5.93　　图 5.94

53. 求图 5.95 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

54. 求图 5.96 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

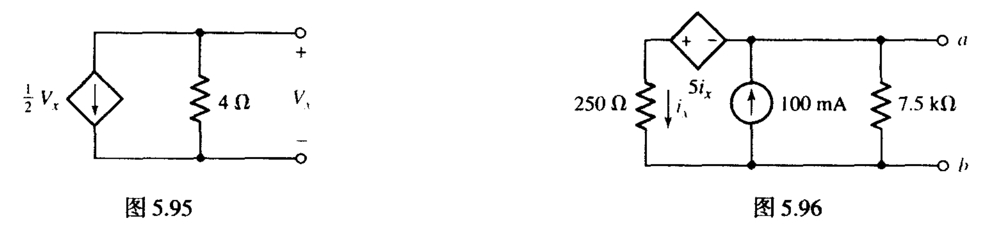


图 5.95　　图 5.96

55. 求图 5.97 所示网络的戴维南和诺顿等效电路。

56. 求图 5.98 所示电路中从 2 kΩ 电阻看进去的戴维南等效电阻。忽略图中虚线。

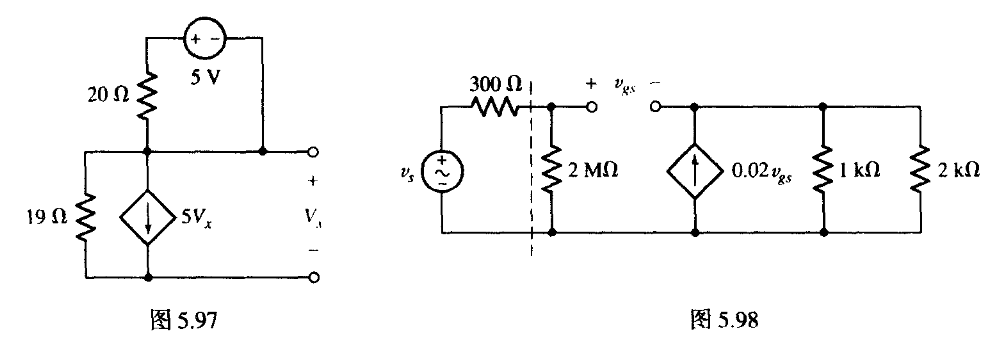


图 5.97　　图 5.98

57. 电路如图5.98所示，求虚线右边电路的戴维南等效电阻。该电路是共源晶体管放大电路，所计算的是它的输入电阻。

58. 电路如图 5.99 所示，求虚线右边电路的戴维南等效电阻。该电路是共集电极晶体管放大电路，计算的是它的输入电阻。

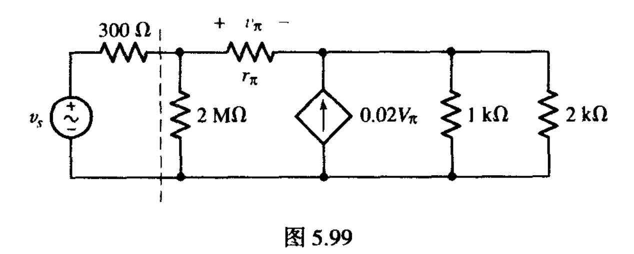


图 5.99

59. 图 5.100 所示电路为比较精确的运算放大器模型，其中 R_i 和 A 非常大，R_o 近似为 0，连接在地和标有 v_{out} 端子之间的负载电阻两端的电压是输入信号 v_{in} 的 $-R_f/R_1$ 倍。求该电路的戴维南等效电路，注意 v_{out}。

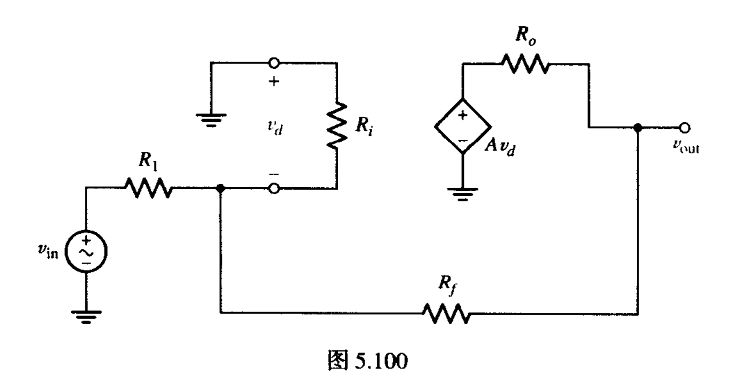


图 5.100

5.4　最大功率传输

60. 假定可以确定墙上插座的戴维南等效电阻，为什么烤面包机、微波炉和电视机的生产商不将各种设备的戴维南等效电阻与电源戴维南等效电阻相匹配？不允许从发电厂到家用电器的最大功率传输吗？
61. 在图 5.101 电路中，如果 R_L 可以取任意值，那么 R_L 上能消耗的最大功率为多少？
62. (a) 求图 5.102 所示网络中 a, b 两端之间的戴维南等效电路，如果 a, b 间连接的电阻 R_{ab} 分别等于(b) 10 Ω，(c) 75 Ω，求传输给该电阻的功率。

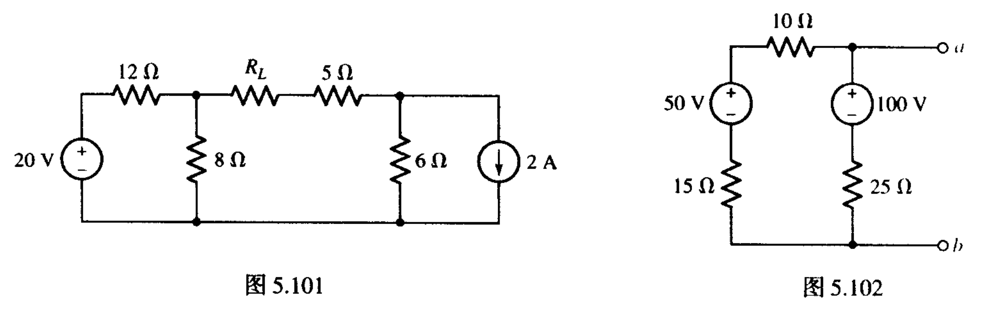


图 5.101　　图 5.102

63. (a) 求图 5.103 所示网络的戴维南等效电路；(b) 求从该电路得到的最大功率。
64. 电路如图 5.104 所示：(a) 求 R_L 的值，使其获得的功率最大；(b) 计算 R_L 两端的电压（上面为正参考极性）。

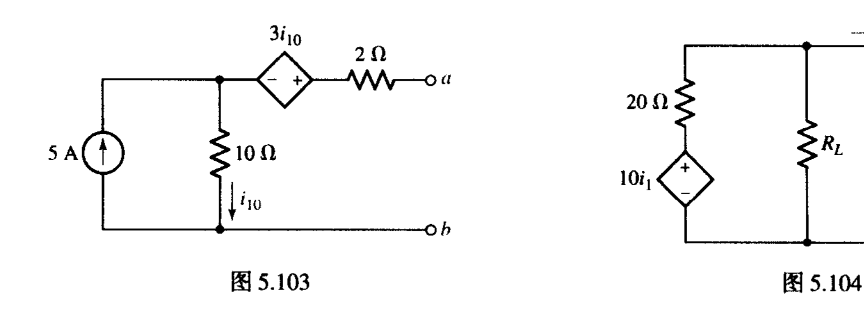


图 5.103　　图 5.104

65. 考虑某一实际直流电压源，当它短路（瞬时）时可提供2.5 A的电流，当接有20 Ω负载时可提供80 W功率给该负载电阻。求：(a) 开路电压。(b) 选择合适的R_L，并计算它能够提供的最大功率。(c) 此时的R_L值。

66. 某一实际电流源向250 Ω负载提供10 W功率，向80 Ω负载提供20 W功率。将一个电阻R_L连接到该电源两端，电压为v_L，电流为i_L。求以下3种情况下的R_L，v_L和i_L：(a) $v_L i_L$为最大时；(b) v_L为最大时；(c) i_L为最大时。

67. 某电池在感兴趣的电流范围内可以用9 V独立电源串联1.2 Ω电阻精确模拟。当电池连接无穷大负载电阻时没有电流。此外，外接电阻为1.2 Ω时传递给它的功率最大，对于1.1 Ω或1.3 Ω电阻提供的功率都较小。可是如果短接电池两端（不推荐），所得电流比接1.2 Ω负载电阻时大得多。这与前面导出的最大功率传输原理矛盾吗（不管怎么说，功率不是正比于i^2吗）？请解释原因。

68. 图5.105所示电路是音频放大器的部分电路。如果需要传输最大功率给8 Ω电阻，那么R_E需要多大？用PSpice验证结果。

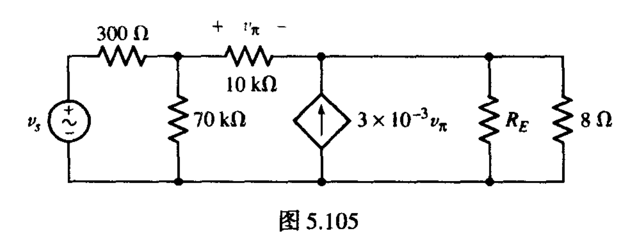


图5.105

69. 图5.106所示电路可以分成两级，选择R_1使其从第1级传输到第2级的功率最大。

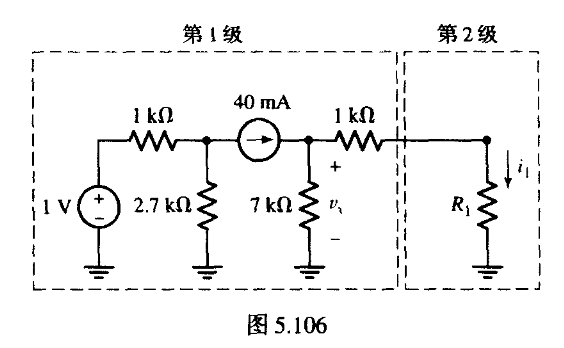


图5.106

5.5 Δ-Y转换

70. 将图5.107所示的网络转换成Y形网络。

71. 将图5.108所示的网络转换成Δ形网络。



图5.107　　图5.108

72. 网络如图 5.109 所示，求 R_{in}。

73. 利用 Δ-Y 转换和 Y-Δ 转换方法，求图 5.110 所示网络的输入电阻。

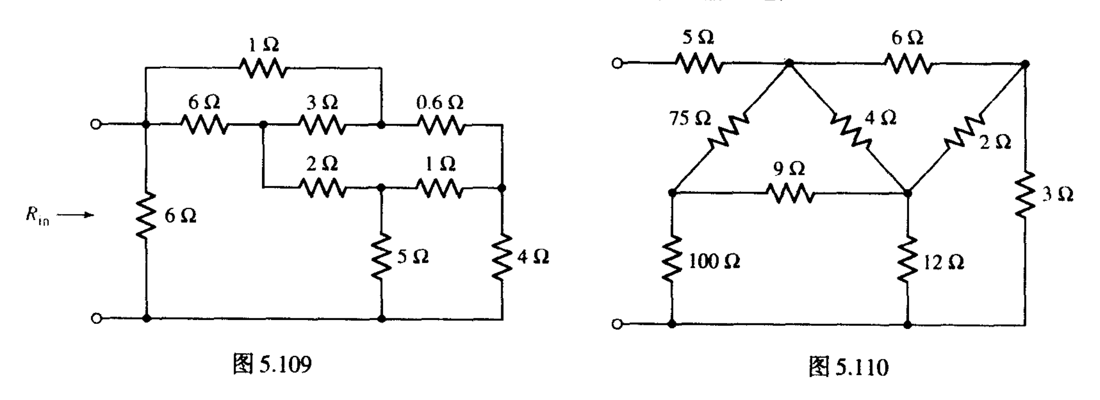


图 5.109　　　　图 5.110

74. 求图 5.111 所示电路的 R_{in}。

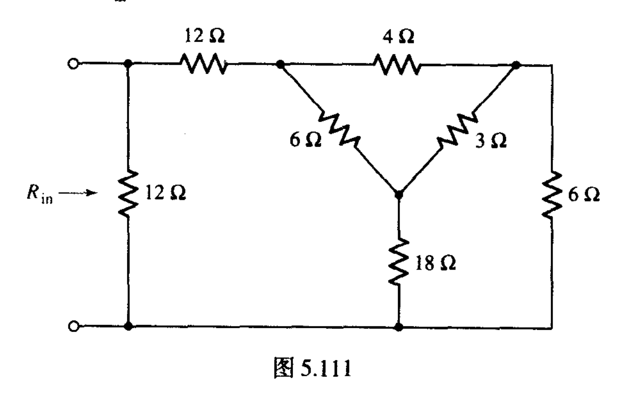


图 5.111

75. 求图 5.112 所示电路的戴维南等效电路。

76. 求图 5.113 所示电路的诺顿等效电路。

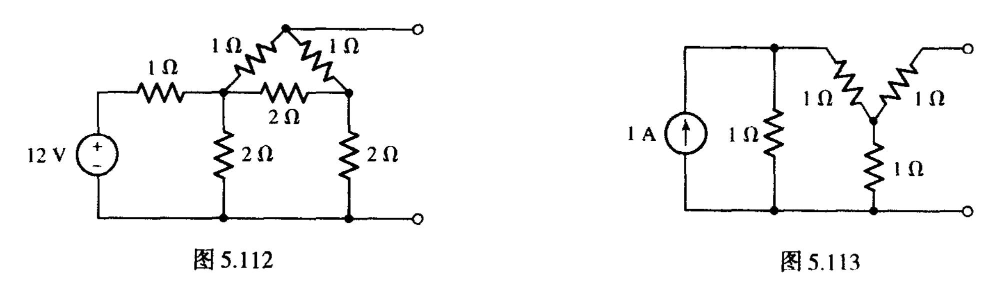


图 5.112　　　　图 5.113

77. 如果图 5.114 所示电路中的所有电阻都为 10 Ω，求该电路的戴维南等效电路。

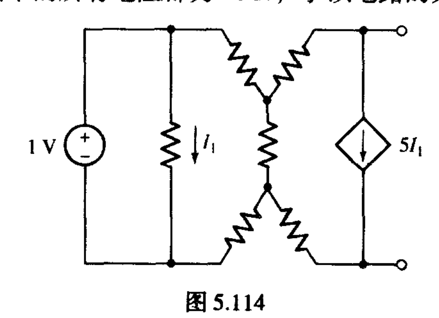


图 5.114

78. (a) 用等效三电阻Y形网络替换图5.115所示的网络；(b)进行PSpice分析，证实答案确实是等效的。（提示：增加一个负载电阻。）

79. (a) 用等效三电阻Δ形网络替换图5.116所示的网络；(b)进行PSpice分析，证实答案确实是等效的。（提示：增加一个负载电阻。）

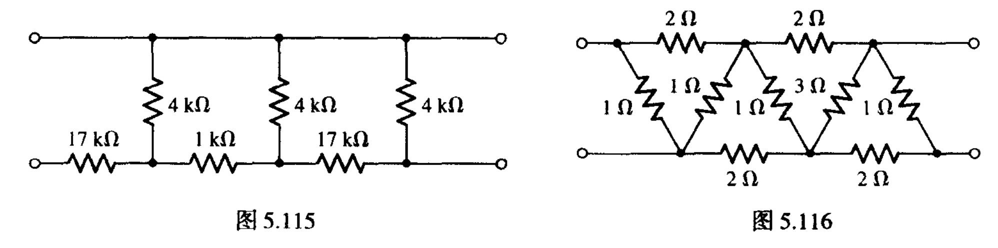


图5.115　　　　图5.116

5.6 选择一种方法：各种方法的总结

80. 如图5.117所示的电路是双极型晶体管的一个精确模型，它工作在正向放大区。求集电极电流I_C。用PSpice验证结果。

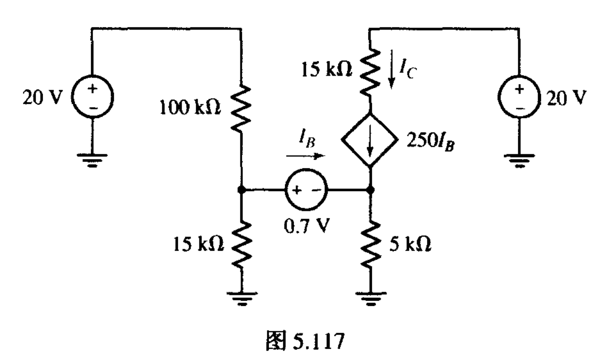


图5.117

81. 图5.118所示的负载电阻在由于过热而发生爆炸之前能够安全承受的最大功率为1 W。指示灯可以看成是10.6 Ω的电阻，如果流过它的电流小于1 A，但是流过指示灯的电流大于1 A，则等效成15 Ω的电阻。那么I_s最大允许的值为多少？用PSpice验证结果。

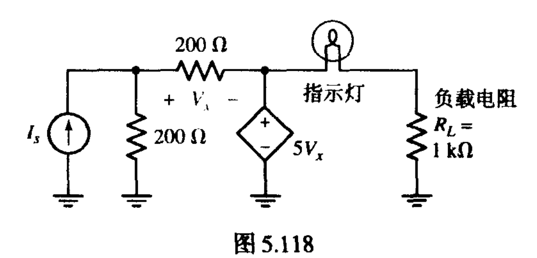


图5.118

82. 人耳可以听到20 Hz到20 kHz频率范围内的声波。如果图5.119所示的每个8 Ω电阻都是一个扬声器，那么哪个信号发生器（用实际电压源模型表示）产生最大的声音？（声音大小与传输给扬声器的功率成正比。）

83. 一个数字万用表连接到图5.120所示的电阻电路中。如果数字万用表的输入电阻为1 MΩ，用数字万用表测量电阻，显示的电阻值是多少？

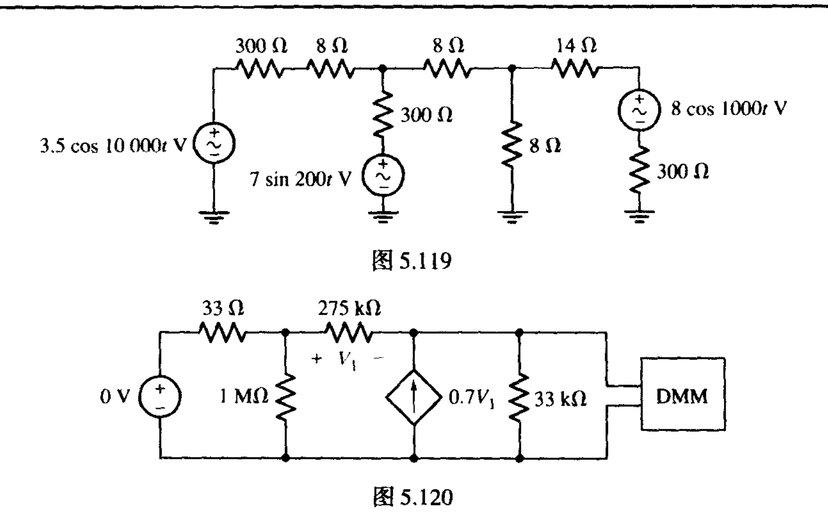


图 5.119

图 5.120

84. 从印第安纳州郊区发现的一颗陨星中提取出一种金属物质。该物质的电阻率为50 Ω，用它制成简单圆柱体。将该圆柱体连接到图5.121所示的电路中，发现它的温度函数为$T = 200P^{0.25}$°C，其中，P是提供给圆柱体的功率，用W表示。有趣的是，这种物质的电阻率似乎与温度无关。如果$R = 10$ Ω并从所示电路中吸收最大功率，那么圆柱体的温度为多少？

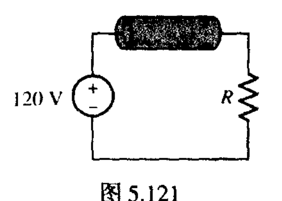


图 5.121

85. 作为安全系统的一部分，一段非常细的100 Ω导线用不导电环氧树脂接到窗户上。只给定一个盒子，内装12个可充电的1.5 V AAA电池，1000个1 Ω电阻和一个2900 Hz压电蜂鸣器。该蜂鸣器在6 V时产生15 mA的电流。设计一个电路，当窗户被打破（细电线当然也被折断）时该蜂鸣器启动。注意，蜂鸣器工作至少需要6 V（最大28 V）的直流电压。

86. 3个45 W灯泡最初接成Y形网络，每一端口接有120 V交流电源，现将它接成Δ形网络。中线未连接。如果每一个灯泡的亮度正比于其得到的功率，设计一个新的120 V交流电源电路，使3个灯泡在Δ接法下与Y形接法时具有相同的亮度。用PSpice将电路中每个灯泡得到的功率（用适当阻值的电阻模拟灯泡）与原来Y形接法时每个灯泡的功率相比较，以证实你的设计。

87. 某红色发光二极管的额定电流为35 mA，如果超过该值将会发生过热并导致严重损坏。LED的电阻是其电流的非线性函数，但是制造者保证最小电阻为47 Ω，最大电阻为117 Ω，可用的驱动电源只有9 V电池。设计一个合适的电路，在不损坏发光管的条件下为它提供最大功率。只允许使用标准电阻值的组合。

第6章　运算放大器

主要概念

- 理想运算放大器的特点
- 反相放大器和同相放大器
- 求和放大电路和差分放大电路
- 运算放大器级联
- 利用运算放大器构建电压源和电流源
- 非理想运算放大器的特点
- 电压增益和反馈
- 基本比较器和仪表用放大电路

引言

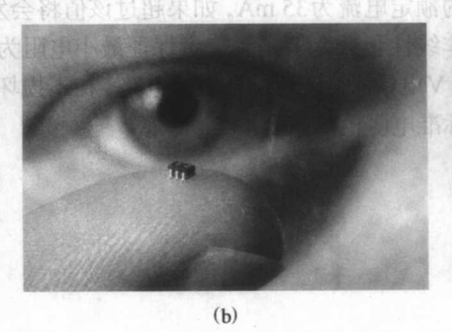
前面已经介绍了足够的基本原理和电路分析技术,应用这些原理与技术可以成功地分析一些实际电路。本章将介绍一种每天都用得到的非常有用的电子器件，称为运算放大器或简称为运放。

6.1　背景

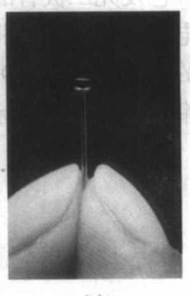
运算放大器的起源可以追述到20世纪40年代，当时用真空管构建基本电路来实现数学运算，如加法、减法、乘法、除法、微分和积分，这使得人们可以构建用来求解复杂微分方程的模拟（与数字相对应）计算机。第一个商用运放器件一般被认为是K2-W，由波士顿Philbrick公司大约在1952年到20世纪70年代早期制造［见图6.1(a)］。这些早期的真空管器件重3盎司（85g），体积为3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm，价格约为22美元。相比较而言，现代集成运放（如仙童公司的KA741）重量小于500 mg，体积小于5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm，价格约为0.22美元。



(a)



(b)



(c)

图6.1　(a)基于对称I2AX7A真空管对的Philbrick公司生产的K2-W运放；(b) 用于各种电话和游戏中的LMV321运放；(c) LMC6035运放，它将114个晶体管封装在一起，大小如针尖

与基于真空管的运放相比，现代IC运放由25个或更多的晶体管以及所需要的电阻和电容构建，这些晶体管全部构建在同一个硅芯片上，以此来获得需要的性能。因此，它们运行在更低的直流电源电压下（例如，±18 V，而K2-W需要±300 V），并且更加可靠，具有更小的体积［见图6.1(b)和图6.1(c)］。在某些情况下，一块IC芯片可能包含多个运放。除了一个输出管脚和两个输入管脚，其他管脚向内部晶体管提供电源并用于外部调整以便对运放进行平衡和补偿。运放的通用符号如图6.2(a)所示。此时，我们不关心运放或IC的内部电路，只关心输入和输出端之间的电压和电流的关系，因此，目前使用图6.2(b)所示的简单电气符号。左边是两个输入端，右边是一个输出端；标有“+”符号的端子称为同相输入端，标有“-”符号的端子称为反相输入端。

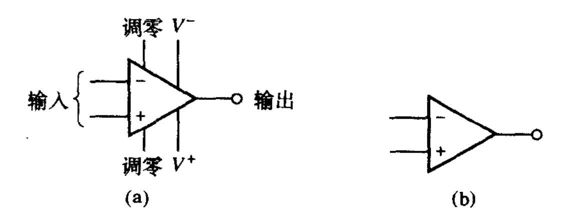


图6.2　(a)运放的电气符号；(b)显示在电路图中所需的最少连接端子

6.2　理想运放：生动简介

在设计运放时，集成电路工程师努力确保器件接近理想特性。实际上，大多数运放性能很好以至于经常可以把它们作为理想运放来处理。理想运放的特性是下面两个基本规则的基础，开始看起来可能有些特别。

理想运放规则

1. 两个输入端没有电流流入；
2. 两个输入端之间没有电压降。

在实际的运放中，输入端会有一个非常小的泄漏电流流入（有时小于40 fA）。两个输入端之间也可能存在非常小的电压。但是，与大多数电路中的其他电压和电流相比，这些值非常小，以至于在电路分析中包含这些值不会影响计算结果。

在分析运放电路时，必须牢记另外一点。与到目前为止研究的电路相反，运放电路的输出总是依赖于某种输入。因此，分析运放电路的目的是要得到用输入量表示的输出表达式。我们将会发现分析运放电路的一种好的方法是从运放的输入端开始分析。

图6.3所示电路称为反相放大器。从输入电压源开始，利用KVL进行分析。因为理想运放规则1表明反相输入端没有电流流入，因此标为i的电流只流过R_1和R_f两个电阻，所以可以写出

$$-v_{\text{in}} + R_1 i + R_f i + v_{\text{out}} = 0$$

重新整理可以得到输出与输入的关系表达式为

$$v_{\text{out}} = v_{\text{in}} - (R_1 + R_f)i \qquad [1]$$

但是，现在的情况是一个方程和两个未知量，因为只知道$v_{\text{in}} = 5\sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ，$R_f = 47$ kΩ。因此，为了计算输出电压，要求得到一个额外的方程，即只用v_{out}, v_{in}, R_1和R_f表示的i的表达式。

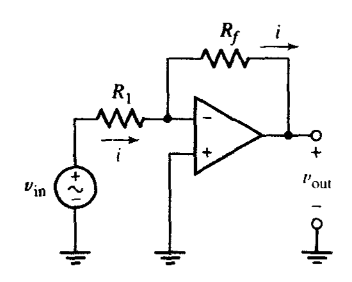


图 6.3 运放构成的反相放大电路，其中 $v_{in} = 5\sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ，$R_f = 47$ kΩ

现在我们还没有使用理想运放的规则2。因为同相输入端接地，因此同相端为0 V。根据规则2，反相端也为0 V。这并不意味着两个输入端在物理上短路，而且必须注意不要试图做这样的假设。相反，这两个输入电压仅仅是相互跟随，如果其中的一个电压发生变化，那么另一个电压会由内部电路拉到相同的值。因此，可以写出另一个 KVL 方程：

$$-v_{in} + R_1 i + 0 = 0$$

或

$$i = \frac{v_{in}}{R_1} \qquad [2]$$

将式[2]和式[1]合并，得到用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式为

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in} \qquad [3]$$

将 $v_{in} = 5\sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ，$R_f = 47$ kΩ 代入，得

$$v_{out} = -50\sin 3t \qquad \text{mV}$$

因为已知 $R_f > R_1$，该电路放大了输入电压信号 v_{in}，如果选择 $R_f < R_1$，则信号将被衰减。同时我们还注意到输出电压与输入电压符号相反[①]，因此称为"反相放大器"。图6.4给出了输出曲线以及输入波形以便于比较。

说明： 事实上，该组态电路的反相输入端是0 V电压，通常也称为"虚地"。这并不意味着反相输入管脚直接接地。注意，学生有时会犯直接接地的错误。运放内部电路具备调整功能，使得两个输入端之间不存在电压差。但是两个输入端之间不短接。

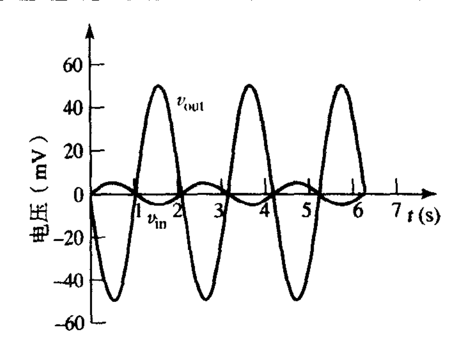


图 6.4 反相放大器的输入和输出信号波形

① 或者说输出与输入有 180° 的相位差，这样描述更深刻。

此时需要指出的是，理想运放似乎违背了KCL。具体地说，在上述电路中两个输入端都没有电流流入，但输出端却有电流流出。这意味着运放在某种程度上能够在某个地方创建电子或永久保存电子(取决于电流方向)。显然这是不可能的。导致该矛盾的原因是由于把运放与无源元件(例如电阻)同样对待了。事实上，只有连到外部电源中运放才能工作，正是通过这些电源，才能够确定输出端上的电流方向。

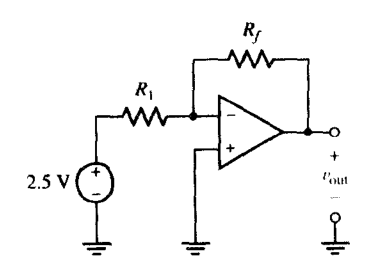


图6.5 输入为2.5 V直流电压的反相放大器

尽管图6.3所示的反相放大器可以放大交流信号(该例子中是一个频率为3 rad/s，幅度为5 mV的正弦波)，但是它也可以很好地实现直流信号的放大。图6.5所示就是这种情况，其中选择R_1, R_f的值，使输出电压为−10 V。

该电路与图6.3所示的电路相同，但是输入的是2.5 V的直流信号。因为其他因素没有变化，因此式[3]的表达式对该电路同样有效。为了得到期望的输出，只要R_f与R_1的比例为10/2.5或4即可。因为这是唯一的一个比例，因此只需简单地为一个电阻选取方便的值，另一个电阻值就可以确定了。比如，选择$R_1 = 100\ \Omega$(得到$R_f = 400\ \Omega$)，或选择$R_f = 8\ \text{M}\Omega$(得到$R_1 = 2\ \text{M}\Omega$)。实际上，其他约束条件可能会限制我们的选择(如偏置电流)。

因此该电路结构相当于一类电压放大器(或衰减器，如果R_f与R_1的比值小于1)，但是该电路输出与输入的符号相反，这个特性有时显得不是很方便，因此人们设计了另外一种结构的电路，称为同相放大器，如图6.6所示。我们将在下面的例题中讨论这个电路。

例题6.1 同相放大电路如图6.6(a)所示，已知$v_{in} = 5\sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7\ \text{k}\Omega$, $R_f = 47\ \text{k}\Omega$，画出输出波形。

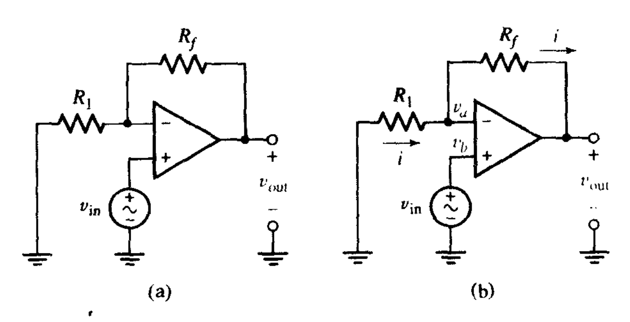


图6.6 (a)组成同相放大器的运放；(b)标出了流过R_1和R_f的电流以及两个输入电压的电路

解：▶ 明确题目的要求

求出只用已知量v_{in}, R_1和R_f表示的v_{out}的表达式。

▶ 收集已知信息

因为电阻值和输入波形已经指定，因此可首先标出如图6.6(b)所示的电流i和两个输入电压。假定运放是理想运放。

▶ 方案设计

虽然网孔分析是学生喜欢的方法，但已经证明在大多数运放电路中应用节点分析更加实用，因为没有一种直接的方法能够确定流出运放输出端的电流。

▶ 建立一组合适的方程

我们注意到，定义流过两个电阻的电流相同意味着使用了理想运放规则 1：没有电流流入反相输入端。然后利用节点分析方法求以 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式，于是得到在节点 a：

$$0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f} \qquad [4]$$

在节点 b：

$$v_b = v_{in} \qquad [5]$$

▶ 确定是否还需要其他信息

题目要求获得输入和输出的关系表达式，但是式[4]和式[5]都不满足这个要求。因为还没有应用理想运放规则 2，因此以后将看到，几乎在每个运放电路的分析中，为得到最终的表达式，两个规定都需要用到。

因此，$v_a = v_b = v_{in}$，这时式[4]变为

$$0 = \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{in} - v_{out}}{R_f}$$

▶ 尝试求解

重新排列可得输出电压用输入电压 v_{in} 表示的表达式为

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_{in} = 11\, v_{in} = 55 \sin 3t \quad \text{mV}$$

▶ 验证结果是否合理或是否与预计相符

输入波形如图 6.7 所示，为了比较，同时也给出了输入波形。与反相放大器的输出波形相比，该输入和输出在相位上是同相的。这个结果应该能够预料得到，从它的名字“同相放大器”就可以知道。

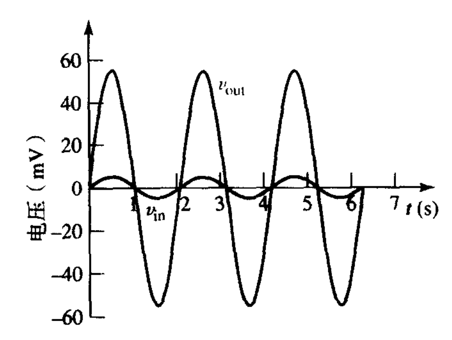


图 6.7 同相放大器的输入和输出信号波形

练习

6.1 推导图 6.8 所示电路的用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

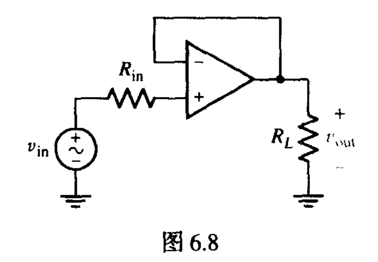


图6.8

答案： $v_{out}=v_{in}$。该电路称为"电压跟随器"，因为输出电压跟随输入电压。

如同反相放大器，同相放大器也可以应用于直流和交流的情况，但它的电压增益等于$v_{out}/v_{in}=1+(R_f/R_1)$，因此，如果设$R_f=9\ \Omega$，$R_1=1\ \Omega$，那么可以得到输出$v_{out}$是输入电压$v_{in}$的10倍。同反相放大器相比，同相放大器的输出和输入总是具有相同的符号，并且输出电压不会小于输入电压，最小增益为1。选择什么样的放大器取决于具体应用。图6.8所示的电压跟随器相当于R_1为∞、R_f为0的同相放大器，在这种特殊情况下，输出与输入在符号上和幅度上都相同。这看起来是一种无意义的电路，但必须牢记电压跟随器不从输入汲取电流（理想情况下），因此可以作为输入电压v_{in}和连接在运放输出端的一些电阻负载R_L之间的缓冲器。

前面已经提到运算放大器的名字来源于该器件主要用来进行模拟信号（即非数字的，实时的，现实世界中的）的数学运算。在下面两个电路中可以看到，它们包含输入电压信号的加法和减法运算。

例题6.2　运放电路如图6.9所示，该电路称为"加法放大器"。求用v_1, v_2和v_3表示的v_{out}表达式。

解： 首先，该电路类似于图6.3所示的反相放大器。题目要求推导v_{out}（在该例题中是负载电阻R_L两端的电压）用输入（v_1, v_2和v_3）表示的表达式。

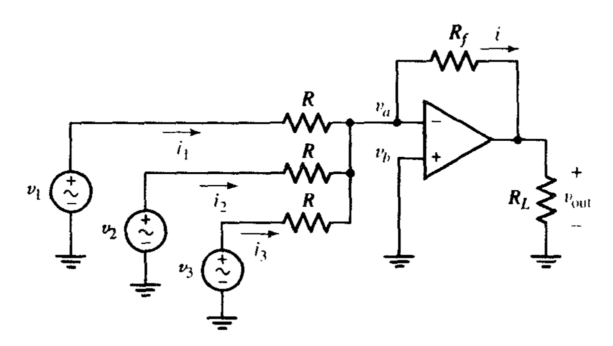


图6.9　具有3个输入的基本加法放大器

因为反相输入端没有电流流入，因此，

$$i=i_1+i_2+i_3$$

这样可以写出标有v_a节点的下列方程：

$$0=\frac{v_a-v_{out}}{R_f}+\frac{v_a-v_1}{R}+\frac{v_a-v_2}{R}+\frac{v_a-v_3}{R}$$

该方程包含v_{out}和v_{in}，但遗憾的是它还包含节点电压v_a。为了去掉该未知量，需要写出额外的v_a与v_{out}、输入电压、R_f和R之间的关系表达式。此时我们还未使用理想运放的规则2。记住，在分析运放电路时，几乎都要使用这两个规则。因为$v_a=v_b=0$，因此可以写出

$$0=\frac{v_{\text{out}}}{R_f}+\frac{v_1}{R}+\frac{v_2}{R}+\frac{v_3}{R}$$

重新排列，可得下面 v_{out} 的表达式：

$$v_{\text{out}}=-\frac{R_f}{R}(v_1+v_2+v_3) \qquad [6]$$

在 $v_2=v_3=0$ 的特殊情况下，可以看到结果与式[3]一致。

从这个结果可以看到几种有趣的情况。首先，如果选取 $R_f=R$，那么输出是3个输入信号 v_1，v_2 和 v_3 之和的相反数。此外，可以选择 R_f 与 R 的比值，使得结果是输入之和乘以一个固定常数。比如，3个电压分别表示从3个不同的天平上获得的信号，该天平标度为 -1 V = 1 lb，因此可以选择 $R_f=R/2.205$ 来得到一个表示总重量（以kg为单位）的电压（由于转换因子的精度在1%范围内）。

此外，我们注意到 R_L 并不出现在最后的表达式中。只要该电阻值不是非常小，该电路的运算就不会受到影响。此时还未考虑运放的详细模型，利用该详细模型可以估计过小的 R_L 对运算的影响。该电阻表示用来监测放大器输出的设备的戴维南等效电阻。如果输出设备是一个简单的电压表，那么 R_L 就表示从电压表两端看进去的戴维南等效电阻（典型值为10 MΩ或更大）。输出设备也可能是扬声器（典型值为8 Ω），在这种情况下，听到的是3个不同声源发出的声音之和，v_1, v_2 和 v_3 就可能表示麦克风。

注意：人们通常会试着假定图6.9中的电流 i 不仅流过电阻 R_f 而且也流过 R_L，这是不正确的。电流很可能会流过运放输出端，但流过这两个电阻的电流不是相同的电流。由于这个原因，总是避免写出运放输出端的KCL方程，这就导致对于大多数运放电路更多的是选择节点分析方法。

练习

6.2 电路如图6.10所示，该电路称为"减法放大器"。推导 v_{out} 用 v_1 和 v_2 表示的表达式。

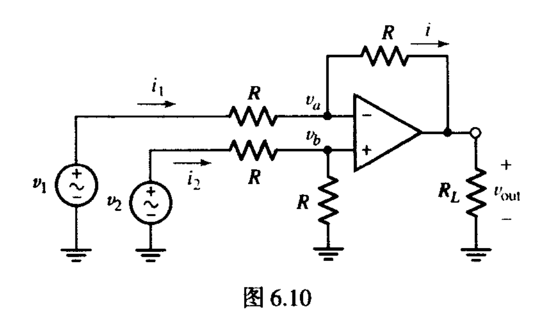


图6.10

答案：$v_{\text{out}}=v_2-v_1$。提示：利用分压原理得到 v_b。

实际应用——光纤对讲机系统

点到点的对讲系统可以用几种不同的方法来实现，具体取决于系统的应用环境。低功耗的射频（RF，Radio Frequency）系统虽然工作得非常好并且成本很划算，但是容易受到其他射频信号的干扰，而且容易被窃听。利用简单导线将两个对讲系统连接起来可以消除许多RF干扰，并增强了保密性。但是，导线容易腐蚀，而且当导线外面的塑料绝缘层磨损时容易造成短路。另外，对于飞机及其相关应用，导线的重量是一个需要考虑的问题（见图6.11）。

表 6.1　基本运放电路总结

名称	电路原理图	输入 – 输出关系
反相放大器		$v_{\text{out}} = -\dfrac{R_f}{R_1} v_{\text{in}}$
同相放大器		$v_{\text{out}} = \left(1 + \dfrac{R_f}{R_1}\right) v_{\text{in}}$
电压跟随器（也称为单位增益放大器）		$v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$
加法放大器		$v_{\text{out}} = -\dfrac{R_f}{R}(v_1 + v_2 + v_3)$
减法放大器		$v_{\text{out}} = v_2 - v_1$



图 6.11　应用环境经常会限制设计

一种方法是把从麦克风产生的电信号转换为光信号，让光信号通过一根细小（直径约 50 μm）的光纤进行传输后，再将光信号转变回电信号，并经过放大后传送到扬声器中。该系统的一个简单的电路原理图如图 6.12 所示，双向通信需要两个这样的系统。

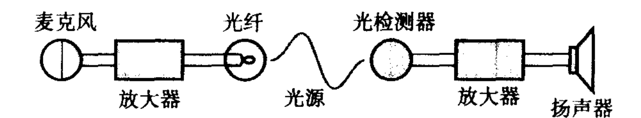


图 6.12 简单光纤单向对讲系统的原理框图

可以分别考虑发送电路和接收电路，因为两个电路实际上在电气上是独立的。图 6.13 所示是一个简单的信号发生电路，它包括一个麦克风、一个发光二极管（LED）和一个用来驱动 LED 的同相运放电路。图中没有给出运放本身需要的电源连接。LED 的光输出大体上与它的电流成正比，但是当电流非常大或非常小的时候不是这种情况。

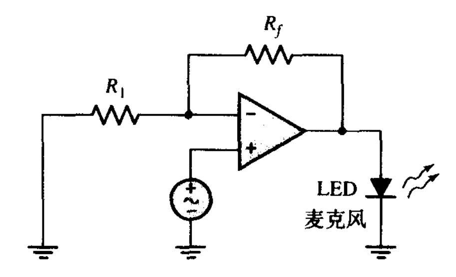


图 6.13 用于将麦克风产生的电信号转换成光信号并通过光纤传输的电路

已知该放大器的增益为

$$\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

它与 LED 的电阻无关。为了选择 R_f 和 R_1，需要知道从麦克风来的输入电压以及驱动 LED 所需的输出电压。通过快速测量可知当人们使用一般的说话语音时麦克风的典型电压输出峰值为 40 mV。LED 制造商推荐 LED 工作在 1.6 V 左右，因此设计增益为 1.6/0.04 = 40。任意选择 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，则 R_f 为 39 kΩ。

图 6.14 所示是单向对讲系统的接收机部分。它将光纤中的光信号转换成电信号，并将电信号放大使得可以从扬声器中发出听得见的声音。

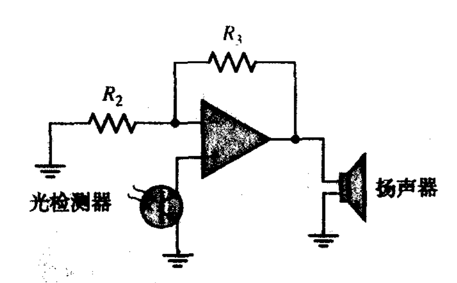


图 6.14 用来将光信号转换成音频信号的接收机电路

将传输电路的 LED 输出耦合到光纤后，从光检测器可以检测到大约 10 mV 的信号。扬声器的最大额定功率为 100 mW，等效电阻为 8 Ω。这相当于扬声器最大电压为 894 mV，因此需要选择 R_2

和R_3以得到894/10 = 89.4的增益。任意选择R_2 = 10 kΩ，则需要选取R_3 = 884 kΩ，至此就完成了该设计。

该电路虽然可以工作，但是LED的非线性特性会导致音频信号的明显失真。我们将改进的设计留在更高级的主题中讨论。

6.3　级联

尽管运放是一种非常通用的多功能器件，但是有许多应用只采用单个运放是不能完成的。在这种情况下，通常可以将几个独立的运放级联在一个电路中来满足应用需求。图6.15所示的就是这样一个例子，它包含图6.9所示的加法放大电路，该加法放大电路只有两个输入源，输出端连接到一个反相放大器。这是一个两级运放电路。

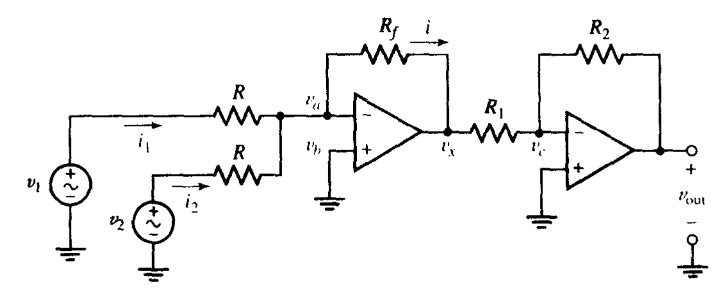


图6.15　两级运放电路，由一个加法放大器级联一个反相放大器组成

前面已经单独分析了这两种类型的放大电路。基于前面的分析，如果这两个运放电路断开，则

$$v_x = -\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \tag{7}$$

和

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1}v_x \tag{8}$$

实际上，因为这两个电路在一个单节点上连接，并且v_x电压不受连接的影响，因此可以合并式[7]和式[8]：

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \tag{9}$$

该式描述了图6.15所示电路的输入-输出特性。但是，并不是总能够将这种电路简化成熟悉的单级电路，因此需要弄明白怎样将图6.15所示的两级电路作为一个整体来分析。

当分析级联电路时，有时采用从最后一级开始往回向输入端分析的方法非常有用。根据理想运放规则1，流过R_1和R_2的电流相同。标有节点v_c的节点方程为

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{out}}{R_2} \tag{10}$$

应用理想运放规则2，设式[10]中的$v_c = 0$，可得

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} \tag{11}$$

因为目的是得到 v_{out} 用 v_1 和 v_2 表示的表达式，因此回到第一个运放可得到 v_x 用两个输入量表示的表达式。

对第1级运放的反相输入端应用理想运放规则1，可得

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \qquad [12]$$

根据理想运放规则2，由于 $v_a = v_b = 0$，因此可以将式[12]中的 v_a 置为零，则式[12]变为

$$0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} \qquad [13]$$

现在已经得到用 v_x（见式[11]）表示的 v_{out} 的表达式，以及用 v_1 和 v_2 表示的 v_x 的表达式（见式[13]）。这些方程分别等于式[7]和式[8]，这意味着将两个单独的电路级联成图6.15所示的电路不会影响每一级的输入输出关系。合并式[11]和式[13]，求得级联放大电路的输入－输出关系为

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1}\frac{R_f}{R}(v_1 + v_2) \qquad [14]$$

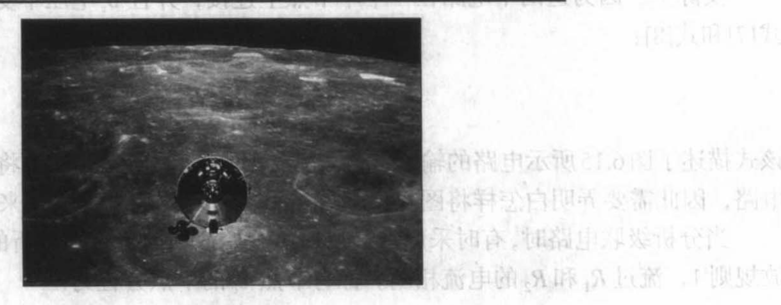
该式等同于式[9]。

因此，该电路是一个加法放大器，但输入和输出之间的相位没有翻转。仔细选择电阻值，可以放大或衰减两个输入电压的和。如果选择 $R_2 = R_1$ 以及 $R_f = R$，则可以得到 $v_{out} = v_1 + v_2$ 的放大电路。

例题6.3　在一个小型月球轨道飞行器中安装了一个多箱气体推进燃料系统。每个箱中燃料的数量通过测量箱中压力（单位为psia①）来监视。箱子容积以及传感器压力和电压范围的技术细节如表6.2所示。设计一个能够给出正直流电压信号的电路，该信号与剩余总燃料成正比，并且1 V = 100%。

表6.2　箱中压力监视系统的技术数据

箱子1容积	10 000 psia
箱子2容积	10 000 psia
箱子3容积	2000 psia
传感器压力范围	0~12 500 psia
传感器电压输出	0~5 Vdc



© Corbis

解： 从表6.2可以看出该系统有3个分开的气体箱子，因此要求有3个单独的传感器。每个传感器额定范围最大为12 500 psia，相应的最大输出为5 V。因此，当箱子1被充满时，它的传感器给出的电压信号为5 ×(10 000/12 500) = 4 V；监测箱子2的传感器的数据也一样。但是，连接到箱子3的传感器提供的最大电压信号只有5 ×(2000/12 500) = 800 mV。

① 磅/平方英寸。这是以真空为参考测量得到的压力。

图6.16(a)所示电路是一种可能的答案，它采用v_1, v_2和v_3代表3个传感器输出的加法放大器，后面级联上一个反相放大器来调整电压符号和幅度。因为不知道传感器的输出电阻，因此每个传感器都采用图6.16(b)所示的缓冲器。这样得到的电路的传感器上没有电流流过（理想情况下）。

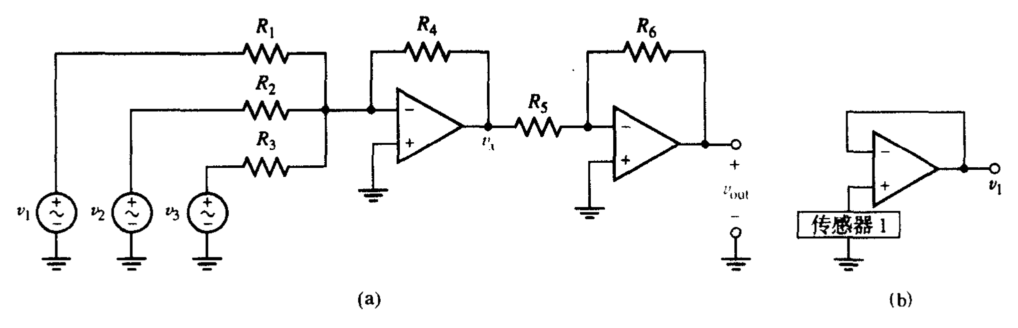


图6.16　(a) 测量总剩余燃料的电路；(b) 缓冲器设计，它可以避免由于传感器内阻未知以及对提供输出电流的能力限制。每个传感器使用一个这样的缓冲器，然后向加法放大器级提供输入v_1, v_2和v_3

为了使电路尽可能简单，首先选择R_1, R_2, R_3和R_4都为1 kΩ，也可以选择任何值，只要4个电阻相等即可。因此，加法放大器的输出为

$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

最后一级必须将该电压反相，并且将其调整到当所有3个箱子都被充满时输出电压为1 V。箱子都被充满时有$v_x = -(4 + 4 + 0.8) = -8.8$ V，因此最后一级的电压比例要求为$R_6/R_5 = 1/8.8$。任意选择$R_6 = 1$ kΩ，则可求得R_5为8.8 kΩ，至此设计完成。

练习

6.3　一座古桥正经历着衰败。在维修之前，只有重量小于1600 kg的汽车才允许通过。为了对重量进行监测，人们设计了一个有4个触点的称重系统。该系统有4个独立的电压信号，分别来自4个轮子接触点，并有1 mV等同于1 kg。设计一个电路，该电路可以输出一个正电压信号来表示汽车的总重量（该电压信号显示在数字万用表中），要求1 mV = 1 kg。可以假定轮子触点电压信号不需要缓冲。

答案：见图6.17。

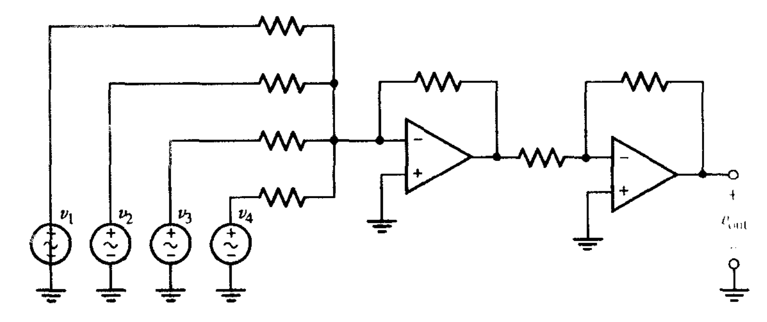


图6.17　练习6.3所提问题的一种可能的解答。所有电阻都为10 kΩ（可以选取任何电阻，只要它们都相等）。输入电压v_1, v_2, v_3和v_4表示从4个轮子传感器得到的电压信号，v_{out}是输出信号，它连接到数字万用表的正输入端。所有5个电压都以地为参考点，数字万用表的公共端也连接到地

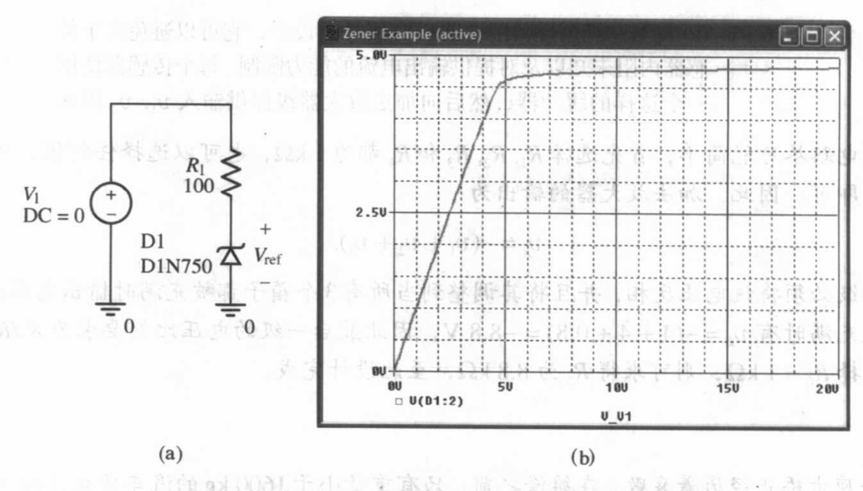


6.4 电压源和电流源电路

在本章和前面几章中，我们经常使用理想电流源和电压源，假设它们分别提供同一个电流或电压（而不考虑它们是怎样连接到电路中的）。当然，这种独立假设有其局限性，在5.2节中讨论实际电源时已经提到实际电源包括一个内置的电阻。该电阻的影响是当需要更大的电流时，电压源的输出电压将减小，或者当需要从电流源获得更大的电压时，电流输出会减小。本节将讨论使用运放来构建具有更可靠特性的电路。

可靠电压源

提供稳定而持续的参考电压最常使用的方法之一是采用称为齐纳二极管的非线性器件。它的符号由一个三角形和三角形顶部横置的Z字形线组成，如图6.18(a)电路中的1N750所示。



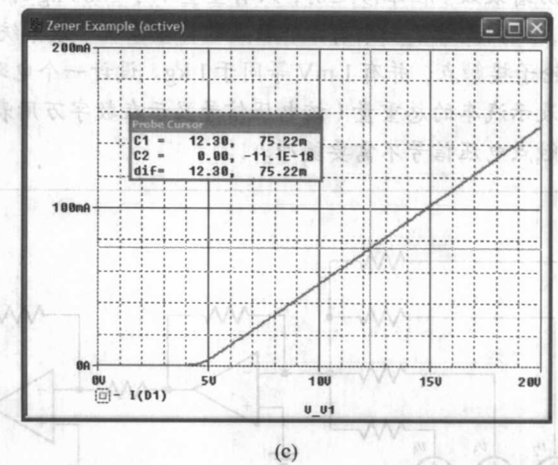


图6.18 (a) 基于1N750齐纳二极管的一个简单电压参考电路的PSpice原理图；(b) 电路的仿真结果，说明二极管电压 V_{ref} 是驱动电压 V_1 的函数；(c) 二极管电流的仿真结果表明，当 V_1 超过12.3 V时，该电流超过最大额定值（假定该理想齐纳二极管产生的电压为12.2 V）

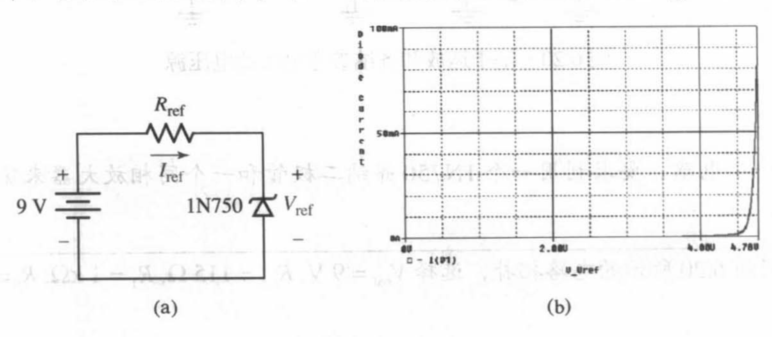
尽管齐纳二极管也是一个二端元件，但它与简单（线性）电阻有很大差别。电阻是对称器件，而二极管不是。它的两个端子标为阳极（三角形的平面部分）和阴极（三角形的角点），其特性差别取决于二极管接入电路中的不同方式。齐纳二极管是一种特殊类型的二极管，它的阴极相对于阳极来说为正电压，当以这种方式连接时称为反向偏置。当电压较小时，二极管相当于电阻，当电压增加时，流过的电流有微小的线性增加。但是反偏电压一旦达到特定电压（V_{BR}）（称为二极管的反向击穿电压或齐纳电压）电压将不再增大，此时基本上可以流过小于二极管最大额定电流的任意电流（对于1N750，最大额定电流为75 mA，齐纳电压为4.7 V）。

考虑图6.18(b)中给出的仿真结果，它显示了当电压源V_1从0 V变到20 V时二极管两端的电压V_{ref}。只要V_1保持大于5 V，二极管两端的电压本质上保持固定不变，因此，可以用9 V电池替换V_1，并且当电池放电产生电压下降时，参考电压不会发生变化。R_1的作用是在电池和二极管之间提供必要的电压降，选择R_1的值可以确保二极管工作在齐纳电压值上，但是又要保证电流小于最大额定电流。例如，在图6.18(c)中，当电源电压V_1大于12 V时，电路就超过了75 mA的额定电流。因此，必须根据电源电压来选择电阻R_1的值，参见例题6.4。

例题6.4 利用1N750齐纳二极管设计一个电路，该电路由一个9 V电池供电，要求产生4.7 V的参考电压。

解： 1N750的最大额定电流为75 mA，齐纳电压为4.7 V。9 V电池的电压会随着其充电状态而略有变化，但在本设计中忽略这个影响。

图6.19(a)所示电路可以满足要求，唯一的问题是要确定合适的电阻R_{ref}的值。



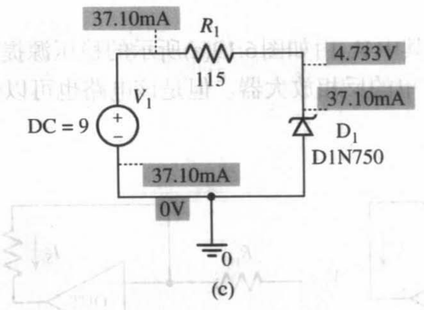


图6.19 (a) 基于1N750齐纳二极管的电压参考电路；(b) 二极管I-V关系；(c) 最后电路的PSpice仿真

如果二极管两端电压降为4.7 V，那么R_{ref}两端的压降必定为9 − 4.7 = 4.3 V，因此，

$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{I_{ref}}$$

通过指定电流值可确定R_{ref}。已知对于该二极管I_{ref}电流不允许超过75 mA，并且更大的电流将使电池放电更快。但是在图6.19(b)中可以看到，我们不能任意选择I_{ref}，太小的电流将使二极管不能工作在齐纳击穿区域。在缺少详细的二极管电流－电压关系式时（为非线性关系），我们根据经验选择最大额定电流的50%。因此可得

$$R_{ref} = \frac{4.3}{0.0375} = 115\ \Omega$$

可以通过PSpice仿真获得详情，虽然从图6.19(c)已经可以看到这是一个非常接近目标值的设计。

图6.18(a)所示的基本齐纳二极管参考电路在许多情况下都可以很好地工作，但是有时根据所选的齐纳二极管，对电压值会有一些限制。此外，人们经常发现所示电路并不适用于要求电流为毫安数量级的应用。在这种情况下，可以结合简单放大器来使用齐纳二极管，如图6.20所示，从而可以通过调整R_1或R_f的值而不必更换齐纳二极管就能够控制稳定的输出电压。

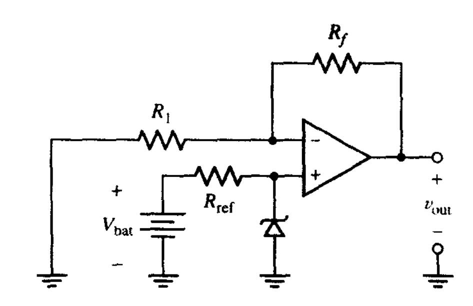


图6.20　基于运放和齐纳参考电压的电压源

练习

6.4　设计一个电路，要求利用一个1N750齐纳二极管和一个同相放大器来输出6 V的参考电压。

答案：利用图6.20所示的电路拓扑，选择$V_{bat} = 9$ V, $R_{ref} = 115\ \Omega$, $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_f = 268\ \Omega$。

可靠电流源

考虑图6.21(a)所示电路，其中V_{ref}由如图6.19(a)所示的稳压源提供。假设连接运放的输出管脚，读者可以认出该电路是一个简单的反相放大器。但是该电路也可以作为一个电流源，其中R_L表示电阻负载。

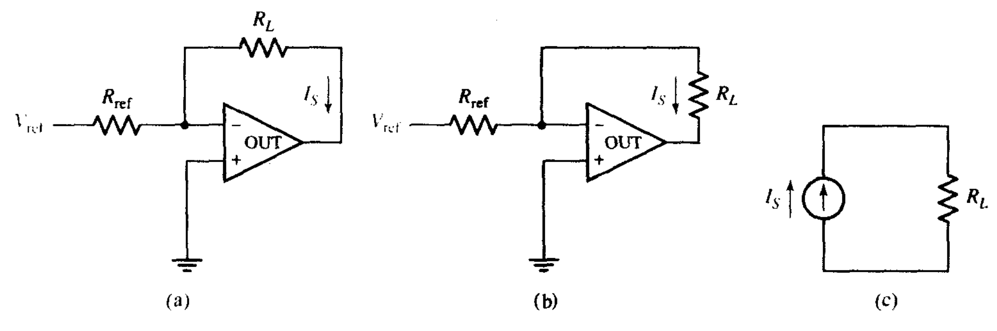


图6.21　(a) 一个基于运放的电流源，由参考电压V_{ref}控制；(b) 重画电路，突出负载；(c) 电路模型，电阻R_L表示未知无源负载电路的诺顿等效电阻

输入电压V_{ref}呈现在参考电阻R_{ref}两端，这是因为运放同相输入端接地的缘故。流进反相输入端的电流为零，因此流过负载电阻R_L的电流为

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

换句话说，提供给R_L的电流与该电阻无关，这是理想电流源的主要特性。值得注意的是，运放输出端的电压不是我们感兴趣的量。可以把负载电阻R_L看成是一些未知无源负载电路的诺顿等效（或戴维南等效），它从运放电流吸收功率。重画电路如图6.21(b)所示，可以看到它与我们熟悉的图6.21(c)所示电路有许多共同之处。换句话说，可以把该运放电路作为独立电流源使用，其基本特性是理想的，只要选择运放的输出电流不超出最大值范围即可。

例题6.5 设计一个电流源，它可以向任意电阻负载提供1 mA的电流。

解： 根据图6.20和图6.21(a)设计的电路，可以知道流过负载R_L的电流为

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

其中必须选择V_{ref}和R_{ref}的值，同时必须设计一个提供V_{ref}的电路。如果利用1N750齐纳二极管与一个9 V电池以及一个100 Ω电阻串联连接，那么从图6.18(b)可知在二极管两端存在4.9 V的电压，因此$V_{ref} = 4.9$ V，则R_{ref}为$4.9/10^{-3} = 4.9$ kΩ。完整电路如图6.22所示。

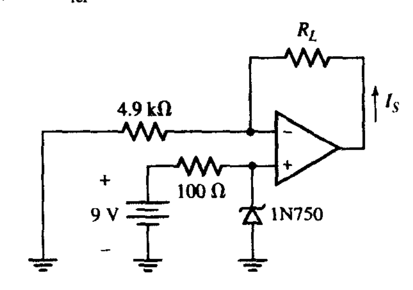


图6.22 电流源的一种可能的设计。注意电流方向与图6.21(b)所示的不同

我们注意到如果假定二极管电压为4.7 V，那么设计得到的电流误差非常小，只有几个百分点，电阻值在5%~10%的容差范围内，结果将与我们预计的相符。

现在剩下的唯一问题是实际上是否可以向任意R_L提供1 mA的电流。当$R_L = 0$时，运放的输出电压为4.9 V，这是合理的。但是当负载电阻增加时，运放输出电压也增大，最终必定达到如6.5节讨论的一些极限。

练习

6.5 设计一个电流源，它能够向负载电阻提供500 μA的电流。

答案： 图6.23是一种可能的方案。

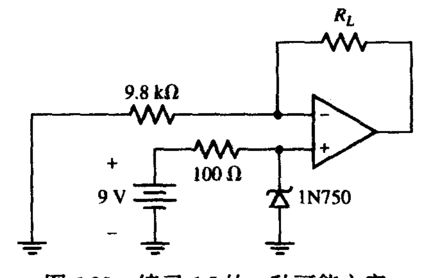


图6.23 练习6.5的一种可能方案

6.5 实际考虑

更详细的运放模型

从根本上说，可以将运放看成电压控制的受控电压源，其中，运放的输出由受控电压源提供，而受控电压源的控制电压为输入端两端的电压。图6.24给出了一个合理的实际运放模型的原理框图，它含有一个电压增益为A、输出电阻为R_o、输入电阻为R_i的受控电压源。表6.3给出了几种常见运放的典型参数值。

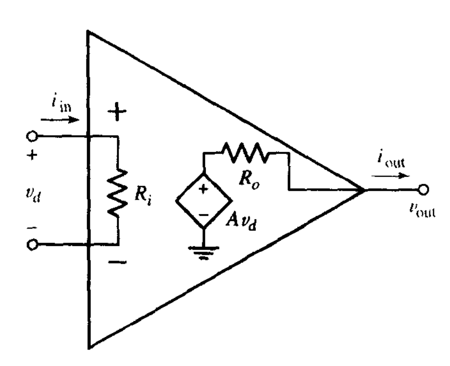


图6.24 一个更详细的运放模型

表6.3 几种类型运放的典型参数值

型号	μA741	LM324	LF411	AD549K	OPA690
描述	通用目的	低功耗	低失调，低漂移JFET输入	超低输入偏置电流	宽带视频运放
开环增益A	2×10^5 V/V	10^5 V/V	2×10^5 V/V	10^6 V/V	2800 V/V
输入电阻	2 MΩ	*	1 TΩ	10 TΩ	190 kΩ
输出电阻	75 Ω	*	~1 Ω	~15 Ω	*
输入偏置电流	80 nA	45 nA	50 pA	75 fA	3 μA
输入失调电压	1.0 mV	2.0 mV	0.8 mV	0.150 mV	±1.0 mV
共模抑制比（CMRR）	90 dB	85 dB	100 dB	100 dB	65 dB
摆率	0.5 V/μs	*	15 V/μs	3 V/μs	1800 V/μs
PSpice模型	√	√	√		

* 制造商未提供。

√ 表示在Orcad Capture CIS 10.0中包含PSpice模型。

参数A称为运放的开环增益，其典型范围为10^5~10^6。我们注意到表6.3中所列的所有运放都具有非常大的开环电压增益，尤其与例题6.1中的同相放大电路的电压增益11相比更是如此。要记住，运放本身的开环电压增益和特定运放电路的闭环电压增益之间的区别。这里，回路指的是输出管脚和反相输入管脚之间的一条外部路径，可以是一条导线、一个电阻或其他类型的元件，具体取决于不同的应用。

μA741是一种很常用的运放，由仙童（Fairchild）公司在1968年首先制造出来。它的特性参数如下：开环电压增益为200 000，输入电阻为2 MΩ，输出电阻为75 Ω。为分析理想运放模型和实际器件特性的近似程度，下面重新分析图6.3所示的反相放大电路。

例题6.6　参见图6.24所示的μA741运放模型，使用恰当的参数分析如图6.3所示的反相放大电路。

解： 首先用详细模型替代图6.3中的理想运放模型，得到图6.25所示的电路。注意，不能够再使用理想运放的规则，因为这里已经不使用理想运放模型了。但是可以写出两个节点方程：

$$0 = \frac{-v_d - v_{in}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{out}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{out} + v_d}{R_f} + \frac{v_{out} - Av_d}{R_o}$$

进行一些直接但有些烦琐的代数运算后可以消去 v_d，联立上面两个方程，可以得到下面用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式：

$$v_{out} = \left[\frac{(R_o + R_f)}{R_o - AR_f}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i}\right) - \frac{1}{R_f}\right]^{-1} \frac{v_{in}}{R_1} \qquad [15]$$

将 $v_{in} = 5\sin 3t$ mV，$R_1 = 4.7$ kΩ，$R_f = 47$ kΩ，$R_o = 75$ Ω，$R_i = 2$ MΩ和 $A = 2\times10^5$ 代入，可得

$$v_{out} = -9.999\,448 v_{in} = -49.997\,24\sin 3t \text{ mV}$$

把上面的结果与采用理想运放模型得到的表达式（$v_{out} = -10v_{in} = -50\sin 3t$ mV）进行比较，可以看到，理想运放是一个相当精确的模型。而且采用理想运放模型后，极大地简化了电路分析中的代数运算。我们注意到，如果允许 $A\to\infty$，$R_o\to 0$，$R_i\to\infty$，那么式[15]可以简化为

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1}v_{in}$$

这与前面假设运放是理想时的反相放大器推导出的结论一样。

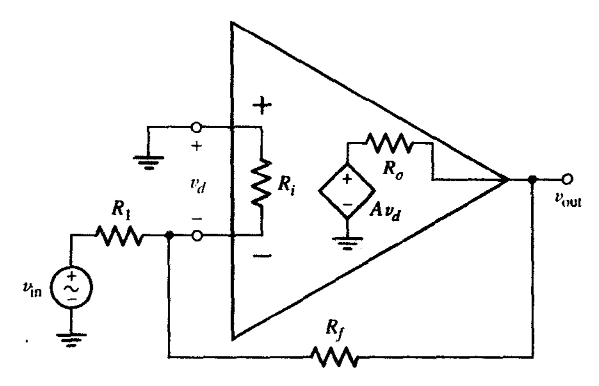


图6.25　使用详细运放模型的反相放大电路

练习

6.6　运放电路如图6.3所示，假设开环增益有限（A），输入电阻有限（R_i），输出电阻为零（R_o），求用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

答案： $v_{out}/v_{in} = -AR_fR_i/[(1+A)R_1R_i + R_1R_f + R_fR_i]$。

理想运放规则的推导

前面已经讲到，理想运放模型对于实际器件特性的近似非常精确。事实上，使用上面的有限开环增益、有限输入电阻和非零输出电阻的更详细的模型可以直接推导出前面两个理想运放规则。

参考图6.24，可以看到实际运放的开路输出电压可以表示为

$$v_{\text{out}} = A\,v_d \quad [16]$$

重新整理该方程，可得 v_d（有时称为差分输入电压）可以写成

$$v_d = \frac{v_{\text{out}}}{A} \quad [17]$$

读者或许会想到，实际运放的输出电压 v_{out} 的幅度应该有一个限制。下一节将说明必须给运放提供一个外部直流电压，给内部的电路提供电源。这个外部电源电压就表示了 v_{out} 的最大幅度，其典型值为5~24 V。如果用μA741的开环增益 2×10^5 除24 V，可得到 $v_d = 120\ \mu\text{V}$。尽管它不为零，但是与输出电压24 V相比，如此小的数值实际上可以视为零。理想运放具有无穷大的开环增益，所以无论 v_{out} 有多大，总有 $v_d = 0$，由此可以得出理想运放规则2。

理想运放规则1表述为："没有电流流入两个输入端"。参考图6.23，运放输入电流为

$$i_{\text{in}} = \frac{v_d}{R_i}$$

我们刚刚知道 v_d 是一个非常小的电压。从表6.3中可知，典型运放的输入电阻非常大，数量级从MΩ到TΩ。利用上面的 $v_d = 120\ \mu\text{V}$ 和 $R_i = 2\ \text{M}\Omega$，可以算出输入电流为60 pA。这是一个非常小的电流，需要一个特制的安培表（称为皮安培表）来测量。从表6.3可以看到μA741的典型输入电流（更确切的术语是输入偏置电流）只有80 nA，比我们的估计值大3个数量级。这是我们使用的运放模型的一个缺点，因为它不能够为输入偏置电流提供精确值。与典型运放电路中的其他电流相比，可以将该电流视为零，现代运放（例如AD549）甚至具有更小的输入偏置电流。因此，可以得出结论：理想运放规则1是非常合理的假定。

从前面的讨论可以很清楚地看到理想运放具有无限大的开环增益和无限大的输入电阻，但是没有考虑运放的输出电阻以及它对电路可能产生的影响。参考图6.24，可以看到

$$v_{\text{out}} = A v_d - R_o i_{\text{out}}$$

其中，i_{out} 是从运放输出管脚流出的电流。因此，非零的 R_o 值将使输出电压减小，当输出电流增大时，它的影响将越来越明显。因此，理想运放规定输出电阻为0 Ω。μA741的最大输出电阻为75 Ω，现代器件（如AD549）具有更小的输出电阻。

共模抑制

运放有时称为差分放大器，因为输出与两个输入端之间的电压差成正比。这意味着如果两个输入端施加相同的电压，那么期望的输出电压为零。运放的这个特点是最吸引人的特性之一，被称为共模抑制。图6.26所示电路的输出电压为

$$v_{\text{out}} = v_2 - v_1$$

如果 $v_1 = 2 + 3\sin 3t$ V，$v_2 = 2$ V，那么其输出将为 $-3\sin 3t$ V；v_1 和 v_2 共有的2 V分量不会被放大，当然也不会在输出端出现。

对于实际运放，事实上可以发现共模信号对输出有一个小的贡献。为了比较不同的运放，通常用共模抑制比（CMRR）来表示运放抑制共模信号的能力。定义 $v_{o_{\text{CM}}}$ 为当两个输入相等时（$v_1 = v_2 = v_{\text{CM}}$）的输出电压，可以确定运放的共模增益 A_{CM} 为

$$A_{\text{CM}} = \left|\frac{v_{o_{\text{CM}}}}{v_{\text{CM}}}\right|$$

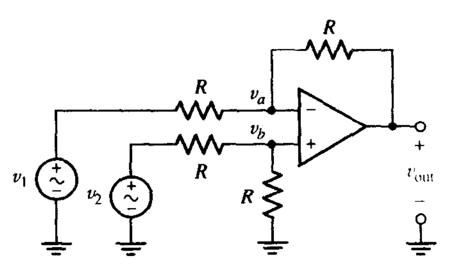


图 6.26　连接成一个差分放大器的运放

然后定义 CMRR 为差模增益 A 与共模增益 A_{CM} 的比：

$$\text{CMRR} \equiv \left|\frac{A}{A_{CM}}\right| \tag{18}$$

然而经常以对数表示成分贝的形式（dB）：

$$\text{CMRR}_{(\text{dB})} \equiv 20\log_{10}\left|\frac{A}{A_{CM}}\right| \text{dB} \tag{19}$$

表 6.3 给出了几个不同运放的典型值，100 dB 表示 A 与 A_{CM} 比值的绝对值为 10^5。

负反馈

前面已经讲到运放的开环增益非常大，理想情况下为无穷大。但是在实际情况中，它的精确值与制造商给出的典型值有所不同。例如，温度对运放性能有几方面明显的影响，所以，在 -20°C 的天气时运放的特性与在阳光充足的温暖天气时的特性可能很不一样。而且，在不同时候制造的运放的特性也会有所不同。如果要设计一个电路，其输出电压为开环增益乘以其中一个输入端的电压，那么在合理的精度范围内，预测此时的输出电压将变得很困难，因为它可能会随环境温度而变化。

解决该问题的一个方法是采用负反馈，它是将输入减去一小部分输出的过程。比如，某些因素改变了放大器的特性使得其输出增加，那么负反馈将同时使输入减小。太强的负反馈将抑制任何有用的放大，但是小的反馈可以增加稳定性。一个负反馈的例子是我们用手靠近火焰的过程，越靠近火焰，从手传来的负反馈信号将越大。然而，如果负反馈的比例过大，则会使得我们对热量生厌而远离火焰，直至冻坏为止。正反馈是输入信号加上一部分输出信号的过程。一个典型的例子是用麦克风直接对着扬声器，开始时非常微弱的声音将很快地被反复放大直到系统发出刺耳的尖声。正反馈往往会导致系统不稳定。

本章考虑的所有电路都通过输出和反相输入端之间的电阻引入负反馈。输出端和输入端之间的回路将减小输出电压对开环增益精确度的依赖程度（正如在例题6.6中所看到的那样），因此不必精确测量所用的每个运放的开环增益。当开环增益A有一些小的改变时将不会对电路的工作产生明显影响；当 A 对运放所处环境敏感时，负反馈也能增加系统的稳定性。比如，如果 A 随环境温度变化突然增大，一个大的反馈电压将加到反相输入端。这将减小差分输入电压 v_d，因此输出电压 Av_d 的变化就很小。必须注意闭环电路增益总是小于器件的开环增益，这是提高稳定性和减小对参数变化敏感性所付出的代价。

饱和

到目前为止，我们都把运放看成纯线性电路，而且假定其特性与接入电路的方式无关。实际上，为了使内部电路工作，必须向运放提供电源，如图 6.27 所示。正电源（典型范围为 5 ~24 V）

接到标有 V^+ 的端子，相同幅度的负电源接到 V^- 端。也有一些应用使用单电源或使用两个电源的幅度不相等。运放制造商通常会指定最大的电源电压，超过该电压会损坏内部的晶体管。

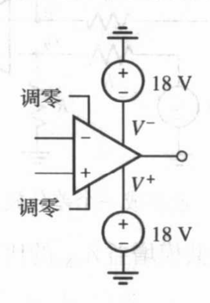


图 6.27 接有正负电源的运放。使用 18 V 电源作为例子，注意每个电源的极性

当设计电路时，电源电压是一个关键的选择，因为它们给出了运放最大可能的输出电压①。比如，考虑图 6.26 所示的运放电路，它连接成同相放大器，增益为 10。图 6.28 所示的是 PSpice 仿真结果，实际上人们发现只在 ±1.71 V 的输入电压范围内该运放具有线性特点。超出这个范围，输出电压不再与输入电压成比例，而是达到了 17.6 V 的最大幅度。这个重要的非线性结果称为饱和，它表示输入电压的进一步增加不会导致输出电压的变化。该现象说明实际运放的输出不能超过其电源电压。例如，如果运放的电源为 +9 V 和 –5 V，那么输出电压将被限制在 –5 V 到 +9 V 的范围内。运放输出成为限制在正负饱和电压范围内的线性响应。作为一般原则，在设计运放电路时总是要求避免进入饱和区，这就需要根据闭环增益和最大输入电压来仔细选取运放的工作电压。

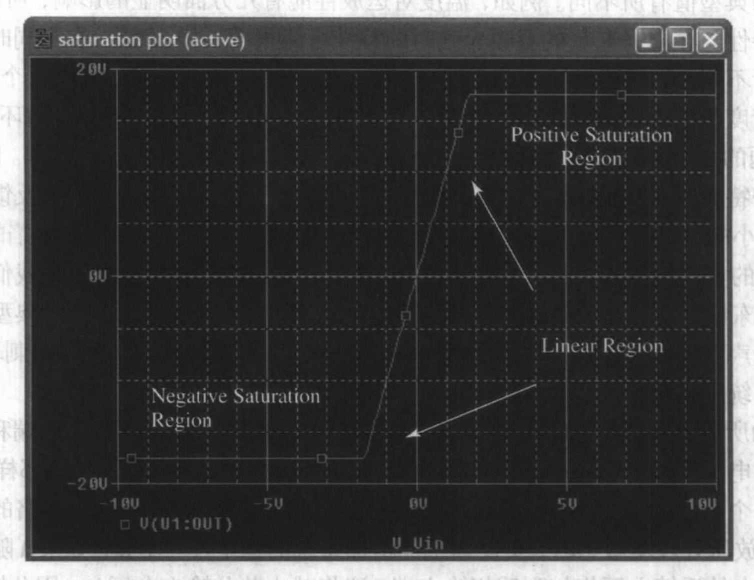


图 6.28 μA741 接成同相放大器的输入 – 输出仿真结果，该放大器增益为 10，由 ±18 V 的电源供电

输入失调电压

正如我们所看到的那样，在使用运放时有许多实际考虑需要牢记在心。特别需要指出的非理想特性是：即使是在两个输入端短接时，实际运放也可能具有非零输出。这时的输出值称为失调电压，

① 实际上发现最大输出电压略小于电源电压 1 V 左右。

使输出恢复为零所需的输入电压称为输入失调电压。参考表6.3可以看到输入失调电压的典型值为毫伏（mV）数量级或更小。

大多数运放提供标有“调零”或“平衡”的两个管脚。通过在这两个管脚之间接上可变电阻可调整输出电压。可变电阻是一种三端器件，通常用在收音机音量控制之类的应用中，它有一个环形旋钮，通过旋转它可改变电阻的阻值。另外，它还有3个接线端。如果只使用变阻器两端，那么不管旋钮的位置在哪里，其电阻都是固定的。如果使用中间的接线端和两端的其中一个接线端，则可变电阻器的阻值依赖于旋钮位置。图6.29所示的电路是用来调整运放输出电压的典型电路，在设备制造商的说明中通常会给出特定器件的可选电路。

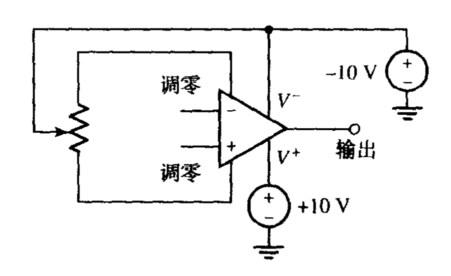


图6.29 使输出电压为零的外部参考电路。使用±10 V电源作为例子，实际使用的电源电压在实际中选取

摆率

到目前为止，运放被假设为对任何频率的信号都具有相同的响应，但在实际工作时，这方面有一些限制。我们知道运放电路在直流（即零频率）时可以很好地工作，但是必须考虑当信号频率增加时的性能。运放频率性能的一个参量是它的摆率，即输出电压能对输入电压的变化做出响应的速率，通常用V/μs表示。表6.3中给出了一些商用器件的典型摆率的指标为每微秒几伏的数量级。一个例外是OPA690，它是为视频应用而设计的高速运放，要求工作在几百兆赫。可以看到，它的摆率达到了1800 V/μs，但是其他参数（特别是输入偏置电流和CMRR）会遭受一些损失。

图6.30所示的PSpice仿真解释了由于摆率限制而使运放性能下降的现象。仿真电路使用LF411运放，接成同相放大器形式，增益为2，并由±15 V电源供电。输入波形以绿色（下面的波形）显示，有1 V的峰值电压，输出电压以红色（上面的波形）显示。图6.30(a)的仿真对应于1 μs的上升和下降时间，对人而言是一个非常短的时间跨度，但LF411有足够的处理能力。当上升和下降时间减小10倍即变为100 ns［见图6.30(b)］时，开始看出LF411在跟踪输入时有一些困难。当上升时间和下降时间为50 ns［见图6.30(c)］时，可以看出不仅输出和输入之间有很大的延时，而且波形有明显的失真，这不是一个好的特征。这个行为与表6.3中指定的15 V/μs的典型摆率一致，表明输出从0 V变到2 V（或从2 V变到0 V）需要的时间大概是130 ns。

封装

现代运放有许多不同类型的封装形式。有些类型适合于高温工作，并且有许多不同的方法可以将IC安装到PCB板上。图6.31给出了LM741的几种不同的封装形式，该器件由国家半导体公司制造。标有“NC”的管脚表示不连接。图中所示的封装类型是标准形式，使用在很多集成电路中，有时集成电路实际的管脚数比所需的数目要多。

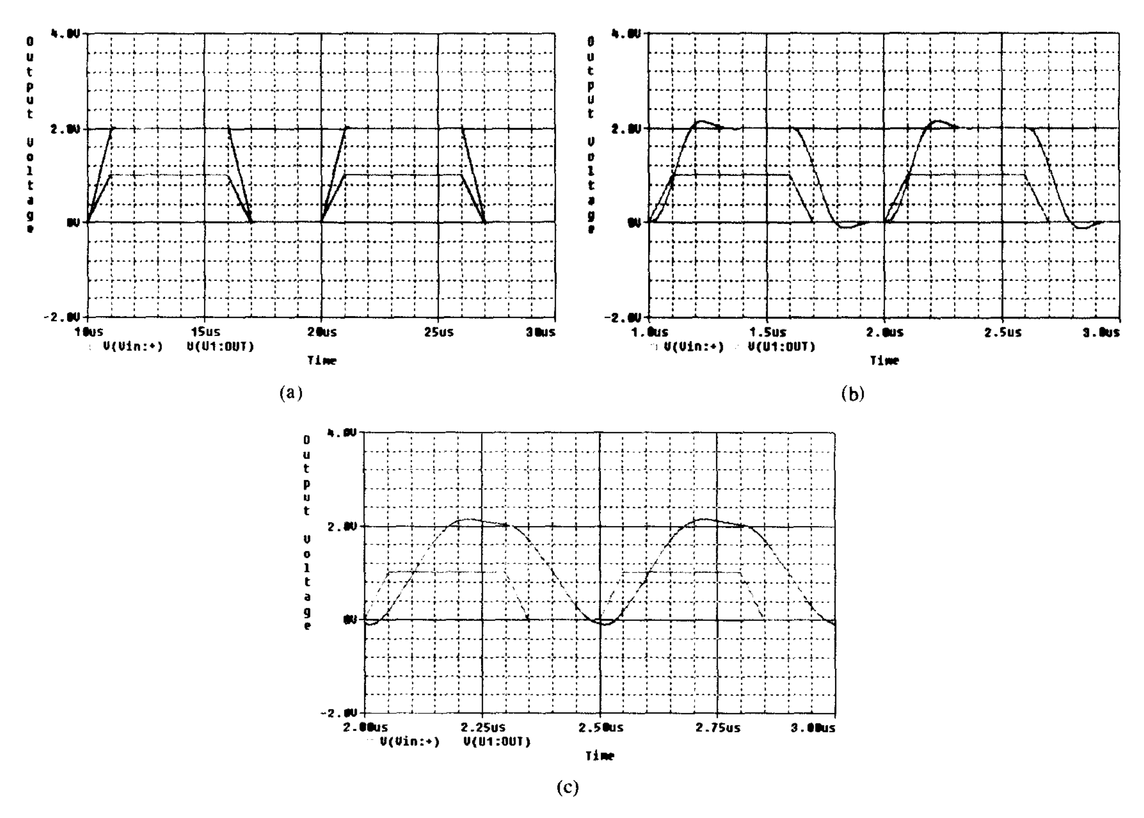


图6.30 LF411运放组成同相放大器的仿真性能，该放大器增益为2，由±15 V电源供电，输入为脉冲信号；(a) 上升和下降时间为1 μs，脉冲宽度为5 μs；(b) 上升和下降时间为100 ns，脉冲宽度为500 ns；(c) 上升和下降时间为50 ns，脉冲宽度为250 ns

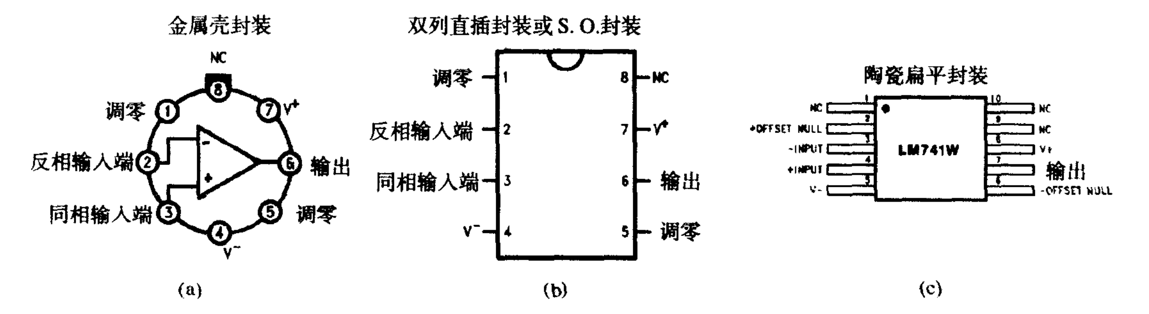


图6.31 LM741运放的几种不同的封装形式：(a) 金属壳封装；(b) 双列直插封装；(c) 陶瓷扁平封装

计算机辅助分析

在估算运放电路的输出时，PSpice是一种很有用的工具，特别是在时变输入的情况下。但是我们会发现，通常情形下，采用理想运放模型的结果与PSpice的仿真结果相当吻合。

当执行运放电路的PSpice仿真时，记住必须连接上正负直流电源。尽管调零管脚用来使输出电压为零，但是PSpice并没有内置任何失调，因此这些管脚通常是悬空的。

表6.3给出了PSpice仿真版中具有的不同运放型号，其他模型在PSpice的商用版本中提供。

例题 6.7　利用PSpice对图6.3所示的电路进行仿真。如果使用±15 V的电源，确定在什么时候达到饱和。将利用理想运放模型得到的增益与PSpice仿真得到的增益进行比较。

解：首先利用原理图捕获工具画出图6.3所示的反相放大器，如图6.32所示。注意利用两个独立的15 V直流电源来为运放供电。

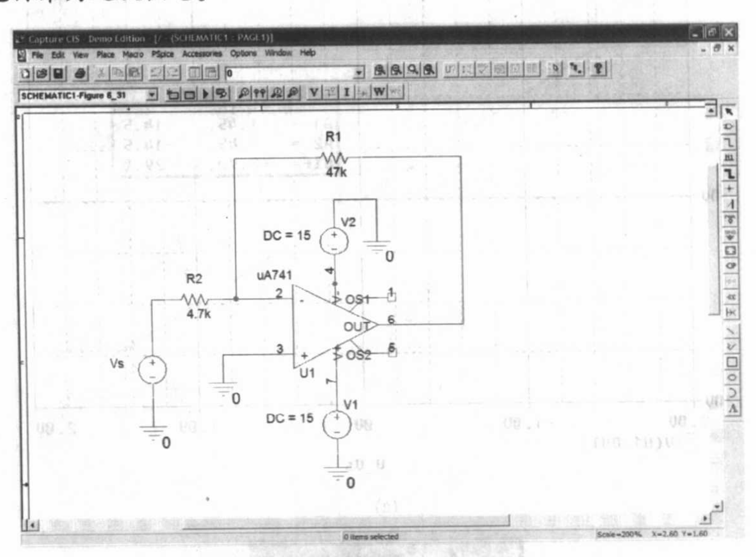


图6.32　图6.3的反相放大器，使用μA741运放

利用理想运放模型分析得到的增益为−10。当输入为5 sin3*t* mV时，输出电压为−50 sin3*t* mV。但是在该分析中隐含的假定是任何输入电压都被放大−10倍。事实上，这只对小的输入电压成立，如果输入电压增加到某个值，输出将最终达到饱和，饱和输出电压接近于相应的电源电压。执行直流扫描（从−2 V到+2 V），如图6.33所示，这比电源电压除以增益得到的值要略大，因此结果就会包含正、负饱和区域。

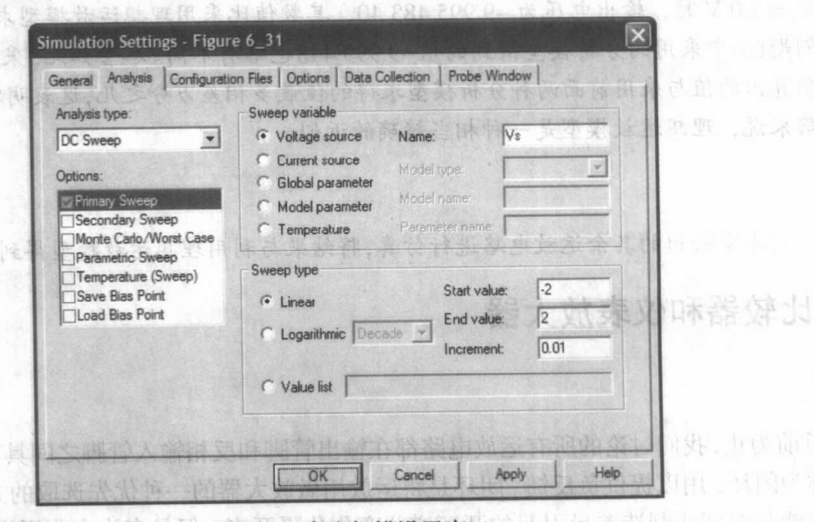


图6.33　直流扫描设置窗口

利用光标工具查看图6.34(a)所示的仿真结果[为了清晰起见，图6.34(b)进行了扩展]，可以发现放大器的输入−输出特性在相当大的输入电压范围内确实是线性的，这个线性范围大约为

$-1.45 < V_s < +1.45$ V，但略小于正负电源电压除以增益所得到的范围。在该范围以外运放的输出趋于饱和，这时输出基本不依赖于输入电压。因此，在这两个饱和区域，电路并不表现为线性放大器。

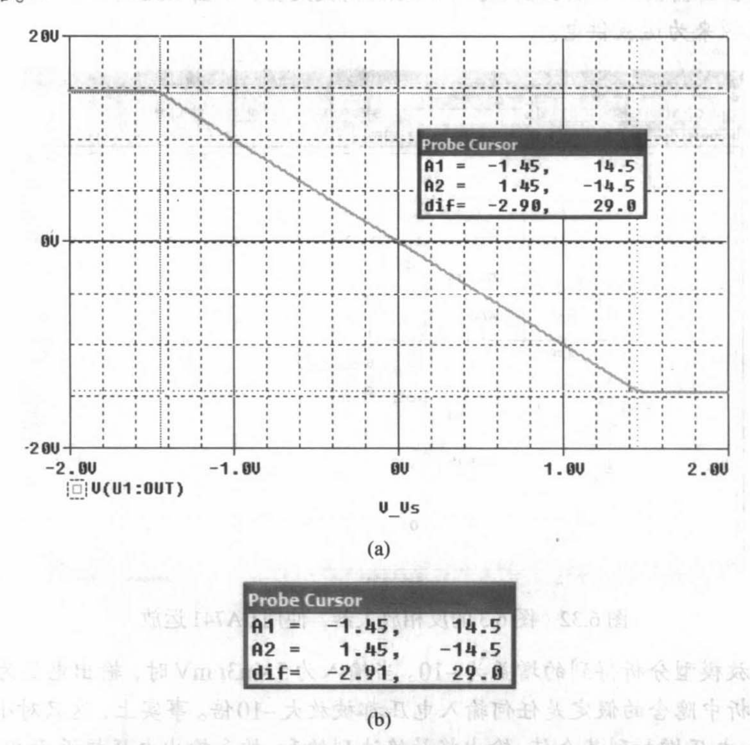


图 6.34 (a) 反相放大器电路的输出电压，光标工具指出了饱和起始点；(b) 光标窗口

增加光标指针位数（Tools，Options，Number of Cursor Digits）到 10，可以看到，当输入电压为 $V_s = 1.0$ V 时，输出电压为 −9.995 483 40，其数值比采用理想运放模型求得的 −10 V 略小，与例题6.6中采用的分析模型得到的值−9.999 448也略有不同。尽管如此，采用μA741的PSpice模型算出的值与采用前面两种分析模型求得的值最多相差万分之几，这表明对于现代集成运放电路来说，理想运放模型是一种相当精确的近似。

练习

6.7 对本章给出的其余运放电路进行仿真，将结果与利用理想运放模型得到的结果进行比较。

6.6 比较器和仪表放大器

比较器

到目前为止，我们讨论的所有运放电路都在输出管脚和反相输入管脚之间具有电气连接。这种情况被称为闭环，用以提供负反馈。闭环是将运放用做放大器的一种优先选取的方法，因为它可以将电路性能与温度或制造差异引起的开环增益变化分隔开来。但是有许多应用需要使用处于开环状态的运放。这类应用中的器件通常是指比较器，其设计与通常用来改善开环工作速度的运放略有不同。

图6.35(a)所示是一个简单的比较器电路，其中同相输入端接有2.5 V的参考电压，被比较的电压（v_{in}）接到反相输入端。因为运放的开环增益A非常大（典型值为10^5或更高，如表6.3所示），所以在两个输入端之间不需要很大的电压差就可以使运放达到饱和。实际上，只要差分输入电压大于电源电压除以A［在图6.35(a)所示的电路中约为±120 μA，其中$A = 10^5$］。比较器电路的输出如图6.35(b)所示，其中响应在正负电源电压之间摆动，从本质上讲它没有线性放大区域。因此，比较器+12 V的输出表示输入电压小于参考电压，而-12 V的输出表示输入电压大于参考电压。如果将参考电压连接到反相输入端将得到相反的结果。

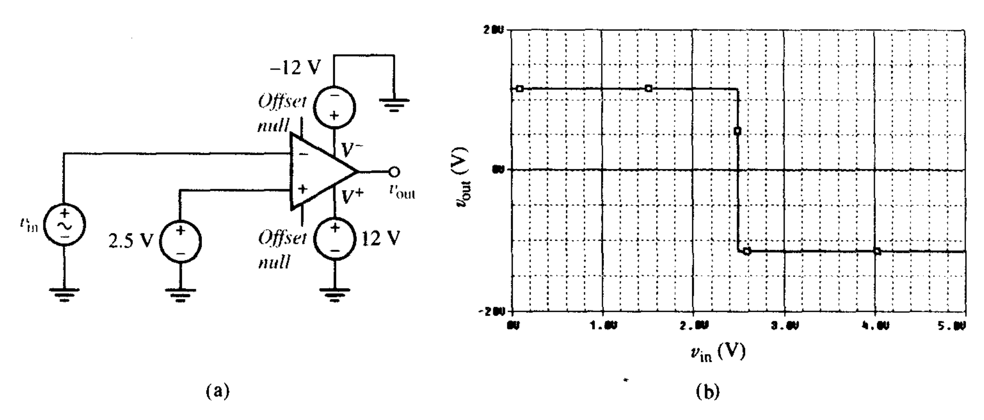


图6.35 (a)一个比较器电路的实例，参考电压为2.5 V；(b)输入-输出特性曲线

例题6.8 设计一个电路，当电压信号低于3 V时，该电路输出5 V的“逻辑1”电平，否则输出为0 V。

解： 因为希望比较器的输出在0 V和5 V之间摆动，因此将使用利用单+5 V电源供电的运放，连接方式如图6.36所示。将+3 V参考电压接到同相输入端，该参考电压利用两个1.5 V电池串联得到或使用合适的齐纳二极管参考电路来实现。然后将输入电压信号（表示成v_{signal}）接到反相输入端。事实上，比较器电路的饱和电压范围比电源电压值略小，因此需要通过测试或模拟做一些调整。

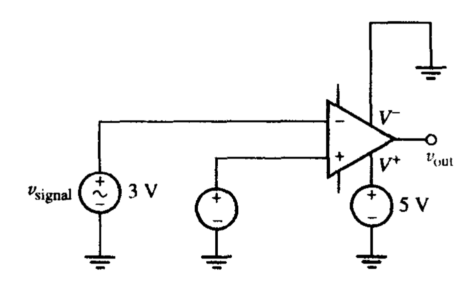


图6.36 所求电路的一种可能的设计方案

练习

6.8 设计一个电路，当一个特定电压（v_{signal}）超过0 V时给出12 V输出，否则给出-2 V输出。

答案： 一种可能的解决方案如图6.37所示。

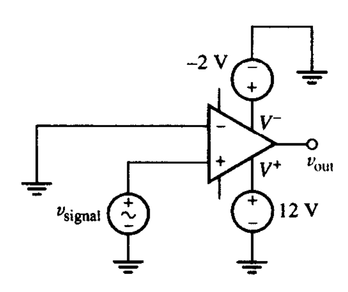


图 6.37 练习 6.8 的一种可能的解决方案

仪表放大器

基本比较器电路对器件输入端的电压差起作用，但是它不能放大信号，因为输出与输入不成比例。图6.10所示的差分放大器也对反相输入端和同相输入端之间的电压差起作用，而且可以提供与该差值电压成正比的输出，条件是采取措施避免电路进入饱和。当输入电压非常小时，更好的选择是一种称为仪表放大器的器件，它实际上是将 3 个运放器件封装成的一个器件。

图 6.38(a)所示的是一个通用仪表放大器配置的例子，图 6.38(b)所示是它的符号。每个输入直接接到电压跟随器，两个电压跟随器的输出接至减法放大器。该器件特别适合于以下应用：输入电压信号非常小的应用（例如，毫伏数量级），如由热电耦或应变仪产生的信号；存在几伏的共模噪声信号的应用。

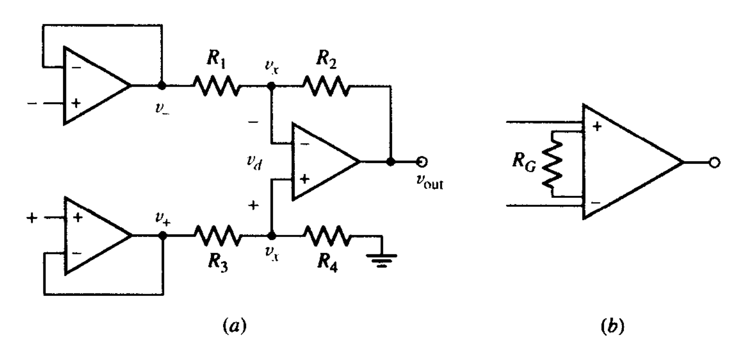


图 6.38 (a) 基本仪表放大器；(b) 通用符号

如果仪表放大器的所有器件都制造在同一个硅片上，那么就可能得到非常匹配的器件特性以及两组电阻精确的比值。为了使仪表放大器的CMRR最大，希望 $R_4/R_3 = R_2/R_1$，从而可以对输入信号的共模分量进行相同的放大。为了对此更进一步地进行探讨，将上面的电压跟随器的输出电压记为 v_-，下面的电压跟随器的输出电压记为 v_+。假定3个运放都是理想运放，并且将差分放大器的两个输入电压记为 v_x，则可以写出下面的节点方程

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{out}}{R_2} = 0 \quad [20]$$

和

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \quad [21]$$

求解式[21]可得

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \quad [22]$$

将其代入式[20]得到用输入表示的 v_{out} 的表达式为

$$v_{out} = \frac{R_4}{R_3}\left(\frac{1+R_2/R_1}{1+R_4/R_3}\right)v_+ - \frac{R_2}{R_1}v_- \qquad [23]$$

从式[23]可以清楚地看出一般情况下允许两个输入端输入共模分量。但是在特殊情况下，当 $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$ 时，式[23]简化为 $K(v_+ - v_-) = Kv_d$，因此（假定理想运放）只有差模信号被放大，而增益为电阻的比值。因为这些电阻在仪表放大器的内部，因此使用者接触不到，实际器件（如 AD622）允许通过在两个管脚之间接上外部电阻 [图6.38(b)中为 R_G] 来将增益范围设置为1~1000。

总结和复习

- 在分析理想运放电路时必须应用两个基本规则：
  1. 两个输入端没有电流流入。
  2. 两个输入端之间不存在电压降。
- 分析运放电路的目的通常是要得到用输入变量来表示的输出电压。
- 在分析运放电路时，节点分析通常是最佳选择，并且较好的方法是从输入端开始分析，然后向输出端进行。
- 无法预先假定运放的输出电流，必须在输出电压独立确定后才能求出该电流。
- 反相运放电路的增益为

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1}v_{in}$$

- 同相运放电路的增益为

$$v_{out} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)v_{in}$$

- 运放的输出管脚和反相输入管脚之间几乎都会连接一个电阻，它可以为电路引入负反馈以提高稳定性。
- 理想运放模型基于以下近似：无限大的开环增益 A，无限大的输入电阻 R_i，零输出电阻 R_o。
- 在实际电路中，运放的输出电压范围受实际供电电源电压的限制。

深入阅读

可参阅以下两本讨论运放应用的书籍：

R. Mancini(ed.), *Op Amps Are For Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003。也可以在德州仪器网站（www.ti.com）上获得。

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3rd ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 1997。

齐纳二极管和其他类型二极管的特性可以在以下图书的第 1 章中找到：

W. H. Hayt, Jr.和G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995。

有关运算放大器的实现的最早报告之一：

J. R. Ragazzini, R. M. Randall 和 F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits", *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp.444-452。

在模拟器件公司网站（www.analog.com）上可以找到早期运放的应用手册：

George A. Philbrick Researches, Inc., *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else*. Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998。

习题

6.2 理想运放：生动简介

1. 运放电路如图 6.39 所示，计算 V_{out}。如果：(a) V_{in} = 3 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 100 Ω; (b) V_{in} = 2.5 V, R_1 = 1 MΩ, R_2 = 1 MΩ; (c) V_{in} = −1 V, R_1 = 3.3 kΩ, R_2 = 4.7 kΩ。
2. 运放电路如图 6.40 所示，计算 V_{out}。如果：(a) V_{in} = 1.5 V, R_3 = 10 Ω, R_1 = 10 Ω, R_2 = 47 Ω; (b) V_{in} = −9 V, R_3 = 1 kΩ, R_1 = 1 MΩ, R_2 = 1 MΩ; (c) V_{in} = 100 mV, R_3 = 330 Ω, R_1 = 1 kΩ, R_2 = 6.8 kΩ。

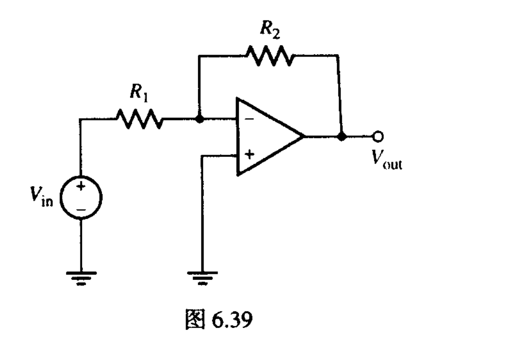


图 6.39

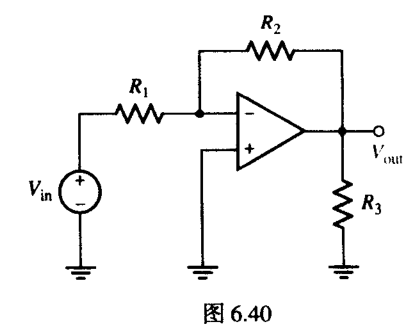


图 6.40

3. 运放电路如图 6.41 所示，当：(a) $v_{in} = 2\sin 5t$ V; (b) $v_{in} = 1 + 0.5\sin 5t$ V 时，画出输出电压 v_{out} 的波形。
4. 运放电路如图 6.42 所示，当：(a) $v_{in} = 10\cos 4t$ V; (b) $v_{in} = 15 + 4\cos 4t$ V 时，画出输出电压 v_{out} 的波形。

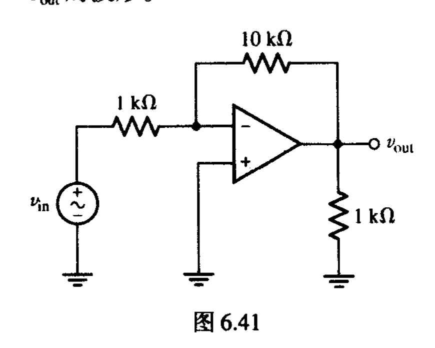


图 6.41

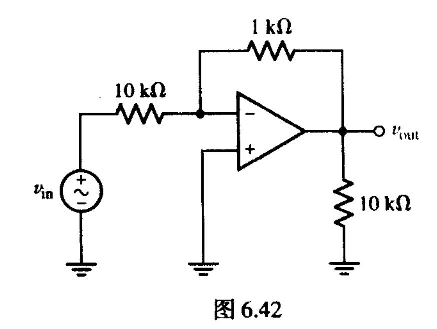


图 6.42

5. 设计一个电路，它可以向 47 kΩ 负载提供 −9 V 的电压，但只能使用 ±5 V 的电源。（在本题中，没有必要包含实际为运放供电的电源，它没有 ±5 V 的限制。）
6. 设计一个电路，它可以向 1 kΩ 负载提供 +20 V 的电压，但只能使用 ±5 V 的电源。（在本题中，没有必要包含实际为运放供电的电源，它没有 ±5 V 的限制。）

7. 设计一个电路，它可以向一个未指定大小的负载提供+1.5 V的电压，但只能使用单个+5 V的电源。（在本题中，没有必要包含实际为运放供电的电源。）

8. 设计一个电路，它可以向一个未指定大小的负载提供+3 V的电压，但只能使用单个+9 V的电源。（在本题中，没有必要包含实际为运放供电的电源。）

9. 运放电路如图6.43所示，如果：(a) V_{in} = 300 mV, R_2 = 10 Ω, R_1 = 47 Ω; (b) V_{in} = 1.5 V, R_1 = 1 MΩ, R_2 = 1 MΩ; (c) V_{in} = −1 V, R_1 = 4.7 kΩ, R_2 = 3.3 kΩ，计算 V_{out}。

10. 运放电路如图6.44所示，如果：(a) V_{in} = 200 mV, R_L = 10 kΩ, R_1 = 10 Ω, R_2 = 47 Ω; (b) V_{in} = −9 V, R_L = 1 kΩ, R_1 = 1 MΩ, R_2 = 1 MΩ; (c) V_{in} = 100 mV, R_L = 330 Ω, R_1 = 1 kΩ, R_2 = 6.8 kΩ。计算 V_{out}。

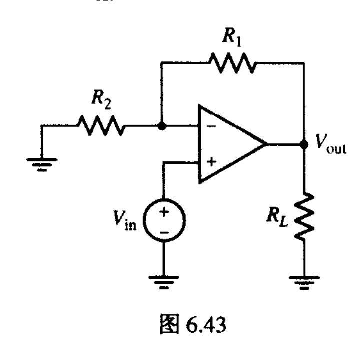


图 6.43

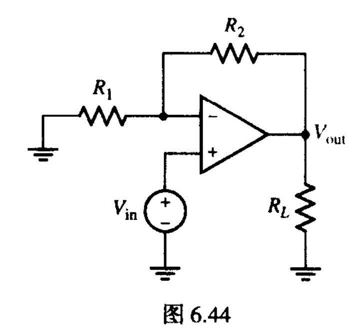


图 6.44

11. 在图6.45所示的运放电路中，已知 $R_1 = R_f$ = 1 kΩ。当：(a) v_{in} = 4 sin10t V; (b) v_{in} = 1 + 0.25 sin10t V时，画出输出电压 v_{out} 的波形。

12. 在图6.45所示的运放电路中，已知 R_1 = 2 kΩ, R_f = 1 kΩ。当：(a) v_{in} = 2 cos2t V; (b) v_{in} = 4 + cos2t V时，画出输出电压 v_{out} 的波形。

13. 对于图6.46所示的电路，计算电压 v_{out}。

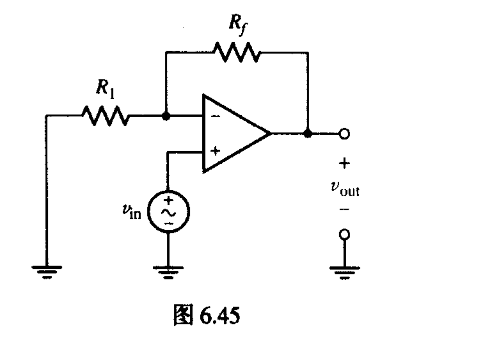


图 6.45

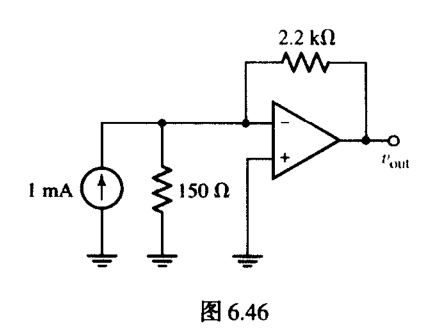


图 6.46

14. 电路如图6.47所示，如果要求传递给10 kΩ电阻的功率为150 mW，计算 R 的值？

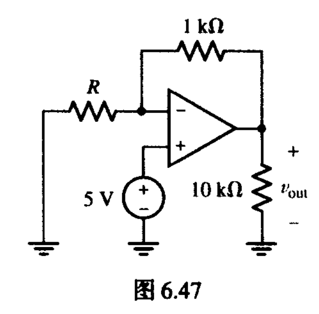


图 6.47

15. 当有人在 20 英尺远的地方拍手时，某麦克风能够输出 0.5 V 的电压。某一电子开关的戴维南等效电阻为 670 Ω，并且需要 100 mA 来驱动。设计一个电路，该电路将麦克风连接到电子开关，要求该开关能够由人通过拍手来启动。

16. 电路如图 6.48 所示，推导用 v_s 表示的 v_{out} 的表达式。

17. 电路如图 6.49 所示，计算电压 V_1。

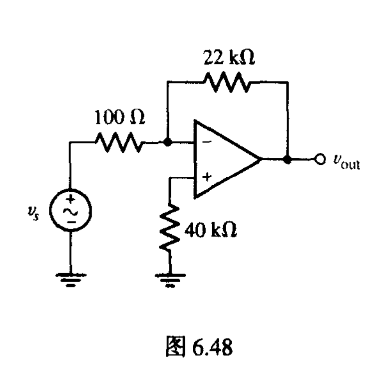


图 6.48

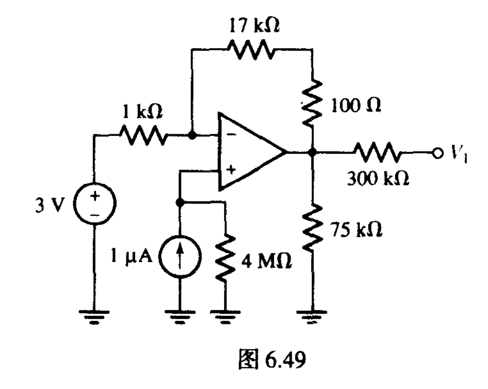


图 6.49

18. 对于图 6.50 所示的电路，计算电压 V_2。

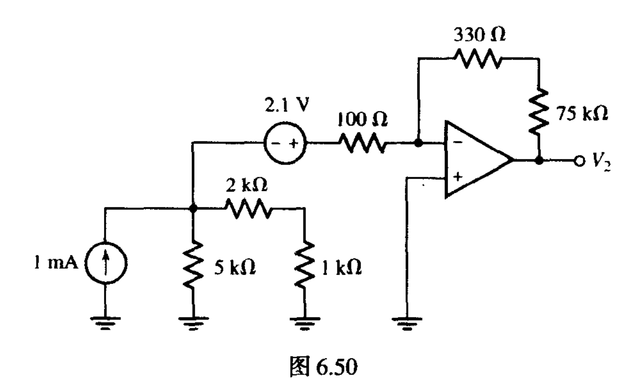


图 6.50

19. 求图 6.51 所示电路中 v_{out} 的表达式，并计算当 $t = 3$ s 时该电压的值。

20. 电路如图 6.52 所示，当 V_{in} 为多大时，输出电压为 18 V。

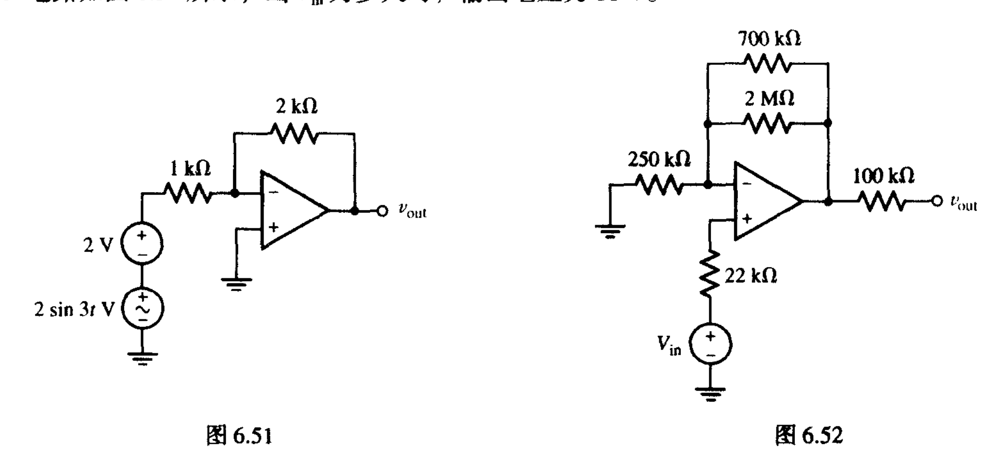


图 6.51

图 6.52

21. 电路如图 6.53 所示，选择 R_1 和 R_f 的值，使 $v_{out} = 23.7\cos500t$ V。

D

22. 推导图 6.54 所示电路中 v_{out} 的表达式，不使用电源变换。

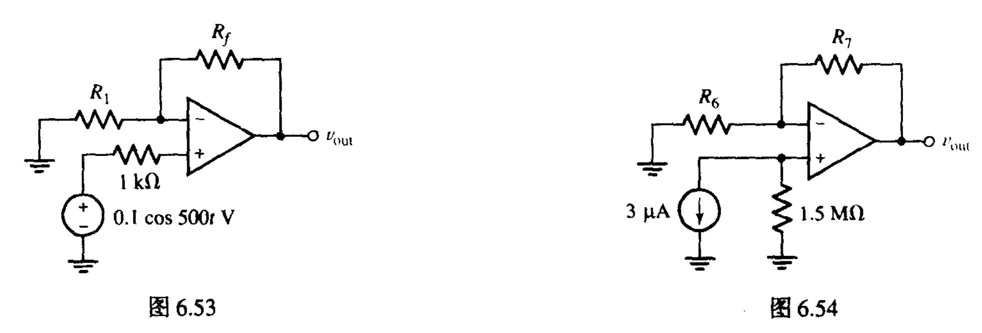


图 6.53　　　　图 6.54

23. 电路如图 6.55 所示：

(a) 如果 $V_A = 0$, $V_B = 1$ V, $R_A = R_B = 10$ kΩ, $R_1 = 70$ kΩ, $R_2 = \infty$, $v_{out} = 8$ V，那么哪个端子（A 或 B）是同相输入端？解释原因。

(b) $V_A = 10$ V, $V_B = 0$ V, 如果 B 是反相输入端，选择 R_A, R_B, R_1 和 R_2 使输出电压为 20 V。

(c) $V_A = V_B = 1$ V, $R_1 = 0$, $R_2 = \infty$，如果 V_{out} 为 1 V，那么哪个端子（A 或 B）是反相输入端？解释原因。

24. 运放电路如图 6.56 所示，计算 v_{out}。

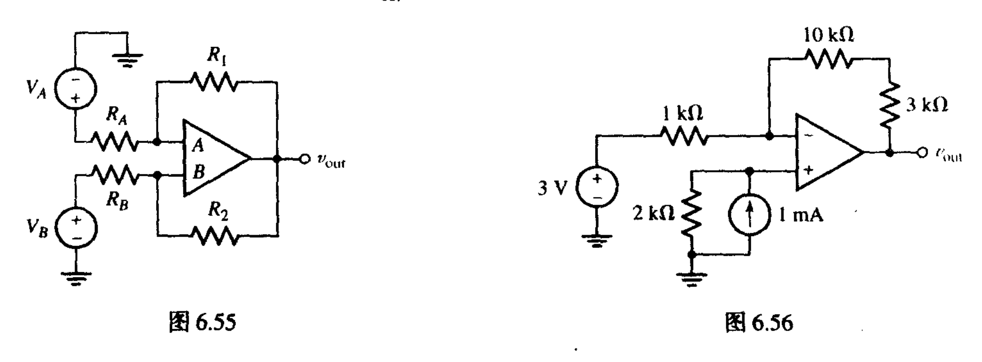


图 6.55　　　　图 6.56

25. 电路如图 6.57 所示，如果 $v_s = 5\sin3t$ mV，计算 $t = 0.25$ s 时的 v_{out}。

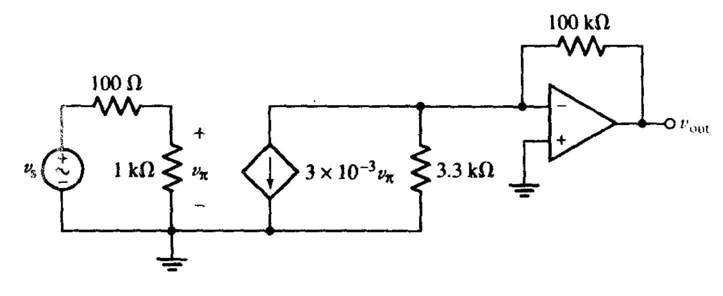
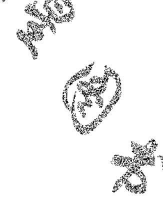


图 6.57

26. 利用合适的电路分析方法计算图 6.58 所示电路中的 v_{out}。



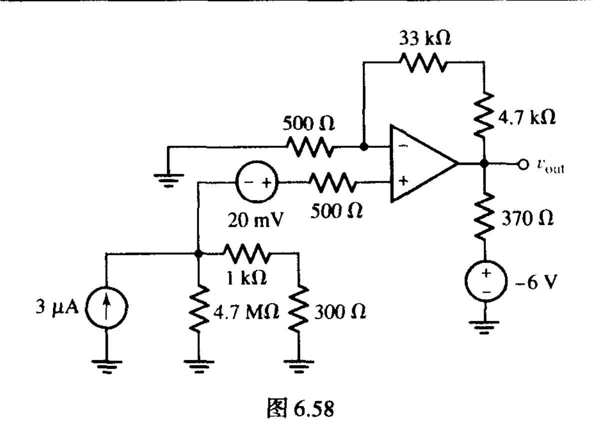


图 6.58

27. 电路如图 6.58 所示，用 27 μA 电源替代 3 μA 电源，计算 v_{out}。

28. 对于图 6.59 所示的多级运放电路，计算 v_x。

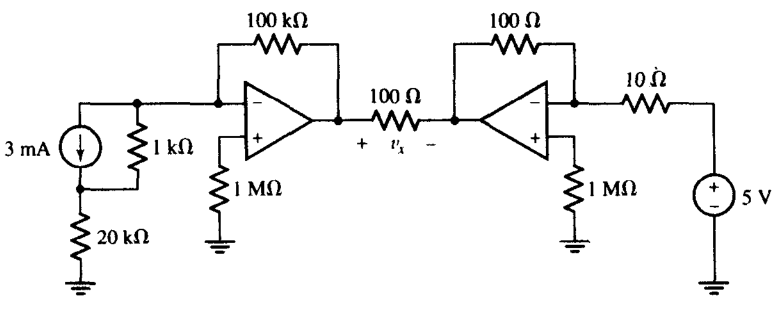


图 6.59

29. 推导一般加法放大器的表达式，其中每个电阻都可以取不同的值。

30. 推导一般减法放大器的表达式，其中每个电阻都可以取不同的值。

31. 镉硫化物（CdS）通常用来制造电阻，其值取决于表面的光照强度。在图 6.60 所示的电路中使用一个 CdS 光电池作为反馈电阻 R_f。在完全黑暗的情况下，其电阻为 100 kΩ，当光强度为 6 堪（cd）时，电阻为 10 kΩ。R_L 表示一个电路，当该电路两端施加 1.5 V 电压或更小的电压时，该电路工作。选择 R_1 和 V_s 的值，使 R_L 表示的电路在光照强度等于或大于 2 堪时工作。

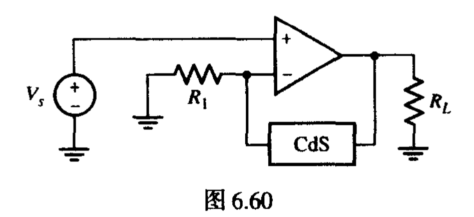


图 6.60

32. 在某个录音室中使用两个不同的麦克风，一个用于噪音，另一个用于仪器。设计一个电路可以使两个麦克风的输出合并，但要求噪音的放大是仪器的两倍。

33. 在 2 V 直流偏置上叠加一个正弦信号（换句话说，总信号的平均值为 2 V）。设计一个电路来去除直流偏置，并将正弦信号放大 100 倍（相位不翻转）。

6.3　级联

34. 设计一个电路，使其输出电压等于 3 个输入电压 v_1, v_2 和 v_3 的平均值。

35. 一个电子仓库库存系统使用放在每个托盘下的天平，每个天平的输出为“1 mV 对应 1 kg”。设计一个电路，要求该电路提供一个电压输出，该电压与未出售的相似物品（分布在4个托盘中）的总重量成正比，总重量中已经除去托盘的重量（该重量由一个参考电压提供）。最后的电路输出电压应该为 1 mV 对应 1 kg。

36. 某测量车辆速度的雷达枪输出与所跟踪物体的速度成比例的电压，并有 10 mV 对应 1 mph。如果警车的速度表也提供与其速度成比例的信号，即也是 10 mV 对应 1 mph，设计一个多级电路，要求：(a) 使其提供一个电压信号，该信号等于超速车辆与警车速度之间的差值（警车慢 1 mph 对应输出 +10 mV）；(b) 这 3 个量均用 kph 表示，且为每个量提供一个电压信号，并且有 10 mV 对应 1 kph。

37. 计算图 6.61 所示电路中的 v_{out}。

38. 电路如图 6.62 所示，推导用 V_1 和 V_2 表示的 V_{out} 的表达式。

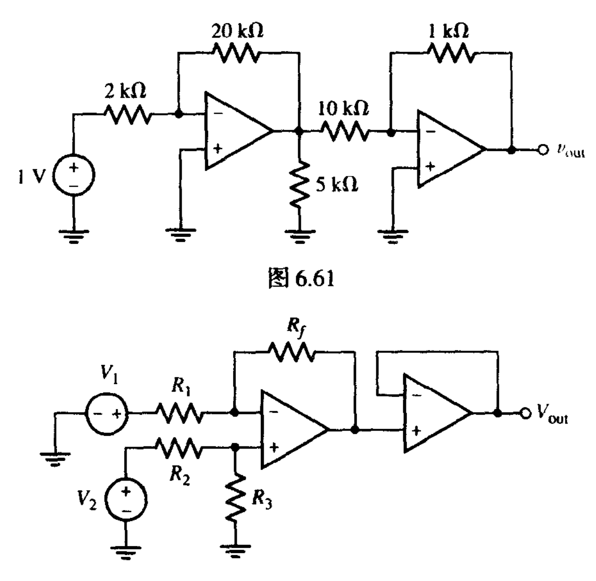


图 6.61

图 6.62

39. 级联运放电路如图 6.63 所示，计算每一级输出电压。

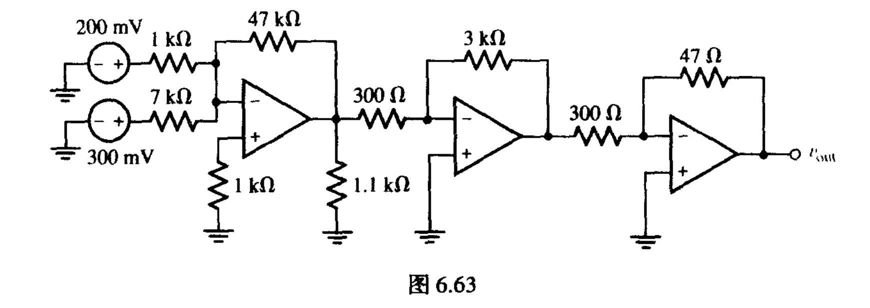


图 6.63

40. 参考图 6.64 所示的运放电路，为了使 $V_{out} = 10$ V，R 应取什么数值？

41. 两级运放电路如图 6.65 所示，计算 v_{out}。

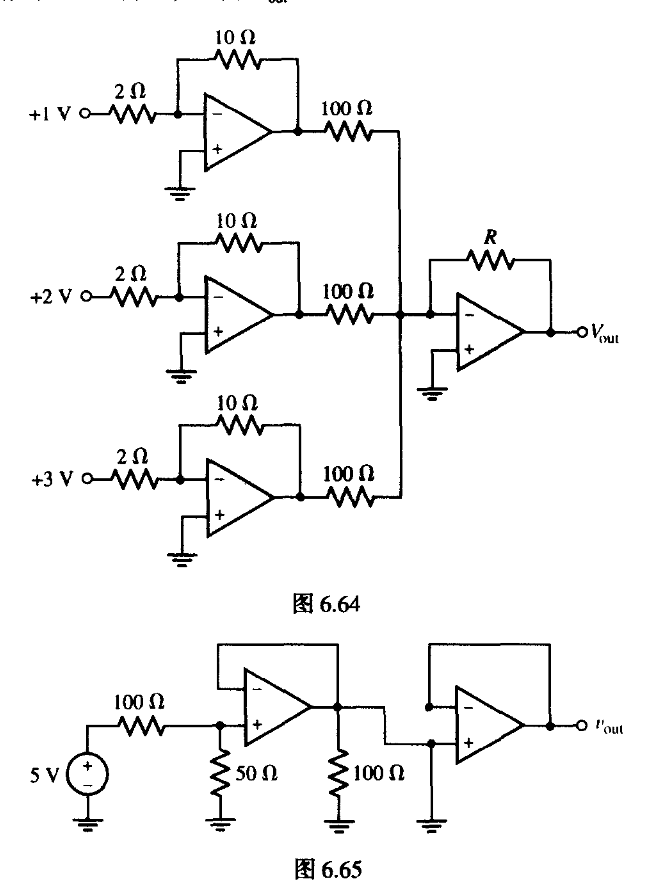


图 6.64

图 6.65

6.4 电压源和电流源电路

42. (a) 图 6.66 所示的电路使用 1N750 二极管，其齐纳电压为 4.7 V。求电压 V_1, V_2 和 V_3。(b) 利用合适的 PSpice 仿真工具验证结果。提交一份正确标注的原理图并对两种分析中存在差别的可能原因进行分析。

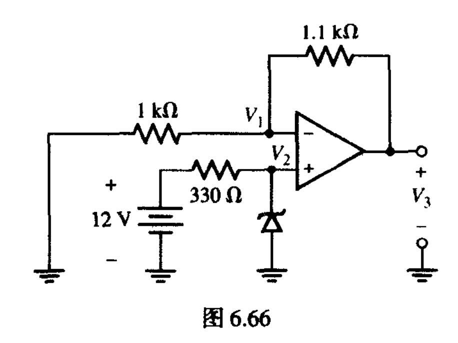


图 6.66

43. 设计一个电路，提供 +5.1 V 的参考电压作为一个电压跟随器输入时只能得到 9 V 电池。采用 1N4733 二极管时，该二极管在电流为 76 mA 时的齐纳电压为 5.1 V。

44. 设计一个电路，提供 −2.5 V 参考电压作为一个电压跟随器输入时只能得到 9 V 电池。采用 1N4740 二极管时，该二极管在电流为 25 mA 时的齐纳电压为 10 V。

45. 设计一个电路，提供 +12 V 参考电压作为一个电压跟随器输入时只能得到 9 V 电池。采用 1N4747 二极管时，该二极管在电流为 12.5 mA 时的齐纳电压为 20 V。

46. (a) 设计一个电路，提供−5 V参考电压作为电压跟随器输入时只能得到9 V电池。采用1N4728 二极管时，该二极管在电流为 76 mA 时的齐纳电压为 3.3 V。(b) 改变设计以提供 +2.2 V 的参考电压。

47. 设计一个能够向一个未知负载提供25 mA电流的电流源。采用1N4740齐纳二极管，该二极管在 25 mA 电流时有 10 V 的击穿电压。

48. 设计一个电流源电路，它能够向一个未知负载提供 12.5 mA 的电流。采用 1N4747 齐纳二极管，该二极管在电流为 12.5 mA 时有 20 V 的击穿电压。

49. 设计一个电流源电路，它能够向一个未知负载提供75 mA的电流。采用1N4747齐纳二极管，该二极管在电流为12.5 mA时有20 V的击穿电压。如果放大器采用±15 V的电源来供电，那么可能的负载范围是多少？

50. 使用μA741 的详细模型，求图 6.67 所示电路中传输给 8 Ω 电阻的功率，如果：(a) $v_a = v_b = 1$ nV；(b) $v_a = 0$, $v_b = 1$ nV；(c) $v_a = 2$ pV, $v_b = 1$ fV；(d) $v_a = 50$ μV, $v_b = -4$ μV。

51. 某反相运放电路由 AD549 器件构成。如果 $R_1 = 270$ kΩ, $R_f = 1$ MΩ，求输入偏置电流在以下情况时的值：(a) $V_S = 1$ mV；(b) $V_S = -7.5$ mV；(c) $V_S = 1$ V。

52. 电路如图 6.68 所示，计算 v_{out}。如果：(a) $A = 10^5$, $R_i = 100$ MΩ, $R_o = 0$；(b) $A = 10^6$, $R_i = 1$ TΩ, $R_o = 0$。

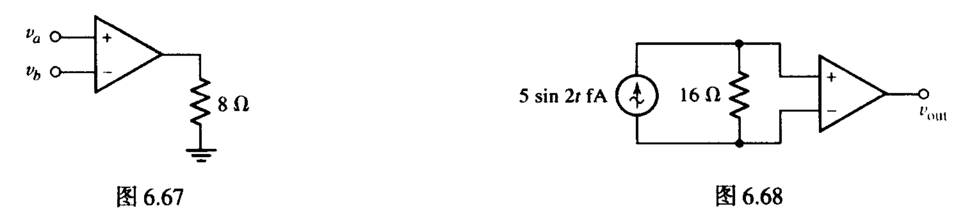


图 6.67　　图 6.68

53. 电路如图 6.69 所示：(a) 如果 $R_i = \infty$, $R_o = 0$, A 为有限，推导 v_{out}/v_{in} 的表达式；(b) 如果要求闭环增益与其理想值之差在 1% 之内，那么开环增益应该为多大？

54. 电路如图 6.70 所示，计算 8 Ω 电阻吸收的功率，如果 δ 为：(a) 0 V；(b) 1 n V；(c) 2.5 μV。

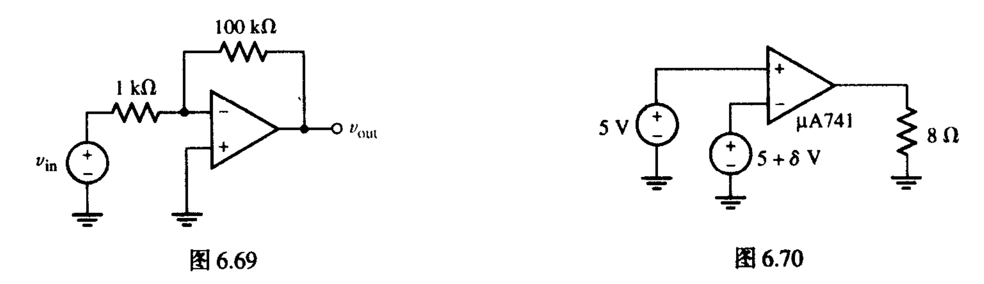


图 6.69　　图 6.70

55. 电路如图 6.71 所示，使用 AD549 的参数，计算当 $v_{in} = -16$ mV 时的 v_{out}。

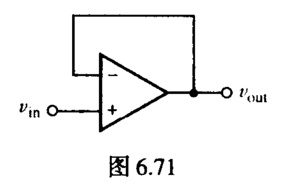


图 6.71

6.5 实际考虑

56. 当运放的开环增益和输入电阻有限且输出电阻非零时，推导用输入电压 v_{in} 表示的电压跟随器的输出电压的表达式。验证当运放为理想运放时，该表达式是否可以化简为 $v_{out} = v_{in}$。
57. (a) 构建一个详细的运放模型，它包含对输出电压产生贡献的共模增益 A_{CM}。(b) 假设该模型有：$A = 10^5, R_i = \infty, R_o = 0, A_{CM} = 10$，分析图 6.25 所示电路，已知 $v_1 = 5 + 2\sin t$ V, $v_2 = 5$。(c) 将得到的结果与 $A_{CM} = 0$ 时得到的结果进行比较。
58. 定义摆率，并解释它对一个运放电路的输出波形的影响。
59. 图 6.72 所示电路使用 1N750 二极管，其齐纳电压为 4.7 V。(a) 求电压 V_1, V_2 和 V_3。(b) 用 PSpice 仿真验证结果，仿真时采用 μA741 运放，±18 V 电源。提交一份正确标注以及有仿真结果的电路图。如果仿真结果与手工计算结果不完全吻合，确定产生这种差别的原因。(c) 在该齐纳电路停止执行其功能之前，12 V 电源的值最小可以取多少？

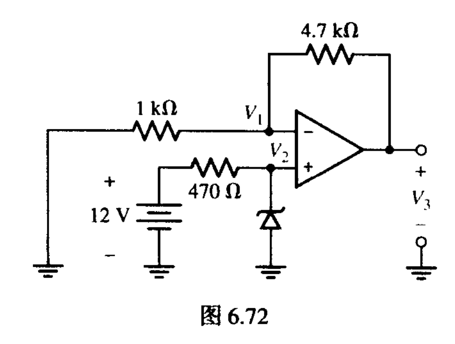


图 6.72

60. 利用 μA741 运放，±15 V 电源，并取 $R_1 = 10$ kΩ，$R_f = 1$ MΩ，对反相运放电路进行 PSpice 仿真。画出输入-输出特性，并标出线性区域以及正负饱和区域。仿真得到的增益与利用理想运放模型得到的增益是否一致？
61. 如果已知某应用只要求反相运放配置，而不关心输出电压是否整齐，那么封装这个运放所需的最小管脚数是多少？列出每个管脚的名称。
62. 利用 PSpice 对图 6.73 所示的电路进行仿真，运放分别采用(a) μA741 运放、(b) LM324 及(c) LF411 时，如果用±15 V 电源供电，求每个运放饱和时所需的差分输入电压 V_S。(d) 将这些结果与根据表 6.3 中的信息得到的结果进行比较。
63. 利用 μA741 运放，±15 V 电源，并取 $R_1 = 4.7$ kΩ, $R_f = 1$ MΩ，对同相运放电路进行 PSpice 仿真。画出输入-输出特性，并标出线性区域以及正负饱和区域。仿真得到的增益与利用理想运放模型得到的增益是否一致？
64. 利用 PSpice 和图 6.74 所示的电路计算 μA741 和 LF411 的输出电阻。改变电源电压，说明其是否对结果产生影响。该仿真结果是否与表 6.3 中的值一致？



图6.73　　图6.74

65. 利用LF411对图6.75所示的电路进行仿真。求输入偏置电流和差分输入电压。将这个结果与利用详细模型得到的结果以及表6.3中列出的结果进行比较。

66. 某传感器输出信号的电压范围为-30 mV到+75 mV。(a)如果一个反相运算放大器的电压增益 $|v_{out}/v_{in}| = 1000$，用±15 V直流电源供电，那么输出电压范围是多少？(b)如果一个同相运算放大器采用±15 V直流电源供电，在运放不能饱和的情况下，最大可能的电阻比 R_f/R_1 是多少？

67. (a) 用μA741在 $-10\ V \leq V_{in} \leq +10\ V$ 的范围内对图6.76所示电路进行仿真，使用指针工具确定运放开始饱和时电压的精确值；将该结果与由表6.3中得出的结果进行比较。

(b) 在连续的短路情况下，一个实际μA741运放能够提供35 mA的电流。确定PSpice中使用模型所允许的最大可能的短路电流。

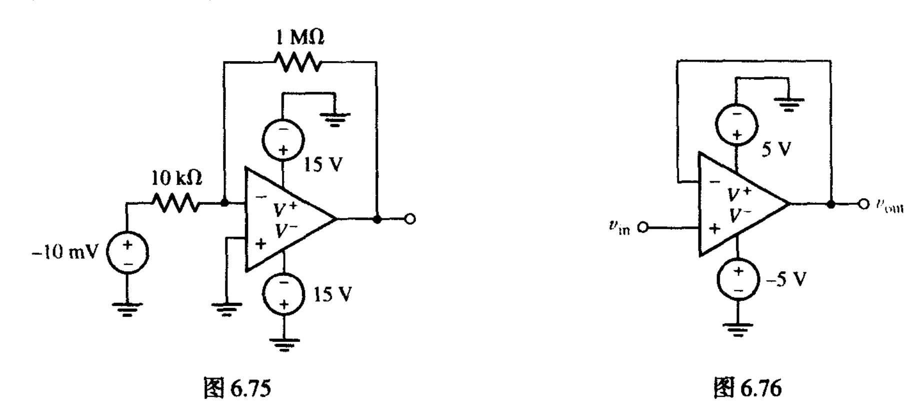


图6.75　　图6.76

68. 为提高传输的安全性，在广播之前，把一个混沌的时变信号叠加到语音信号上，并且在另一个频率上单独发送同样的混沌时变信号。假设接收天线可看成是一个300 Ω电阻和一个时变电压源的串联，设计一个电路来分离这两个信号，并消去混沌信号，然后把语音信号放大10倍，并传递给一个8 Ω的扬声器。

69. 设计一个运放电路，其输出电压为3个输入电压的平均值。假定输入电压的范围限制在 $-10\ V \leq V_{in} \leq +10\ V$，用PSpice和一组合适的输入电压验证设计结果。

6.6 比较器和仪表放大器

70. 对于图6.77所示的电路，画出在 $-5\ V \leq v_{active} \leq +5\ V$ 范围内输出电压 v_{out} 随 v_{active} 变化的曲线，假设 v_{ref} 为：(a) -3 V；(b) +3 V。

71. 电路如图6.78所示，画出在$-2\ \text{V} \leqslant v_{\text{active}} \leqslant +2\ \text{V}$范围内输出电压$v_{\text{out}}$随$v_{\text{active}}$变化的曲线，利用μA741验证结果。（虽然与用于比较器的运放相比显得较慢，但是其PSpice模型工作得很好，并且因为这是直流应用，所以速度不是问题。）提交一份正确标注并具有结果的电路图。

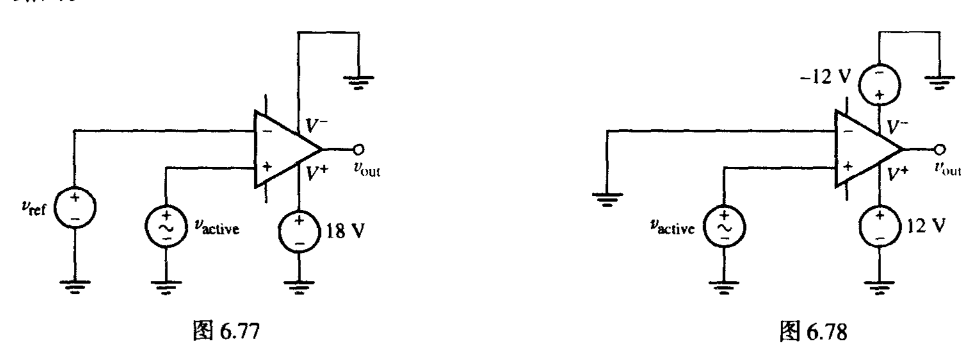


图6.77 图6.78

72. 电路如图6.79所示：(a) 如果$v_2 = +2\ \text{V}$，画出在$-5\ \text{V} \leqslant v_1 \leqslant +5\ \text{V}$范围内输出电压$v_{\text{out}}$随$v_1$变化的曲线；(b) 如果$v_1 = +2\ \text{V}$，画出在$-5\ \text{V} \leqslant v_2 \leqslant +5\ \text{V}$范围内输出电压$v_{\text{out}}$随$v_2$变化的曲线。

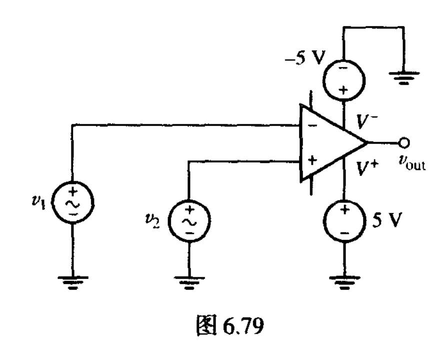


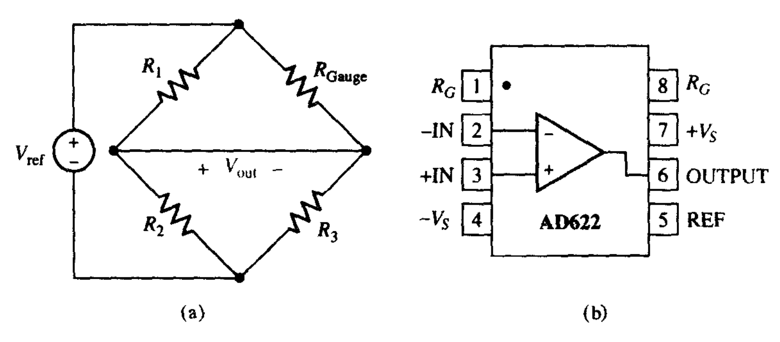
图6.79

73. 在数字逻辑应用中，+5 V信号表示逻辑1，而0 V信号表示逻辑0。为了利用数字计算机处理现实世界中的信息，需要某些类型的接口，包括模数转换器（A/D），该器件将模拟信号转变成数字信号。设计一个电路，使它相当于一位A/D，并且任何小于1.5 V的信号都产生逻辑0，而任何大于1.5 V的信号都产生逻辑1。

74. 仪表放大器如图6.38(a)所示，假定3个内部的运放都是理想运放，求该电路的CMRR，假设：(a) $R_1 = R_3, R_2 = R_4$；(b) 所有4个电阻值都不同。

75. 仪表放大器的常见应用是测量电阻应变仪电路的电压。传感器通过几何变形产生变化的电阻值来工作，如同第2章式[6]所示。它们通常是桥式电路的一部分，如图6.80(a)所示，其中应变仪的电阻为R_G。(a) 证明$V_{\text{out}} = V_{\text{in}}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_{\text{Gauge}}}\right]$。(b) 验证当3个固定电阻$R_1$, R_2和R_3都等于R_{Gauge}时，$V_{\text{out}} = 0$。(c) 对于某个应用，应变电阻未发生几何变形时的电阻值为5 kΩ，最大变形时电阻会增加50 mΩ，可以使用的电源只有±12 V。利用图6.80(b)所示的仪表放大器设计一个电路，使得当应变仪具有最大负载时，该电路会产生+1 V的电压信号。

AD622规格：在管脚1和8之间接上一个值为 $R = \frac{50.5}{G-1}$ kΩ的电阻，放大器增益G可以从2变到1000。



(a) (b)

图6.80

第7章　电容和电感

主要概念

- 理想电容的电压-电流关系
- 理想电感的电压-电流关系
- 计算电容和电感中储存的能量
- 电容和电感对时变信号的响应分析
- 电容的串联和并联组合
- 电感的串联和并联组合
- 使用电容的运放电路
- 储能元件的 PSpice 模型

引言

本章将介绍两种新的无源电路元件——电容和电感，这两种元件都能够储存和提供有限的能量，但是它们与理想电源不同，因为它们不能够在无限时间区间内持续地提供能量。虽然它们被归类于线性元件，但是这两个新元件的电流-电压关系却与时间有关，因此引申出许多有趣的电路。我们将要讲到，电容和电感值的范围可以很大，因此有时会主导电路性能，有时其影响又会非常小。在现代应用中这个特性继续存在，特别是随着计算机和通信系统的工作频率越来越高以及集成的元件数量越来越多，该特性更不可忽视。

7.1　电容

理想电容模型

前面我们把独立电压源和电流源、受控电压源和电流源称为有源元件，而把线性电阻称为无源元件。但是有源和无源的定义仍然有些模糊，需要进一步明确。现在将有源元件定义为能够在无限时间内向外部电路提供大于零的平均功率的元件。理想电源是有源元件，运放也是有源元件。无源元件定义为不能在无限时间内提供大于零的平均功率的元件。电阻就属于这一类，其接收到的能量都被转换成热量，并且永远不能提供能量。

现在介绍一种新的无源电路元件——电容。我们通过电压-电流关系来定义电容 C：

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad [1]$$

其中，v 和 i 满足无源元件的符号规则，如图7.1所示。应该牢记：v 和 i 是时间的函数，如果需要，可以写成 $v(t)$ 和 $i(t)$。从式[1]可以得到电容的单位为安培·秒/伏特（A·s/V）或库仑/伏特（C/V）。现在定义法[①]（F）为1库仑/伏特（C/V），并将其作为电容的单位。

① 以 Michael Faraday 命名。

$$\xrightarrow{i} \quad C \quad + \; v \; -$$

图 7.1　电容的电气符号以及电流 - 电压符号规则

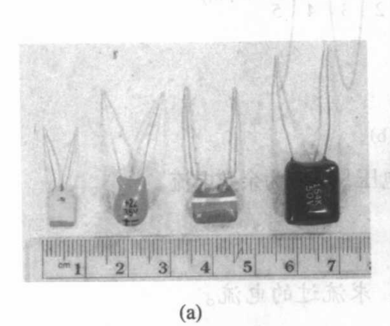
由式[1]定义的理想电容只是实际器件的数学模型。电容由两个能够储存能量的导电平板组成，两个平板之间由电阻非常大的绝缘薄层隔开。如果这个电阻足够大以至于可以视为无限值，那么电容极板上的等量正负电荷永远不会中和，至少不会通过该元件内的任何路径进行中和。如图 7.1 所示的电路符号能够说明实际电容元件的结构。

假设将一个外部器件连接到电容上，那么将产生一个正的电流，它从电容的一个极板流出，然后流入另一个极板。在元件的两端，流入和流出的电流大小相同，这对任何电路元件都成立。现在来考察电容内部的情况。进入一个极板的正电流表示正电荷正在通过引线流向该极板，这些电荷不能穿过电容内部，因此将聚集在极板上。事实上，电流与该电荷之间具有如下关系：

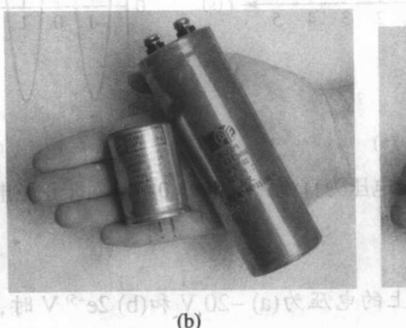
$$i = \frac{dq}{dt}$$

现在将该极板看成一个大的节点，然后应用基尔霍夫电流定理。显然该定理不成立，因为电流从外部电路流入极板，但是并没有电流从极板流出。在一个多世纪以前，苏格兰人麦克斯韦（James Clerk Maxwell）就发现了这个矛盾，后来，他发展了一套统一的电磁理论来解释这个矛盾。他假设当电场或电压随时间变化时均产生"位移电流"。在电容两个极板内部流动的位移电流正好与从电容引线流入的传导电流相等。因此，如果同时考虑传导电流和位移电流，则会满足基尔霍夫电流定律。但是电路分析并不关心内部位移电流，并且既然它恰好与传导电流相等，那么可以将麦克斯韦的假设作为联系传导电流与电容两端变化的电压的纽带。

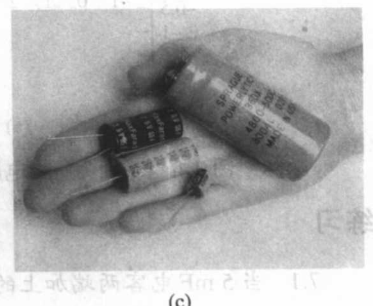
由两个相距为 d、面积为 A 的平行导电极板组成的电容器的电容大小为 $C = \varepsilon A/d$，其中，ε 是两个极板间的绝缘体的介电常数，并且假定导电极板的尺寸要比 d 大得多。对于空气或真空，$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854$ pF/m。大多数电容都采用比空气介电常数大得多的薄电介质层来减小器件的尺寸。图 7.2 给出了几种不同类型的商用电容的实例，但是应该记住：任何两个不直接接触的导电平面都存在一个非零电容（尽管可能很小）。还需要注意的是：几百微法（μF）的电容属于大电容。



(a)



(b)



(c)

图 7.2　几种商用电容：(a) 从左到右：270 pF 陶瓷电容，20 μF 钽电容，15 nF 聚酯电容，150 nF 聚酯电容；(b) 左：2000 μF, 40 V 电解电容，25 000 μF, 35 V 电解电容；(c) 从最小的那个开始沿顺时针方向：100 μF 63 V 电解电容；2200 μF 50 V 电解电容；55F 2.5 V 电解电容；4800 μF 50 V 电解电容。我们注意到大容量电容通常要求具有比较大的封装，但是上面有一个例外，知道这是基于什么样的折中考虑吗

从式[1]的定义方程可以发现该数学模型的几个重要特性。在电容两端加上恒定电压将产生大小为零的电流，因此对直流而言电容呈现开路特性。这个现象可以通过电容符号形象地表示。另外，电压的突变需要无穷大的电流。因为这在实际中是不可能的，因此需要防止电容两端的电压在零时间间隔内的变化。

例题 7.1 对于图 7.1 所示的电容，如果 $C = 2\text{ F}$，两个电压波形如图 7.3 所示，求流过该电容的电流 i。

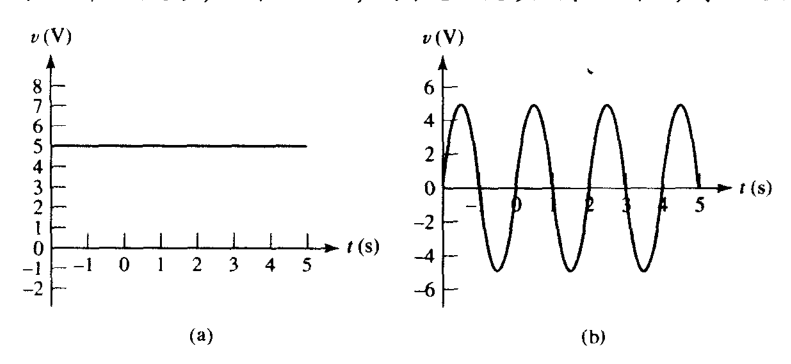


图 7.3 (a) 加在电容两端的直流电压；(b) 加在电容两端的正弦电压

解： 电流 i 与电容两端的电压 v 之间的关系为

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

对于图 7.3(a)所示的电压，因为 $dv/dt = 0$，因此 $i = 0$，结果如图 7.4(a)所示。对于图 7.3(b)所示的正弦波，预计得到的电流为具有相同频率和两倍幅度大小（因为 $C = 2\text{ F}$）的余弦电流。结果如图 7.4(b)所示。

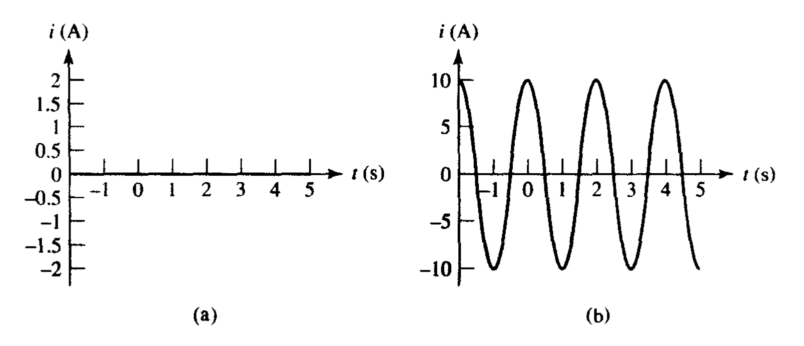


图 7.4 (a) 因为所加电压为直流，因此 $i = 0$；(b) 对于正弦电压，响应为余弦电流

练习

7.1 当 5 mF 电容两端加上的电压为(a) −20 V 和(b) $2e^{-5t}$ V 时，求流过的电流。

答案： (a) 0 A; (b) $-50e^{-5t}$ mA。

电压－电流积分关系

通过对式[1]积分，可以将电容电压用电流来表示。首先得到

$$dv = \frac{1}{C}i(t)\,dt$$

然后对时间从 t_0 到 t 进行积分[①]，得到相应的 $v(t_0)$到 $v(t)$ 的电压为

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0) \qquad [2]$$

式[2]也可以写成不定积分加上积分常数的形式：

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt + k$$

最后，在许多实际问题中会发现电容两端的初始电压 $v(t_0)$难以确定，在这种情况下，为方便起见，假定 $t_0 = -\infty$ 和 $v(-\infty) = 0$，因此可得

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt'$$

因为电流在任意时间区间内的积分等于在这个时间区间内电流流入的那个极板上所积累的电荷，因此也可以将电容定义为

$$q(t) = Cv(t)$$

其中，$q(t)$和 $v(t)$分别表示任何一个极板上的电荷值以及两个极板之间的电压。

例题 7.2　当电流如图 7.5(a)所示时，求相应的电容电压。

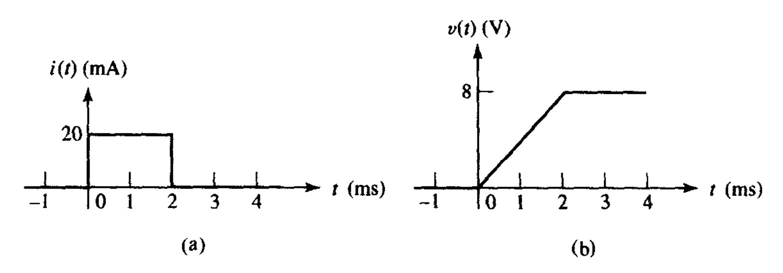


图 7.5　(a) 加到 5 μF 电容上的电流；(b) 通过电流波形积分所得到的电压波形

解： 如果从图形上来说明式[2]，可以知道电压在 t 和 t_0 时刻的差与电流曲线在此时间区间内的面积成正比，比例常数为 $1/C$。可以通过查看图 7.5(a)得到需要的 t 和 t_0 而求出该区域的面积。取 t_0 在零时刻之前，为简单起见，选取 t 的第一个区间为 $-\infty \sim 0$，从输入波形可以看出，在起始时刻（$t = 0$）之前没有任何输入加入到电容上，所以，

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

参考式[2]，显然电流在 $t_0 = -\infty$ 和 0 之间的积分为零，因为在该区间内 $i = 0$，从而可得

$$v(t) = 0 + v(-\infty) \qquad -\infty \leqslant t \leqslant 0$$

或

$$v(t) = 0 \qquad t \leqslant 0$$

如果现在考虑矩形脉冲表示的时间区间，可得

$$v(t) = \frac{1}{5\times 10^{-6}}\int_{0}^{t} 20\times 10^{-3}\,dt' + v(0)$$

① 注意，当积分变量 t 也是积分限的情况下，采用另一个变量 t' 来表示积分变量不会改变结果。

因为 $v(0)=0$，因此

$$v(t)=4000t \quad 0\text{ ms}\leqslant t\leqslant 2\text{ ms}$$

因为在该脉冲之后的半无限区间内积分也为零，所以，

$$v(t)=8 \qquad t\geqslant 2\text{ ms}$$

该结果可以用图形更简单地表示出来，如图 7.5(b)所示。

练习

7.2 如果 100 pF 电容两端的电压随时间变化的关系如图 7.6 所示，求流过该电容的电流。

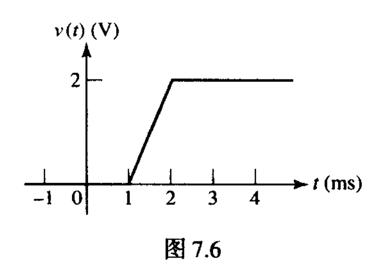


图 7.6

答案：0 A，$-\infty\leqslant t\leqslant 1$ ms；200 nA，1 ms $\leqslant t\leqslant$ 2 ms；0 A，$t\geqslant 2$ ms。

能量储存

传递给电容的功率为

$$p=vi=Cv\frac{dv}{dt}$$

因此储存在电容的电场中的能量变为

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt'=C\int_{t_0}^{t} v\frac{dv}{dt'}\,dt'=C\int_{v(t_0)}^{v(t)} v'\,dv'=\frac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2-[v(t_0)]^2\right\}$$

而且

$$w_C(t)-w_C(t_0)=\tfrac{1}{2}C\left\{[v(t)]^2-[v(t_0)]^2\right\} \qquad [3]$$

其中，储存的能量为 $w_C(t_0)$，单位为焦尔（J），t_0 时刻的电压为 $v(t_0)$。如果在 t_0 时刻电容储存能量为零，那么此时的电容电压也为零，因此，

$$w_C(t)=\tfrac{1}{2}Cv^2 \qquad [4]$$

下面考虑一个简单的数值例子。如图 7.7 所示，一个正弦电压源与一个 1 MΩ 电阻和一个 20 μF 电容并联。并联电阻可以看成是实际电容的两个极板之间的电介质所具有的电阻（理想电容具有无穷大的电阻）。

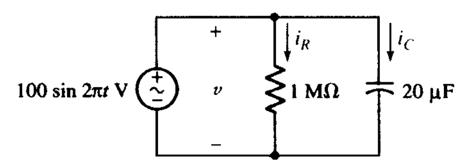


图 7.7 一个并联 *RC* 网络加上一个正弦电压源。1 MΩ 电阻可以表示实际电容电介质层的有限电阻

例题 7.3 求在 $0\ \mathrm{s}<t<0.5\ \mathrm{s}$ 时间区间内图 7.7 所示电容储存的最大能量以及电阻消耗的能量。

解： ▶ **明确题目的要求**

由于储存在电容中的能量随时间变化，因此需要求解在指定时间间隔内能量的最大值。还需要求解在这个区间内电阻消耗的总能量。实际上这是两个完全不同的问题。

▶ **收集已知信息**

电路中唯一的能量源是独立电压源，它的值为 $100\sin 2\pi t$ V。我们只对 $0\ \mathrm{s}<t<0.5\ \mathrm{s}$ 的时间间隔感兴趣。电路已经正确标注。

▶ **设计方案**

通过计算电压来求电容中的能量。为了求出该区间内电阻消耗的能量，需要对消耗的功率 $p_R = i_R^2 \cdot R$ 进行积分。

▶ **建立一组合适的方程**

储存在电容中的能量为

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2 = 0.1\sin^2 2\pi t \qquad \mathrm{J}$$

利用电流 i_R 表示电阻消耗的功率，其电流表达式为

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4}\sin 2\pi t \qquad \mathrm{A}$$

因此，

$$p_R = i_R^2 R = (10^{-4})(10^6)\sin^2 2\pi t$$

在 0 s 到 0.5 s 之间电阻消耗的能量为

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R\, dt = \int_0^{0.5} 10^{-2}\sin^2 2\pi t\, dt \qquad \mathrm{J}$$

▶ **确定是否还需要其他信息**

我们已经得到储存在电容中的能量表达式，其曲线如图 7.8 所示。电阻消耗的能量表达式中不包含任何未知量，因此可以计算结果。

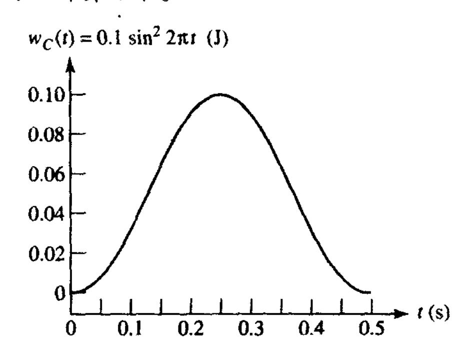


图 7.8 储存在电容中的能量随时间变化的曲线

▶ **尝试求解**

从储存在电容中的能量表达式曲线可以看出，它从 $t=0$ 时刻的零增大到 $t=\frac{1}{4}$ s 时刻的最大值 100 mJ，然后在另一个 $\frac{1}{4}$ s 后降到零。因此，$w_{C_{\max}} = 100$ mJ。计算电阻消耗能量的积分表达式，可得 $w_R = 2.5$ mJ。

▶ 验证结果是否合理或是否与预计结果一致

储存的能量不可能是负值，这在曲线中已经得到证实。此外，因为 sin $2\pi t$ 的最大值为 1，因此预计的最大能量为$(1/2)(20 \times 10^{-6})(100)^2 = 100$ mJ。

在 0~500 ms 时间段内电阻消耗 2.5 mJ 的能量，但是在此期间内的某个时刻电容储存了 100 mJ 的最大能量，那么其他 97.5 mJ 的能量到哪里去了？为了回答这个问题，下面计算电容电流：

$$i_C = 20 \times 10^{-6}\frac{dv}{dt} = 0.004\pi\cos 2\pi t$$

i_s 定义为流进电压源的电流：

$$i_s = -i_C - i_R$$

图 7.9 中画出了这两个电流。可以看到流过电阻的电流是电源电流的一小部分，这不难理解，因为 1 MΩ 是一个相当大的电阻值。当电流从电源流出时，一小部分传递给电阻，剩余的流入电容。在 $t = 250$ ms 以后，电源电流改变符号，此时电流从电容流回电源。储存在电容中的大部分能量被返回到理想电压源，一小部分消耗在电阻中。

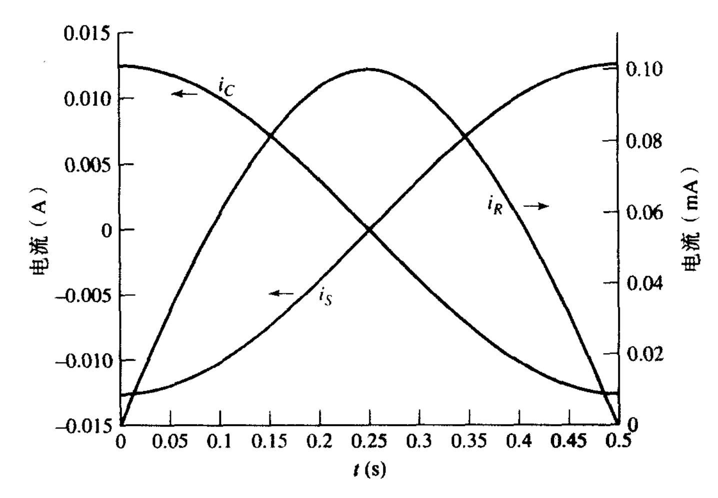


图 7.9 在 0~500 ms 时间段内流过电阻、电容和电源的电流曲线

练习

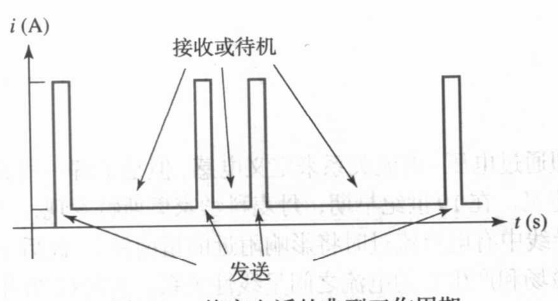
7.3 如果 1000 μF 电容两端的电压为 $1.5\cos 10^5 t$ V，计算电容在 $t = 50$ μs 时储存的能量。

答案：90.52 μJ。

实际应用——超级电容

数字蜂窝电话和卫星电话具有 3 个基本工作模式：待机、接收和发送模式。典型的信号接收和待机都不需要从电池获取大电流，但是发送却需要较大的电流（见图 7.10）。然而，发送所花的时间只是器件工作总时间的一小部分。

就像第 5 章所述，电池只在小电流时保持固定电压。因此当电流增大时，电池电压将减小（见图 7.11）。这会产生一个问题，因为大多数电路存在一个最小电压，该电压称为截止电压，低于截止电压的电路将不能正常工作。



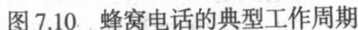


图7.10　蜂窝电话的典型工作周期

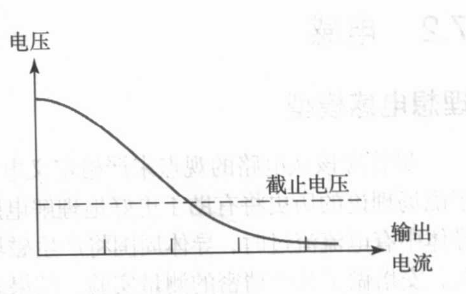


图7.11　电池电压－电流关系的例子

如果电路的峰值电流使得电池电压低于截止电压，则需要更大的电池。然而，在便携式应用中这通常不能满足要求，因为这种应用需要小而轻的电池。另一种办法是使用一种混合器件，这种器件由一个标准电池和一个经过特别设计的电容（有时称为电化学电容或超级电容）组成。图7.12所示是这种器件的一个例子。

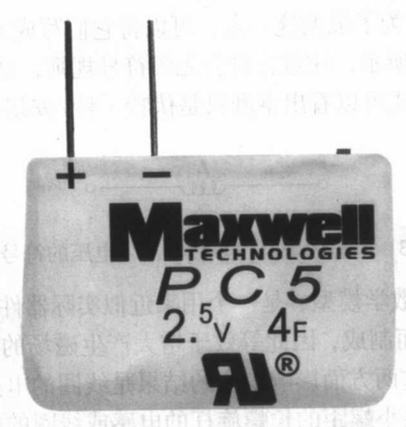


图7.12　一个商用的超电容

这种混合器件的工作原理如下：当电池处于维持电路工作所需要的电流时（例如电话处于接收模式），电容从电池那里储存能量（$\frac{1}{2}CV^2$）。如果需要的电流突然增大（例如电话正在发送），电池电压将会减小。此时，由于dv/dt发生变化，那么将产生额外的电流且该电流从已充电的电容中流出。只要电路的戴维南等效电阻远小于电池的内阻，那么电流将流过电话电路而不是电池。因为电荷离开电容的速度非常快，所以电流“增加”的时间很短。不过，如果发送操作的时间也很短，则该电容将有效地辅助电池，从而防止了电路的截止。第8章将介绍如何估算电容辅助时间的大小，但需要知道电池和电路的戴维南等效电阻。

理想电容的重要特性

1. 如果电容两端的电压不随时间变化，那么流过电容的电流为零，因此电容对于直流而言相当于开路。
2. 即使流过电容的电流为零，电容中也可储存有限的能量，比如电容两端的电压是常数。
3. 不可能在零时间间隔内改变电容两端的电压，因为这要求流过电容的电流为无限大。电容对于电压突变的抵抗类似于弹簧对于位移突变的抵抗。
4. 电容永远不会消耗能量，只会储存能量。从数学模型上来说这是正确的，但是对于实际电容来说并不正确，因为电介质和封装都会使电容具有一定的内阻。

7.2 电感

理想电感模型

尽管应该从电路的观点来严格定义电感，即通过电压-电流关系来定义电感，但是了解一些关于磁场理论的历史将有助于更好地理解电感的定义。在19世纪早期，丹麦科学家奥斯特发现，当导体中有电流流过时，导体周围将产生磁场（导线中有电流流过时将影响附近的指南针）。此后不久，安培做了几个精密的测量实验，结果表明磁场和产生它的电流之间呈线性关系。大约在20年后，英国实验物理学家法拉第和美国发明家亨利几乎同时发现①：变化的磁场可以使附近的电路产生电压。他们证明了这个电压与产生磁场的电流随时间的变化率成正比，比例系数即为现在所说的电感且用符号 L 表示，因而，

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad [5]$$

其中，v 和 i 都是时间的函数。为了强调这一点，可以将它们写成 $v(t)$ 和 $i(t)$。

电感的电路符号如图7.13所示，注意它符合无源符号规则，这一点与电阻和电容相同。电感的单位是亨利（H），由定义公式可以看出亨利只是伏特·秒/安培（V·s/A）的简洁表示。

i_L L + v_L −

图7.13 电感的电气符号和电流-电压的符号规则

由式[5]定义的电感是一个数学模型，是一个用来近似实际器件的理想元件。实际电感可以通过将一定长度的导线绕成线圈而制成，因此等效于增大产生磁场的电流，同时也增大了附近感应出法拉第电压电路的“数目”。这两方面影响产生的结果是线圈的电感大致与电感匝数的平方成正比。例如，一个外形类似于有很小螺距的长螺旋杆的电感或线圈的电感值为 $\mu N^2A/s$，其中 A 为横截面积，s 为螺旋杆轴向长度，N 为线圈匝数，μ 为与螺旋杆内部材料有关的常量，称为磁导率，在真空中（和空气中非常接近），$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $= 4\pi$ nH/cm。图7.14所示的是几种常见的电感。

现在通过考察式[5]来获得该数学模型的一些电气特性。该式表明电感两端的电压与流过电感的电流的变化率成正比。特别是当电感流过固定不变的电流时，不管电流的大小是多少，电感两端的电压都为零。因此，电感对于直流呈现短路特性。

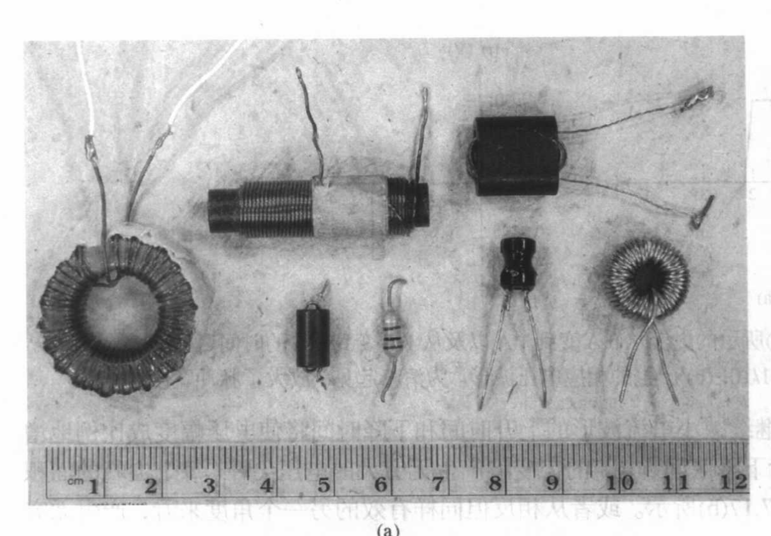
从式[5]可以得出的另一个事实是电流的突变或者电流的不连续变化必然导致电感两端电压为无穷大，换句话说，如果试图使电感电流产生突变，那么必须在电感两端加上无穷大的电压。尽管从理论上说可以存在电压为无穷大的激励函数，但对于实际器件而言，这种情况永远不会出现。后面将看到，电感电流的突变还要求储存在电感上的能量产生突变，能量的突变要求在该时刻具有无穷大的功率，而无穷大的功率在实际物理世界中同样不存在。为了避免出现无穷大的电压和无穷大的功率，不允许电感电流在瞬间从一个值跳变到另一个值。

如果试图将有电流流过的实际电感突然断开，那么在开关处将产生电弧。这在某些汽车的点火系统中很有用，即流过火花线圈的电流被分流器截断，于是在火花塞上将产生电弧。尽管这不是瞬

① 法拉第更早一点。

时产生的，但却发生在一个很短的时间间隔里，从而可以产生一个很大的电压。在很小距离上存在大电压等同于存在一个很大的电场，储存的能量将通过空气电离后的电弧路径而释放。

式[5]也可以通过图形方法解释（或求解），参见例题7.4。



(a)



(b)

图7.14　(a) 几种不同类型的可以买到的电感，这些电感有时也称为扼流圈。从最左边开始沿顺时针方向分别为：287 μH铁氧体磁芯环形电感；266 μH铁氧体磁芯柱形电感；215 μH铁氧体磁芯电感，用于甚高频；85 μH铁粉磁芯环形电感；10 μH桶形电感；100 μH轴向引线电感，用于RF抑制的7 μH有损耗磁芯电感；(b) 一个11 H电感，体积为11 cm（高）× 8 cm（宽）× 8 cm（深）

例题7.4　流过3 H电感的电流波形如图7.15(a)所示，求电感电压并画出草图。

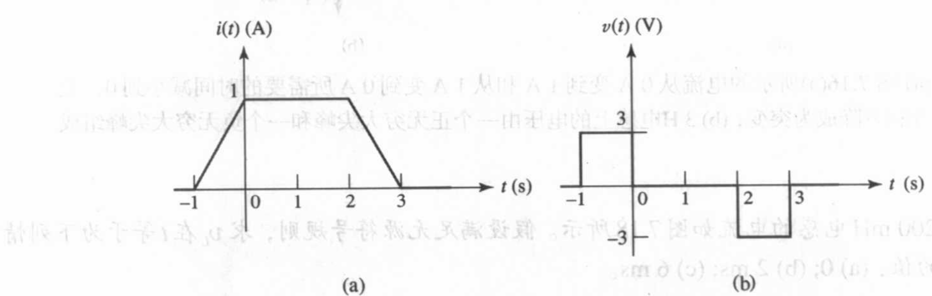


图7.15　(a) 3 H电感上的电流；(b) 相应的电压波形，$v = 3di/dt$

解：只要电压v和电流i满足无源符号规则，就可以利用式[5]从图7.15(a)得到v：

$$v = 3\frac{di}{dt}$$

因为当$t < -1$ s时电流为0，因此在此区间内电压也为零。然后电流以1 A/s的速率开始线性增加，因此产生$L\,di/dt = 3$ V的固定电压。在接下来的2 s间隔内电流不变，因此电压再次为零。最后电流下降使得$di/dt = -1$ A/s，因此$v = -3$ V。当$t > 3$ s时，$i(t)$为常数（0），因此$v(t) = 0$。完整的电压波形如图7.15(b)所示。

下面来分析电流在0 ~ 1 A之间快速上升和下降时对电压的影响。

例题 7.5 将图 7.16(a)所示的电流波形加到例题 7.4 中的电感上，求产生的电感电压。

解： 注意，上升和下降时间减小到 0.1 s，因此，每个导数的幅度变为原来的 10 倍。电流和电压曲线分别如图 7.16(a)和图 7.16(b)所示。有趣的是，在图 7.15(b)和图 7.16(b)的电压波形中，各电压脉冲的面积均为 3 V · s。

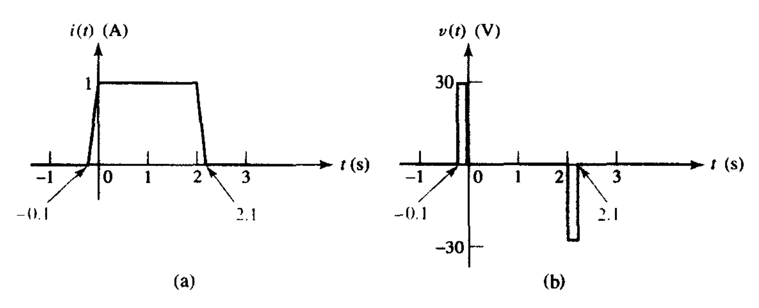


图 7.16 (a) 图 7.15(a)所示的电流从 0 A 变到 1 A 以及从 1 A 变到 0 A 的时间区间减小为原来的 1/10; (b) 产生的相应电压波形。为清晰起见，放大了脉冲宽度

出于好奇，我们继续分析。继续减小电流波形的上升时间和下降时间将使电压幅度成比例地增大，但这只发生在电流上升或者下降区间。电流的突变将产生无穷大的电压尖峰（每个尖峰的面积均为 3 V · s），如图 7.17(a)和图 7.17(b)所示。或者从相反但同样有效的另一个角度来看，产生无穷大的电压尖峰需要电流的突变。

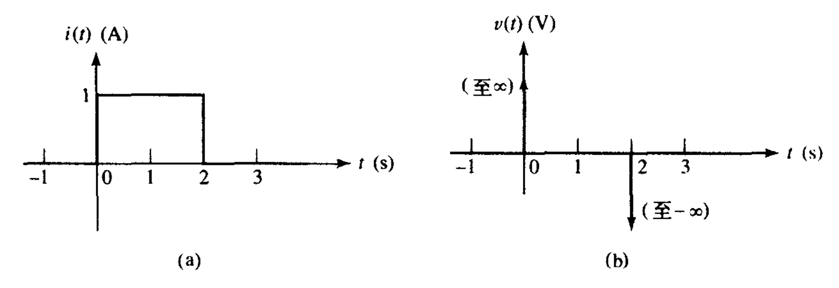


图 7.17 (a) 图 7.16(a)所示的电流从 0 A 变到 1 A 和从 1 A 变到 0 A 所需要的时间减小到 0，上升和下降成为突变; (b) 3 H电感上的电压由一个正无穷大尖峰和一个负无穷大尖峰组成

练习

7.4 流过 200 mH 电感的电流如图 7.18 所示。假设满足无源符号规则，求 v_L 在 t 等于为下列情况下的值：(a) 0; (b) 2 ms; (c) 6 ms。

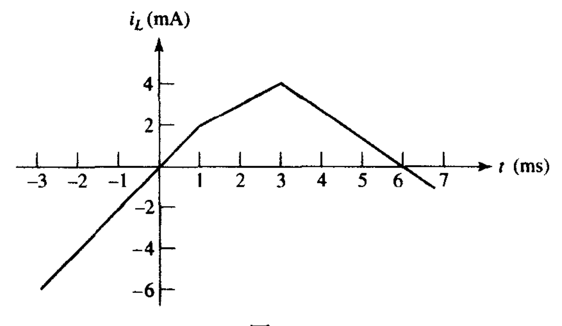


图 7.18

答案：0.4 V；0.2 V；-0.267 V。

电压－电流积分关系

通过一个简单的微分方程来定义电感：

$$v = L\frac{di}{dt}$$

从这个关系式可以得出几个关于电感特性的结论。例如，对于直流电流而言，可以将电感视为短路。另外，不允许电感电流从一个值跳变到另一个值，因为这要求电感具有无穷大的电压和功率。从这个简单的电感定义式中还可以得到其他信息。将公式改写成稍微不同的形式：

$$di = \frac{1}{L} v\,dt$$

现在可以引入积分。首先考虑两边的积分限。需要求出时刻t的电流i，所以这两个值分别规定了公式两边的积分上限；同样，对于下限也不失一般性，假定电流在时刻t_0的电流为$i(t_0)$，因此，

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

可以得到下面的方程：

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'$$

或

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0) \qquad [6]$$

式[5]用电流来表示电感电压，而式[6]用电压来表示电流。后面还可能用到其他形式。可以将该积分写成一个不定积分和积分常数k的形式：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v\,dt + k \qquad [7]$$

仍然假定求解的是一个实际问题，这时可选取t_0为$-\infty$以保证电感初始时没有任何电流和能量。因此，如果$i(t_0) = i(-\infty) = 0$，则

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt' \qquad [8]$$

下面通过例题来看看这几个积分的应用，其中电感两端的电压是已知的。

例题 7.6 一个 2 H 电感两端的电压为 $6\cos 5t$ V。如果 $i(t=-\pi/2) = 1$ A，求电感电流。

解： 从式[6]可得

$$i(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} 6\cos 5t'\,dt' + i(t_0)$$

或

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t - \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right)\sin 5t_0 + i(t_0) \\ &= 0.6\sin 5t - 0.6\sin 5t_0 + i(t_0) \end{aligned}$$



第一项表示电感电流以正弦方式变化，第二项和第三项代表一个常量，当给定某个时刻的电流值后就可以求出这个常量。已知 $t=-\pi/2$ s 时的电流为 1 A，即当 t_0 为 $-\pi/2$ 时 $i(t_0)=1$，于是得到

$$i(t) = 0.6\sin 5t - 0.6\sin(-2.5\pi) + 1$$

或

$$i(t) = 0.6\sin 5t + 1.6$$

从式[7]也可以得到相同的结果：

$$i(t) = 0.6\sin 5t + k$$

通过令 $t=-\pi/2$ 时电流等于 1 A，可以得到 k 的值为

$$1 = 0.6\sin(-2.5\pi) + k$$

或

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

于是和前面一样，可以得到

$$i(t) = 0.6\sin 5t + 1.6$$

如果使用式[8]求解，则对于这个特定的电压值而言将会出现问题。因为该公式是建立在 $t=-\infty$ 时电流为零的基础之上的，这对于实际的物理世界来说是正确的，但现在处理的是一个数学模型，其中的元件和激励函数都是理想的。积分后会出现一些问题。积分得到

$$i(t) = 0.6\sin 5t'\Big|_{-\infty}^{t}$$

尝试求出在积分下限时的积分结果为

$$i(t) = 0.6\sin 5t - 0.6\sin(-\infty)$$

$\pm\infty$ 的正弦值是不确定的，因此不可能求出该表达式。所以只有当求解的函数在 $t\to-\infty$ 时趋于零时式[8]才有用。

练习

7.5 一个 100 mH 的电感两端的电压为 $v_L = 2e^{-3t}$ V，如果 $i_L(-0.5) = 1$ A，求电感电流。

答案：$-\frac{20}{3}e^{-3t} + 30.9$ A。

但是，不能简单地给出以后将只采用某个公式的结论，因为这些公式各有其优越性，具体取决于不同的问题和应用。式[6]是一种通用的方法，它明确表明了积分常数为电流。式[7]是式[6]的简洁形式，但是没有很好地体现出积分常数的性质。最后，式[8]是一个很好的表达式，因为其中不含有任何常数，但是，它只适用于当 $t=-\infty$ 时电流为零或者当 $t=-\infty$ 时电流有确切解析表达式的情形。

能量储存

现在考虑功率和能量。吸收的功率等于电流和电压的乘积：

$$p = vi = Li\frac{di}{dt}$$

电感接收的能量 w_L 储存在线圈周围的磁场中。可用功率在所求时间区间的积分表示能量的变化：

$$\int_{t_0}^{t} p\,dt' = L\int_{t_0}^{t} i\frac{di}{dt'}\,dt' = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i'\,di'$$
$$= \frac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\}$$

因此，

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \tfrac{1}{2}L\left\{[i(t)]^2 - [i(t_0)]^2\right\} \qquad [9]$$

其中，假定在t_0时刻电流为$i(t_0)$。在使用该能量表达式时，通常假定t_0选取为电流为零的时刻，且假定该时刻的能量为零，于是电感储存的能量可以简单表示为

$$w_L(t) = \tfrac{1}{2}Li^2 \qquad [10]$$

其中我们知道能量为零的参考时刻就是电感电流为零的任何时刻。在以后的任何时刻，只要电流为零，那么就可以知道线圈中没有储存的能量。而只要电流不为零，无论其方向或符号如何，都必然有能量储存在电感中。从而，功率可以在某段时间传送到电感，然后又会被释放出来，对于理想电感而言，所有储存的能量都可以被释放出来，而储存的电荷和代理商的佣金都不可能存在于电感的数学模型中。但是，实际线圈都是用实际导线制造的，从而必然具有一定的电阻，这时，能量就不能够无损耗地储存和释放了。

可以用一个简单的例子来说明上面的结论。在图7.19中，3 H电感与0.1 Ω电阻以及正弦电流源$i_s = 12\sin(\pi t/6)$ A相串联，电阻可以看成实际线圈的导线中必然存在的等效电阻。

图7.19 正弦电流作为激励函数加到串联RL电路。0.1 Ω电阻表示制造电感的导线的内在电阻

例题7.7 求图7.19所示的电感中能够储存的最大能量，并计算有多少能量在电感的储存和释放过程中被电阻消耗掉。

解： 电感中储存的能量为

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = 216\sin^2\frac{\pi t}{6} \qquad \text{J}$$

该能量从$t = 0$时的零增大到$t = 3$ s时的216 J。因此储存在电感中的最大能量为216 J。

能量在$t = 3$ s时达到峰值后又逐渐被电感完全释放出来。下面分析216 J的能量在6 s的时间内经过储存和释放这一过程所消耗的能量。电阻上消耗的功率为

$$p_R = i^2R = 14.4\sin^2\frac{\pi t}{6} \qquad \text{W}$$

因此在这6 s时间内电阻转换成的热量的能量为

$$w_R = \int_0^6 p_R\,dt = \int_0^6 14.4\sin^2\frac{\pi}{6}t\,dt$$

或

$$w_R = \int_0^6 14.4\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}t\right)dt = 43.2 \text{ J}$$

因此，电感在6 s时间储存和释放216 J能量的过程中一共消耗了43.2 J的能量。该数值相当于所储存的最大能量的20%，不过，对于具有这么大电感的线圈来说这是合理的；对于电感值为100 μH左右的线圈，可以估计出这个值大约为2%~3%。

练习

7.6 假定图7.20所示的电感 $L = 25$ mH。(a) 如果 $i = 10te^{-100t}$ A，求 $t = 12$ ms时的 v; (b) 如果 $v = 6e^{-12t}$ V，$i(0) = 10$ A，求 $t = 0.1$ s时的 i; (c) 如果 $i = 8(1 - e^{-40t})$ mA，求 $t = 50$ ms时传送到电感的功率；(d) $t = 40$ ms时电感储存的能量。

图7.20

答案：−15.06 mV；24.0 A；7.49 μW；0.510 μJ。

下面来概括一下由定义式 $v = L\,di/dt$ 导出的电感的4个重要特性。

理想电感的重要特性

1. 如果流过电感的电流不随时间变化，那么电感两端没有电压，因此电感对于直流呈现短路特性。
2. 即使电感两端的电压为零，电感中也能储存有限的能量，比如流过电感的电流为常数。
3. 不可能在零时间内改变流过电感的电流，因为这要求电感两端有无穷大的电压。电感对于电流突变的抵抗类似于物体对于速度突变的抵抗。
4. 电感永远不会消耗能量，但可以储存能量。尽管这对于数学模型来说是正确的，但对于实际电感来说却是不正确的，因为电感存在串联电阻。

如果将上面这几句话的某些词语用它们的“对偶”词语来替换，即将“电感”替换为“电容”，“电流”替换为“电压”，“流过”替换为“两端”，短路替换为“开路”，“弹簧”替换为“物体”，“位移”替换为“速度”，就得到了前面给出的关于电容的特性的表述，反之亦然。这是一件很有趣的事，在7.6节中将详细讨论这种对偶关系。

7.3 电感和电容的组合

既然将电感和电容归为无源电路元件，那么需要确定电阻电路分析中推导出来的方法对电感和电容电路是否仍然有效。同时，类似于第3章中电阻组合的方法，如果可以把电感或电容串联或并联的组合用简单的等效电路来替换，那么将非常方便。

首先来看两个基尔霍夫定理，它们都是公理。但是这两个定理成立的前提并没有对组成网络的元件类型加以限制，所以对于电感和电容仍然有效。

电感串联

前面介绍了将电阻的各种组合化简为一个等效电阻的过程，与此类似，该过程可以扩展到电感和电容的情况。首先考虑将理想电压源加到 N 个电感的串联组合上，如图7.21(a)所示。希望有一个

电感值为L_{eq}的等效电感可以替代该串联组合，使得电源电流$i(t)$保持不变。等效电路如图7.21(b)所示。对原始电路应用 KVL 可得

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

或写成更简洁的形式：

$$v_s = \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} L_n\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}\sum_{n=1}^{N} L_n$$

对于等效电路：

$$v_s = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

因此等效电感为

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \cdots + L_N)$$

或

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^{N} L_n \qquad [11]$$

该电感等效于几个电感的串联，等效电感值等于原始电路中各电感值之和。这与串联连接的电阻得到的结果完全相同。

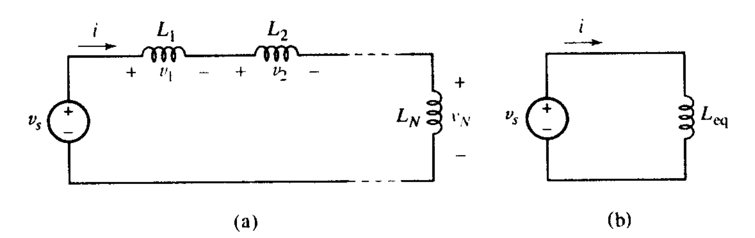


图 7.21　(a) 包含 N 个串联连接的电感电路；(b) 等效电路，其中 $L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$

电感并联

对原电路列出单一节点方程，可以得到并联电感组合的等效电感，如图 7.22(a)所示：

$$\begin{aligned} i_s &= \sum_{n=1}^{N} i_n = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{L_n}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i_n(t_0)\right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{L_n}\right)\int_{t_0}^{t} v\,dt' + \sum_{n=1}^{N} i_n(t_0) \end{aligned}$$

将它与图 7.22(b)所示的等效电路进行比较可得

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i_s(t_0)$$

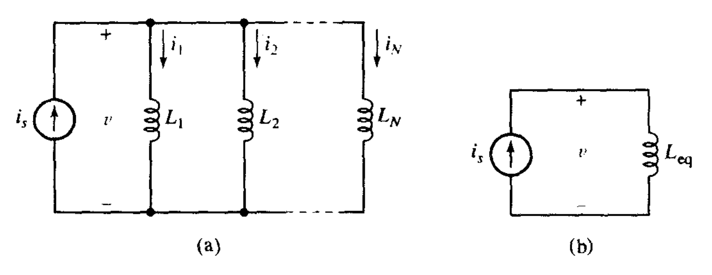


图 7.22 (a) N 个电感的并联组合；(b) 等效电路，其中 $L_{eq} = [1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N]^{-1}$

因为基尔霍夫电流定理要求$i_s(t_0)$等于t_0时刻各支路的电流之和，所以两个积分项必须相同，因此，

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \cdots + 1/L_N} \tag{12}$$

对于两个电感并联的特殊情况可得

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{13}$$

注意，电感的并联组合与电阻的并联组合的结论完全相同。

电容串联

为了得到N个串联电容的等效电容，使用图 7.23(a)所示的电路，图 7.23(b)为其等效电路，可以写出

$$\begin{aligned} v_s &= \sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^{t} i\, dt' + v_n(t_0) \right] \\ &= \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^{t} i\, dt' + \sum_{n=1}^{N} v_n(t_0) \end{aligned}$$

以及

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^{t} i\, dt' + v_s(t_0)$$

图 7.23 (a) 包含 N 个串联连接的电容电路；(b) 等效电路，其中 $C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N]^{-1}$

然而根据基尔霍夫电压定律可知，$v_s(t_0)$必须等于t_0时刻各电容电压之和，因此，

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \cdots + 1/C_N} \tag{14}$$

串联电容组合与串联电导组合的结论相同，或者说与并联电阻组合的结果相同。对于两个电容的串联情形：

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \qquad [15]$$

电容并联

最后，利用图7.24所示的电路，可以得到N个并联电容等效的电容值为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N \qquad [16]$$

可以看出并联电容组合与前面串联电阻组合的结论相同,这就是说,简单地将所有的电容相加即可。

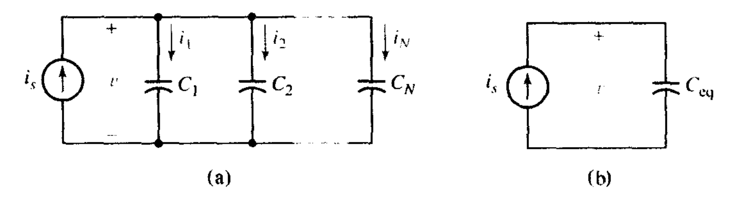


图7.24　(a) N个电容的并联组合; (b) 等效电路，其中$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$

这些公式必须记住。电感的并联和串联公式与相应的电阻公式相同，因而它们通常被认为是"显然"的，而对于电容的串联和并联的相应表达式需要特别注意，因为它们的形式与电阻或电感相反，如果计算时过于匆忙，往往会犯错误。

例题7.8　利用串并联组合，化简图7.25(a)所示的网络。

解： 首先将6 μF和3 μF的串联电容合并成2 μF的等效电容，然后将该电容与并联的1 μF电容合并成3 μF的等效电容。此外，3 H和2 H电感用一个等效的1.2 H电感替换，然后与0.8 H的电感相加，得到总的2 H等效电感。这个更简单（也很经济）的等效网络如图7.25(b)所示。

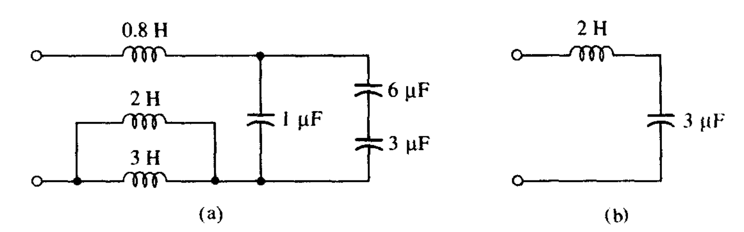


图7.25　(a) 给定的LC网络; (b) 更简单的等效电路

练习

7.7　网络如图7.26所示，求C_{eq}。

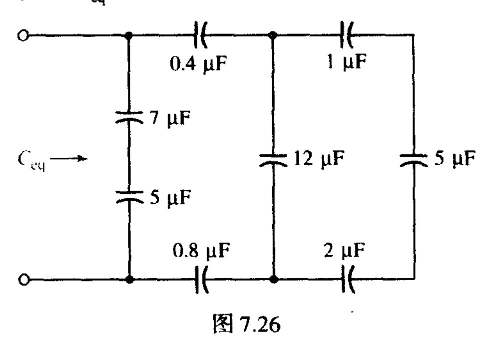


图7.26

答案：3.18 μF。

图7.27所示的网络包含3个电感和3个电容，但是没有可以合并的串并联电容和电感，因此不能用上面的方法来简化该网络。

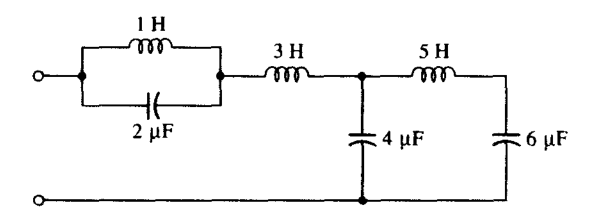


图 7.27　一个 *LC* 网络，其中没有可以合并的串并联电容和电感

7.4 线性推论

接下来讨论节点分析和网孔分析。因为前面已经讲过可以放心使用基尔霍夫定理，因此可以比较容易地写出足够的独立方程组。但是这些方程是常系数线性微积分方程，因此很难将它们描述出来，更不用说去求解了。这里写出它们的目的只是为了熟悉如何在*RLC*电路中应用基尔霍夫定律，在后面的几章中将讨论简单情形下的求解过程。

例题7.9　电路如图 7.28 所示，写出合适的节点方程。

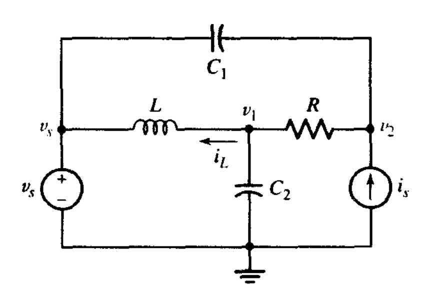


图 7.28　四节点 *RLC* 电路，已指定节点电压

解：指定的节点电压如图所示，将流出中心节点的电流相加可得

$$\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}(v_1-v_s)\,dt'+i_L(t_0)+\frac{v_1-v_2}{R}+C_2\frac{dv_1}{dt}=0$$

其中，$i_L(t_0)$对应积分开始时刻的电感电流值。对于右边节点：

$$C_1\frac{d(v_2-v_s)}{dt}+\frac{v_2-v_1}{R}-i_s=0$$

重写这两个方程可得

$$\frac{v_1}{R}+C_2\frac{dv_1}{dt}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v_1\,dt'-\frac{v_2}{R}=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v_s\,dt'-i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R}+\frac{v_2}{R}+C_1\frac{dv_2}{dt}=C_1\frac{dv_s}{dt}+i_s$$

这些就是前面说过的微积分方程，可以注意到几个有趣的特点。首先，电压源 v_s 恰好分别以积分和微分的形式出现在两个公式中，而不是简单地以 v_s 的形式出现。因为两个电源在所有时刻的值都是确定的，所以可以求出它们的积分或者微分。其次，电感电流的初始值$i_L(t_0)$相当于在中心节点处的一个电源电流（恒定不变）。

练习

7.8 如果图7.29所示电路中的 $v_C(t) = 4\cos 10^5 t$ V，求 $v_s(t)$。

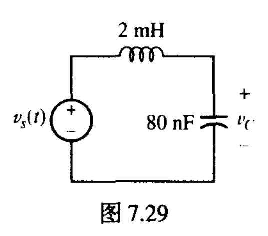


图7.29

答案：$-2.4\cos 10^5 t$ V。

此时，我们不会尝试着对这些微积分方程进行求解。但是需要指出，当电压激励函数为时间的正弦函数时，可以分别对3个无源元件定义电压－电流比（称为阻抗）或者电流－电压比（称为导纳）。这样，上面方程中的两个节点电压前的因子将简化为简单的因子，于是方程组变成了线性代数方程组，这样就可以像以前一样采用行列式或者简单的线性消元法来求解。

可以看出将线性应用于 *RLC* 电路的好处。根据前面线性电路的定义，这些电路仍属于线性电路，因为电容和电感的伏安关系都是线性关系。对于电感来说：

$$v = L\frac{di}{dt}$$

电流乘以常数 K 将使电压也变为原来的 K 倍。在积分公式中：

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

可以看出，如果每一项都增大 K 倍，那么初始电流值也必须增大相同的倍数。

对电容进行类似的研究也可以得到电容是线性元件的结论。因此由独立电源、线性受控源和线性电阻、电容、电感组成的电路为线性电路。

在这个线性电路中，响应同样与激励函数成正比。可以这样来证明：首先写出一般的微积分方程，将所有具有 Ri, $L\,di/dt$ 和 $1/C\int i\,dt$ 形式的项放在方程左边，将独立电源电压放在方程右边。下面就是具有这种形式的方程的一个简单例子：

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' + v_C(t_0) = v_s$$

如果现在每个独立源都增大 K 倍，那么每个方程的右边也都增大 K 倍。方程左边的项或者是包含回路电流的线性项，或者是初始电容电压。为了使所有这些响应（回路电流）都增大 K 倍，显然电容初始电压也必须增大 K 倍。也就是说，必须把初始电容电压作为独立电源电压来对待，即也要增大 K 倍。同样，初始电感电流在节点分析中作为独立电源电流。

因此，电源和响应之间的比例关系可以扩展到一般 *RLC* 电路，从而叠加定理依然适用。但是在应用叠加定理时，必须将初始电容电压和初始电感电流作为独立源来处理，每个初始值必须在适当的时候移去。在第5章中已经讲到，叠加定理是电阻电路线性特性的必然结果。电阻电路的线性性质是因为电阻上的电压－电流关系和基尔霍夫定律均是线性的。

在对 *RLC* 电路应用叠加定理之前，首先必须得到只存在一个独立电源时求解电路方程组的方法。此时应该明确线性电路响应的幅度与电源的幅度成正比。在以后使用叠加定理时，要考虑到 $t = t_0$ 时的电感电流或者电容电压相当于一个电源，并且在适当的时候将它们移去。

戴维南和诺顿定理基于初始电路的线性性质、基尔霍夫定理和叠加定理。一般 *RLC* 电路都满足这些要求，因此包含任何独立电压源和电流源、线性受控电压和电流源、线性电阻、电容和电感组合的电路都可以用这两个定理来分析。这里不再重复这些定理，因为前面关于它们的表述同样适用于一般的 *RLC* 电路。

7.5 带电容的简单运放电路

第6章中已经介绍了由理想运放构成的几种不同类型的放大电路。可以发现，几乎在所有的情形下，输出与输入电压的关系都是通过电阻比值的组合形式联系起来的。如果用一个电容来替换其中的一个或多个电阻，那么有可能得到一些有趣的电路，在这些电路中，输出必定与输入电压的微分或积分成正比。这些电路广泛应用于实际工作中。例如，可以将一个速度传感器接到运放电路中，提供一个与加速度成正比的信号；又如，可以对一段给定时间内所测量的电流进行积分从而得到表示向金属电极注入总电荷的输出信号。

为了利用理想运放得到积分器，将运放的同相输入端接地，利用一个理想电容作为反馈元件接在输出端和反相输入端之间，通过一个理想电阻将信号源 v_s 接到反相输入端，如图 7.30 所示。

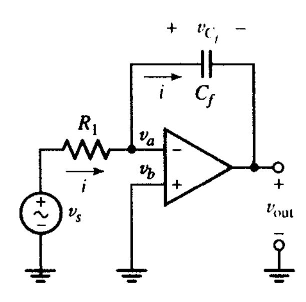


图 7.30 由理想运放连接成的积分器

对反相输入端进行节点分析：

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

流过电容的电流与其两端的电压之间的关系为

$$i = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

可以得到

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

根据理想运放规则 2，可知 $v_a = v_b = 0$，因此，

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

积分并求解 v_{out}，可得

$$v_{C_f} = v_a - v_{out} = 0 - v_{out} = \frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_s \, dt' + v_{C_f}(0)$$

或

$$v_{\text{out}} = -\frac{1}{R_1 C_f}\int_0^t v_s\,dt' - v_{C_f}(0) \qquad [17]$$

这样，用一个电阻、一个电容和一个运放组成了一个积分器。注意，输出电压的第一项为输入从 $t'=0$ 到 t 积分的负数的 $1/RC$ 倍，第二项为 v_{C_f} 初始值的负数。可以通过选取合适的 R 和 C 值使 $(RC)^{-1}$ 等于 1，比如取 $R = 1\ \text{M}\Omega$ 和 $C = 1\ \mu\text{F}$，而取其他值时，输出电压将相应地增大或者减小。

在结束对积分电路的讨论以前，喜欢思考的读者可能会问："可以用电感来替换电容得到一个微分电路吗？"确实可以，不过在电路设计中，考虑到电感的尺寸大、重量大、成本高以及具有的寄生电阻和电容，因此总是尽可能地少用电感。事实上，如果将图 7.30 所示的电阻和电容的位置交换，就可以得到微分器了。

例题 7.10　运放电路如图 7.31 所示，推导输出电压的表达式。

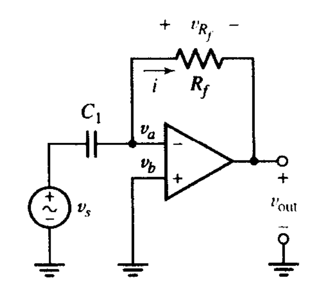


图 7.31　由理想运放连接成的微分器

解： 首先写出反相输入端的节点方程，已知 $v_{C_1} \triangleq v_a - v_s$：

$$0 = C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{\text{out}}}{R_f}$$

根据理想运放规则 2，可得 $v_a = v_b = 0$，所以，

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{\text{out}}}{R_f}$$

求解 v_{out}，得到

$$v_{\text{out}} = R_f C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}$$

因为 $v_{C_1} = v_a - v_s = -v_s$，因此，

$$v_{\text{out}} = -R_f C_1\frac{dv_s}{dt}$$

通过将图 7.30 所示电路中的电阻和电容位置互换就可以从积分器得到微分器。

练习

7.9　电路如图 7.32 所示，推导用 v_{in} 表示的 v_{out} 的表达式。

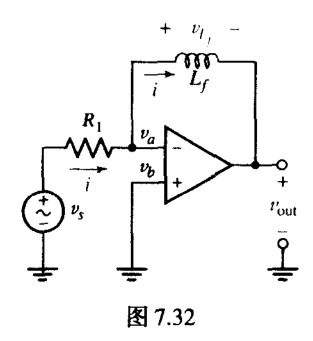


图 7.32

答案： $v_{out} = -L_f/R_1 dv_s/dt$。

7.6 对偶

对偶的概念应用于许多基本工程概念中。本节将用电路方程来定义对偶。如果描述一个电路的网孔方程与描述另一个电路的节点方程有相同的数学形式，那么就称这两个电路对偶。如果一个电路的各网孔方程与另一个电路相应的节点方程在数值上也相同，则称它们为完全对偶。当然，电流和电压变量本身不可能相同。对偶本身只是指对偶电路所表现出来的性质。

下面通过图 7.33 所示电路的两个网孔方程来解释该定义，并用它来构造一个与之完全对偶的电路。设两个网孔电流为 i_1 和 i_2，则网孔方程为

$$3i_1 + 4\frac{di_1}{dt} - 4\frac{di_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [18]$$

$$-4\frac{di_1}{dt} + 4\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t i_2\,dt' + 5i_2 = -10 \qquad [19]$$

现在可以来构造与该电路完全对偶的电路的两个方程。因为希望它们是节点方程，因此首先将式[18]和式[19]中的网孔电流 i_1 和 i_2 替换为两个相对参考节电的节点电压 v_1 和 v_2，可得

$$3v_1 + 4\frac{dv_1}{dt} - 4\frac{dv_2}{dt} = 2\cos 6t \qquad [20]$$

$$-4\frac{dv_1}{dt} + 4\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8}\int_0^t v_2\,dt' + 5v_2 = -10 \qquad [21]$$

现在来构造由这两个节点方程表示的电路。

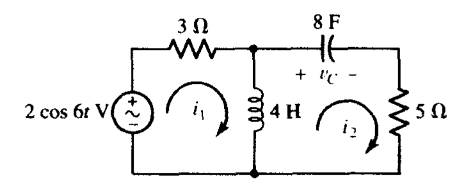


图 7.33 给定电路，应用对偶定义来得到对偶电路。注意 $v_C(0) = 10$ V

首先画出一条线表示参考节点，然后建立两个节点，这两个节点为 v_1 和 v_2 的正参考点。式[20]表示在节点 1 和参考节点之间接有一个 2 cos 6*t* A 的电流源，它提供流入节点 1 的电流。该方程同时也显示了在节点 1 和参考节点之间存在一个 3 S 的电导。对于式[21]，首先考虑非公共项，即在式[20]中未出现的项，这些项表明在节点 2 和参考节点之间接有一个 8 H 的电感和一个 5 S 的电导

(并联)。式[20]和式[21]中共同的两项表示节点1和节点2之间存在一个4 F的电容，即该电容连接在这两个节点之间。式[21]右边的常数项表示电感电流在$t = 0$时的值，即$i_L(0) = 10$ A。对偶电路如图7.34所示。因为这两组方程在数值上相同，因此完全对偶。

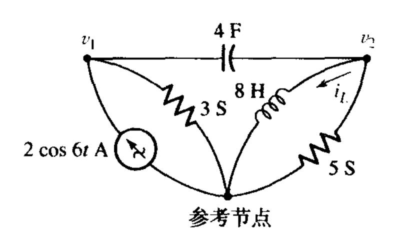


图7.34 与图7.33电路完全对偶的电路

对偶电路可以用更简单的方法得到，因为不需要写出方程。为了构建给定电路的对偶电路，以其网孔方程来考虑电路。因为每一个网孔需要有一个非参考节点与之对应，另外还必须有一个参考节点，所以在所给电路中的各网孔中间分别放置一个节点，然后在电路图附近画一条线或者画一个将电路图围起的环作为参考节点。位于两个网孔之间的每个公共元件在相应的网孔方程中产生相同项(不包括符号)，因此必须将它替换为这样一个元件，使之在两个节点方程中产生对偶项，于是这个对偶元件必须连接在该公共元件所在的两个网孔内的两个非参考节点之间。

很容易确定对偶元件本身的性质。只要将电感替换成电容，电容替换成电感，电导替换成电阻，电阻替换成电导，那么两组方程的数学形式就会相同。因此图7.33所示电路中网孔1和网孔2公共的4 H电感在对偶电路中对应于节点1和节点2之间的4 F电容。

只出现在一个网孔中的元件在对偶电路中必须出现在相应的节点和参考节点之间。参考图7.33所示的电路，2 cos 6t V的电压源只出现在网孔1中，因此其对偶元件为2 cos 6t A的电流源，并且只连接在节点1和参考节点之间。因为电压源为顺时针方向，所以电流源的方向必定为流入非参考节点。最后，必须给出给定电路中8 F电容两端的初始电压的对偶。方程已经显示该初始电压的对偶为流过电感的初始电流且数值相同，通过将所给电路中初始电压和对偶电路中的初始电流均视为电源，容易判断出该电流的方向。因此，如果在给定电路中将v_C作为一个电源，它将出现在网孔方程的右边，数值为$-v_C$；在对偶电路中，将电流i_L作为电源使得节点方程右边出现$-i_L$项。因为当作为电源时，每项都有相同的符号，因此如果$v_C(0) = 10$ V，那么$i_L(0)$必定为10 A。

图7.33电路重画在图7.35中，直接在原电路图中构建出其完全对偶的电路。该对偶电路可以这样给出：只要在给定元件公共的两个网孔内的两个节点之间画出该给定元件的对偶元件即可。画出包围给定电路的参考节点将有助于得到对偶电路。把对偶电路画成标准形式，如图7.34所示。

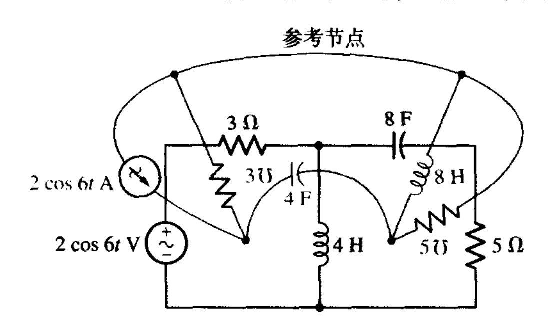


图7.35 直接在图7.33所示电路图上构建对偶电路

构建对偶电路的另一个例子如图7.36(a)和图7.36(b)所示。因为没有指定元件值，所以这两个电路对偶，但不是完全对偶。在图7.36(b)所示的每个网孔中间放置一个节点，然后根据前面的过程可以从对偶电路恢复到原始电路。

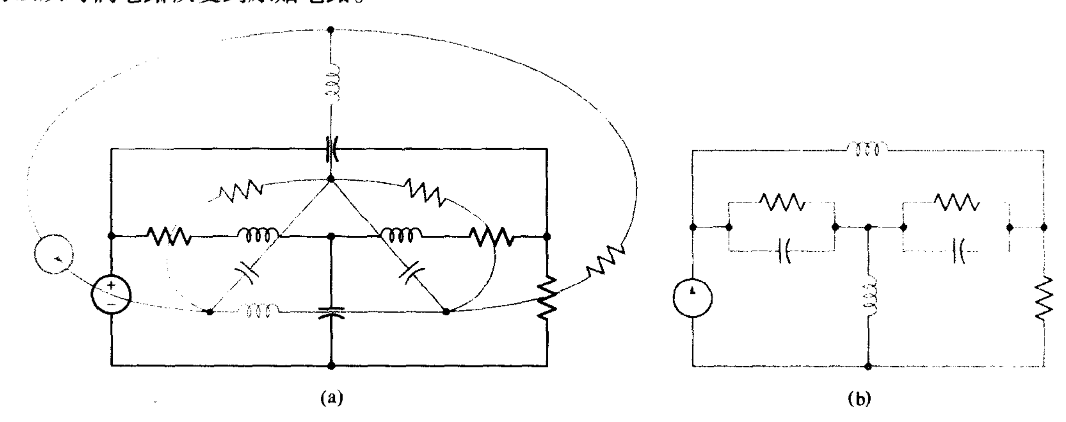


图7.36 (a) 在给定电路（黑色）上构建给定电路的对偶电路（灰色）；(b) 为了与原电路比较，将对偶电路画成传统形式

对偶概念也可以用描述电路分析的语言来表示。例如，如果给定一个电压源与一个电容串联，那么可以得到如下重要描述："电压源产生电流流过电容"，其对偶描述为："电流源产生电压加在电感两端"。如果文字描述不太严谨，如"电流沿串联电路流过"，那么得到其对偶需要一定的创造性。[①]

可以通过戴维南和诺顿定理来练习使用对偶语言。

我们已经介绍了对偶元件、对偶语言和对偶电路。那么什么是对偶网络呢？考虑串联连接的电阻R和电感L。通过在给定网络中连接上理想电源可以很容易得到该二端网络的对偶。该对偶电路为对偶电源与一个大小等于R的电导G以及一个大小等于L的电容C并联。可以将对偶网络看成是连接到对偶电源的二端网络，它由G和C并联组成。

在结束对偶定义之前，应该指出定义对偶的基础是网孔方程和节点方程。因为非平面电路不能用网孔方程来描述，那么非平面电路不存在对偶电路。

可以使用对偶原理来减少分析简单标准电路的工作。在分析过串联RL电路之后，并联RC电路就不需要再分析了。这并不是因为RC电路不重要，而是因为已经了解了对偶网络的分析过程。由于复杂电路的分析不易于知道，因此对偶原理通常不能提高任何快速解答。

练习

7.10 写出图7.37(a)所示电路的单节点方程，并通过直接代入证明其解为$v = -80e^{-10^6 t}$ mV。已知这个结果，求：(a) v_1；(b) v_2；(c) 图7.37(b)所示的i。

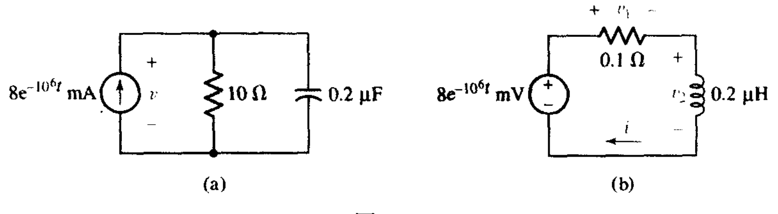


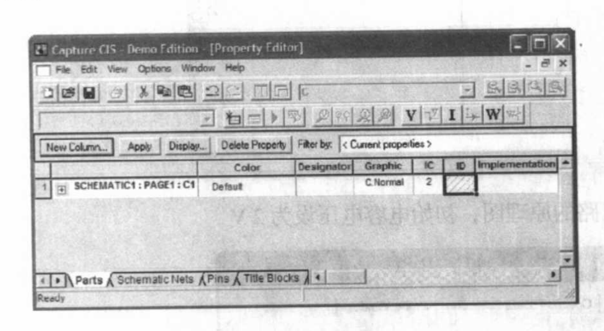
图7.37

答案：$-8e^{-10^6 t}$ mV；$16e^{-10^6 t}$ mV；$-80e^{-10^6 t}$ mA。

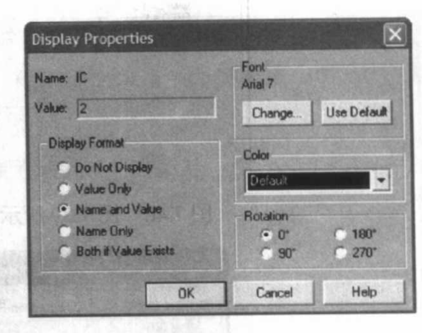
① 有人建议为："电压存在于整个并联电路中"。

7.7 用PSpice对电容和电感建模

当利用PSpice来分析包含电容和电感的电路时，经常需要指定每个元件的初始条件（即$v_C(0)$和$i_L(0)$）。双击元件符号会产生图7.38(a)所示的对话框。在最右边（未显示）可以找到电容值，其默认值为1 nF。我们也可以指定初始IC（条件），图7.38(a)中设为2 V。单击鼠标右键并选择Display（显示），得到图7.38(b)所示的对话框，它可以使初始条件显示在原理图中。电感的初始条件的设置过程相同。另外还应该注意：当电容第一次放在原理图中时是水平放置，初始电压的正参考端在左边。



(a)



(b)

图7.38 (a)电容特性编辑窗口；(b)特性显示对话框

例题7.11 电路如图7.39所示，如果$v_s = 1.5\sin 100t$ V，$R_1 = 10$ kΩ，$C_f = 4.7$ μF，$v_C(0) = 2$ V，仿真电路的输出电压波形。

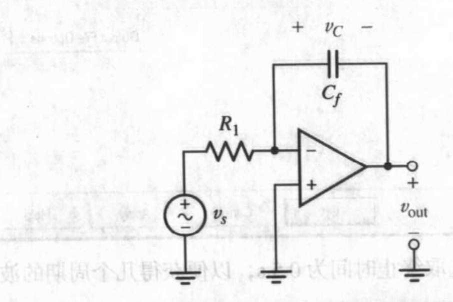


图7.39 积分运放电路

解： 首先画出电路原理图，确保设置电容两端的初始电压（见图7.40）。注意，必须把频率从100 rad/s转换成100/2π = 15.92 Hz。

为了得到时变电压和电流，需要执行瞬态分析。在PSpice菜单中，创建名为op amp integrator的New Simulation Profile，得到图7.41所示的对话框。Run to time表示仿真终止的时间，PSpice将自动选择计算电压和电流值的离散时间点。有时PSpice会给出一个暂态解不收敛或者输出波形不够平滑的出错信息，这时，需要设置最大步进值（Maximum step size），在本例题中，该值设为0.5 ms。

根据以前的分析和式[17]，输出波形与输入波形积分的负数成正比，即$v_{out} = 0.319\cos 100t - 2.319$ V，如图7.42所示。电容上的2 V初始电压使得输出电压具有非零平均值，而不像输入信号那样平均值为零。

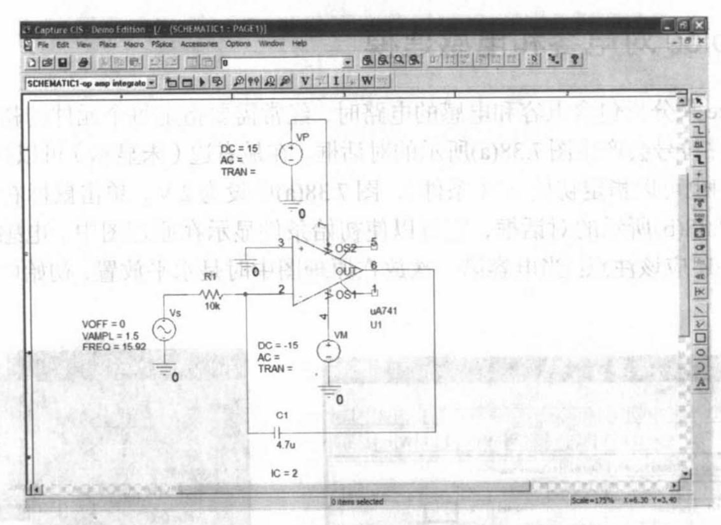


图 7.40　图 7.39 所示电路的原理图，初始电容电压设为 2 V

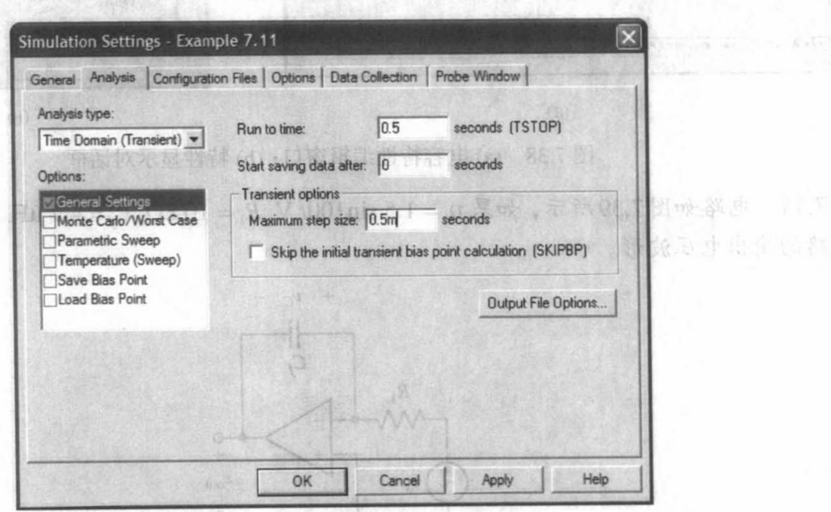


图 7.41　设置瞬态分析的对话框。选取终止时间为 0.5 s，以便获得几个周期的波形（1/15.92 ≈ 0.06 s）



图 7.42　积分电路的仿真输出结果，同时给出输入波形以便于比较

总结和复习

- 流过电容的电流为 $i = C\,dv/dt$。
- 电容两端的电压与其电流的关系为

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' + v(t_0)$$

- 电容对于直流电流呈现开路特性。
- 电感两端的电压为 $v = L\,di/dt$。
- 流过电感的电流与其电压的关系为

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt' + i(t_0)$$

- 电感对于直流电流呈现短路特性。
- 储存在电容中的能量为$\frac{1}{2}Cv^2$，而储存在电感中的能量为$\frac{1}{2}Li^2$；两者都以没有储存能量的时刻作为参考时刻。
- 电感的串联和并联组合与电阻相同的等式进行合并。
- 电容的串联和并联组合与电阻相反的等式进行合并。
- 将电容作为反相运算放大器的反馈元件将使输出电压与输入电压的积分成正比。交换输入电阻和反馈电容的位置将使输出电压与输入电压的微分成正比。
- 因为电容和电感都是线性元件，因此 KVL、KCL、叠加定理、戴维南和诺顿定理、节点分析和网孔分析都可以应用在电容和电感电路中。
- 对偶的概念对包含电感的电路和包含电容的电路之间的关系给出了另一种说明。
- PSpice允许设置电容两端的初始电压和流过电感的初始电流。瞬态分析可以提供包含电容和电感元件的电路的时域响应细节。

深入阅读

不同电容和电感类型的选择及其特性的详细介绍：

H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook*, 2nd ed., C. A. Harper, ed. New York: McGraw-Hill, 2003, pp.69-203。

C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook*, 2nd ed. Olathe, Kans.: C. J. Publishing, 1996。

两本描述基于电容的运放电路的书籍：

R. Mancini, (ed.). *Op Amps Are For Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003。

W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3rd ed. Upper Sadle River, N.J.: Prentice Hall, 1997。

习题

7.1 电容

1. 计算流过 10 μF 电容的电流，假设电容两端的电压为：(a) 5 V；(b) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V；(c) $4e^{-t}$ mV。

2. 将图7.43所示的电压波形加到4.7 μF电容两端，画出流过该电容的电流。假定电流和电压的定义符合无源符号规则。

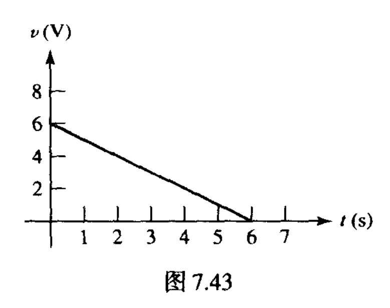


图7.43

3. 求流过1 mF电容的电流，假设加在其两端的电压 v 为：(a) $30te^{-t}$ V; (b) $4e^{-5t}\sin 100t$ V。
4. 能够储存在图7.2(b)和图7.2(c)所示的各个电解电容中的最大能量是多少？给出解释。
5. 某电容由两块薄铝片构成，铝片直径为1 cm，相隔100 μm(0.1 mm)。(a) 计算其电容，假定两块金属板之间填充的是空气。(b) 确定电容两端加上多大电压时其储存的能量为1 mJ。(c) 在某个应用中可以提供100 V的电压，如果需要电容储存2.5 μJ的能量，则要求两块金属板之间的相对介电常数 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 为多大？
6. 一个硅材料PN结二极管的结电容可以用下式表示：

$$C_j = \frac{K_s \varepsilon_0 A}{W}$$

其中，硅的 $K_s = 11.8$，ε_0 为真空介电常数，A 为横截面积，W 为耗尽层宽度。W 不仅与二极管的结构有关，还与接到两端的电压有关，并且

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\varepsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)}$$

二极管大量用于电子电路中，因为可以将二极管用做压控电容。假定上式的参数为 $N = 10^{18}\ \text{cm}^{-3}$，$V_{bi} = 0.57$ V，$q = 1.6 \times 10^{-19}$ C，分别计算横截面积为 $A = 1\ \mu\text{m} \times 1\ \mu\text{m}$ 的二极管在加上电压 $V_A = -1$ V，-5 V 和 -10 V 时的电容。
7. 设计一个电容，其电容值可通过旋转手柄在100 pF和1 nF之间进行调节，并画出相应的电路图来解释你的设计。
8. 将电压 $v(t) = \begin{cases} 3\text{ V}, & t < 0 \\ 3e^{-t/5}\text{ V}, & t \geqslant 0 \end{cases}$ 加到300 μF电容的两端。(a) 计算电容在 $t = 2$ ms时储存的能量。(b) 电容储存的能量在何时下降到其最大值的37%（以秒为单位取整，四舍五入）？(c) 确定 $t = 1.2$ s时流过电容的电流。(d)计算 $t = 2$ s时电容向外部电路传输的功率。
9. 流过47 μF电容的电流如图7.44所示，计算下列情况下电容两端的电压：(a) $t = 2$ ms; (b) $t = 4$ ms; (c) $t = 5$ ms。

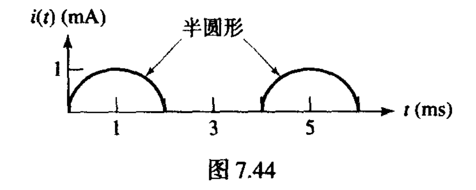


图7.44

10. 已知流过电容的电流为 $i(t) = 7\sin \pi t$ mA，如果在 $t = 200$ ms 时电容储存的能量为 3 μJ，计算该电容的大小。

11. (a)如果图 7.1 所示的电容大小为 0.2 μF，令 $v_C = 5 + 3\cos^2 200t$ V，求 $i_C(t)$。(b)电容中储存的最大能量为多少？(c)如果 $t < 0$ 时 $i_C = 0$，$t > 0$ 时 $i_C = 8e^{-100t}$ mA，求 $t > 0$ 时的 $v_C(t)$。(d) 如果 $t > 0$ 时 $i_C = 8e^{-100t}$ mA，$v_C(0) = 100$ V，求 $t > 0$ 时的 $v_C(t)$。

12. 将图 7.45 所示的电流波形接到一个 2 mF 的电容上，给定 $v_C(0) = 250$ V，假定符合无源符号规则，问在哪段时间内 v_C 的值在 2000~2100 V 之间？

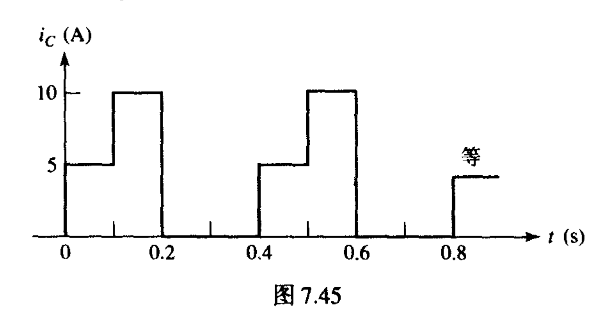


图 7.45

13. 电阻 R 与一个 1 μF 的电容并联，在 $t \leqslant 0$ 时，储存在电容上的能量为 $20e^{-1000t}$ mJ。(a) 求 R；(b) 通过积分，证明电阻 R 在时间 $0 \leqslant t < \infty$ 消耗的能量为 0.02 J。

14. 参见图 7.46 所示：(a) 计算各电容两端的电压；(b) 用PSpice对结果进行验证并提交一份正确标注且具有仿真结果的原理图。

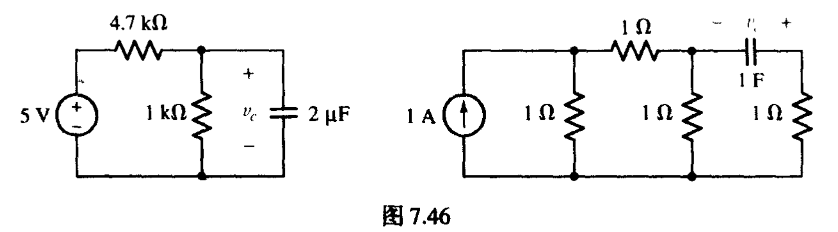


图 7.46

7.2　电感

15. 计算 10 nH 电感两端的电压，设流入该电感正参考端的电流为：(a) 5 mA; (b) $115\sqrt{2}\cos 120\pi t$ A; (c) $4\,e^{-6t}$ mA。

16. 将图 7.47 所示的电流波形加到 1 pH 电感上，画出该电感两端的电压。假定电流和电压的定义符合无源符号规则。

17. 计算 5 μH 电感两端的电压，设流入该电感正参考端的电流 i 为：(a) $30te^{-t}$ nA；(b) $4e^{-5t}\sin 100t$ mA。

18. 如果导线最大额定电流为 1.5 A，那么 5 mH 电感能够储存的最大能量为多少？给出解释。

19. 参见图 7.48：(a) 画出 0 ms < t < 60 ms 时 v_L 随时间变化的曲线；(b) 求电感吸收功率达到最大值的时刻；(c) 求电感提供最大功率的时刻；(d) 求 $t = 40$ ms 时电感储存的能量。

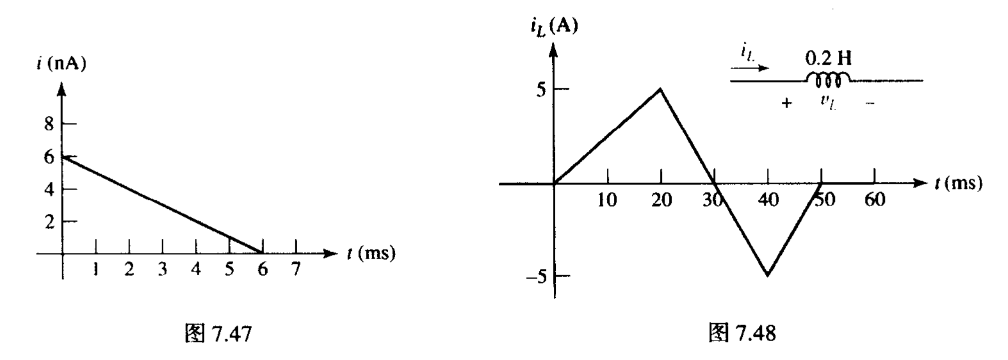


图 7.47　　　　图 7.48

20. 在图 7.13 中，设 $L = 50$ mH，且 $t < 0$ 时 $i_L = 0$，$t > 0$ 时 $i_L = 80te^{-100t}$ mA，求 $|i_L|$ 和 $|v|$ 的最大值以及达到最大值的时刻。

21. (a) 如图 7.49(a)所示的电路，如果 $t > 0$ 时 $i_s = 0.4t^2$ A，求 $t > 0$ 时的 $v_{in}(t)$并画出相应波形。(b) 如果 $t > 0$ 时 $v_s = 40t$ V，$i_L(0) = 5$ A，电路如图 7.49(b)所示，求 $t > 0$ 时的 $i_{in}(t)$并画出相应波形。

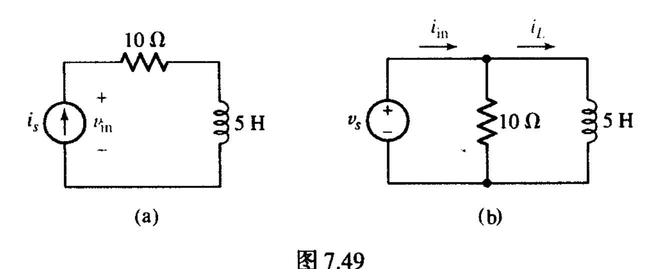


图 7.49

22. 将电压 20 cos 1000t V 加到一个 25 mH 的电感上，如果在 $t = 0$ 时电感电流为零，求下列参量并画出相应波形（0 ms ≤ t ≤ 2π ms）: (a) 电感吸收的功率；(b) 电感储存的能量。

23. 一个 0.2 H 的电感在 0 ms < t ≤ 10 ms 内两端的电压 v_L 为 100 V，并在时间 10 ms < t < 20 ms 内线性减小到零，在 20 ms ≤ t < 30 ms 内为零，在 30 ms < t < 40 ms 内为 100 V，此后一直为零，假定 v_L 和 i_L 遵循无源符号规则: (a) 如果 $i_L(0) = -2$ A，计算 $t = 8$ ms 时的 i_L；(b) 如果 $i_L(0) = 0$，求 $t = 22$ ms 时电感储存的能量。

24. 如果图 7.50 所示的电路已经工作了很长时间，求电流 i_x。

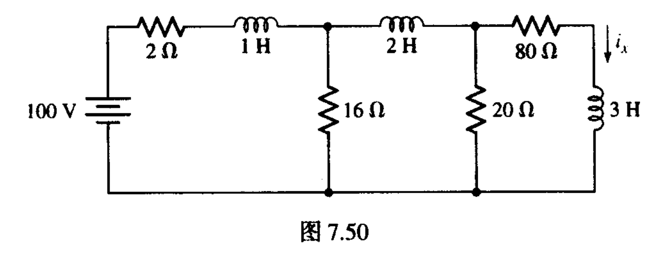


图 7.50

25. 一个 5 H 电感两端的电压为 $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})$ V，如果 $i_L(0) = 80$ mA，且 v_L 和 i_L 均遵循无源符号规则，求: (a) v_L(1 s)；(b) i_L(1 s)；(c) $i_L(\infty)$。

26. 假设图 7.51 所示电路已经工作了很长时间，如果: (a) x 和 y 之间为电容；(b) x 和 y 之间为电感。分别计算 v_x。

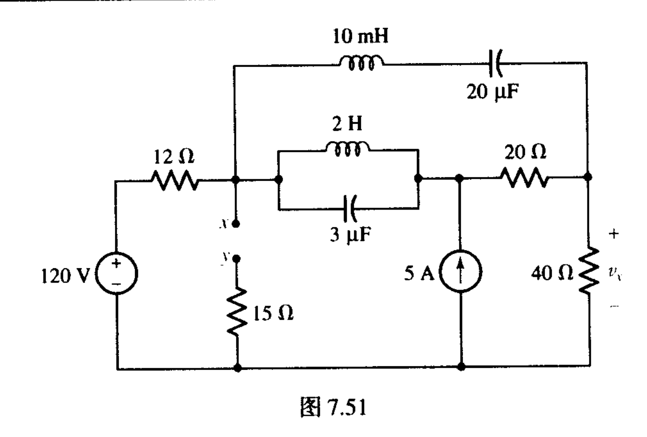


图 7.51

27. 参见图 7.52 所示的电路，求：(a) w_L；(b) w_C；(c) 电路中各元件两端的电压；(d) 各电路元件上的电流。
28. 参见如图 7.53 所示的电路，设 $t > 0$ 时 $v_s = 400t^2$ V，$i_L(0) = 0.5$ A，计算 $t = 0.4$ s 时：(a) 储存在电容上的能量；(b) 储存在电感上的能量；(c) 自 $t = 0$ 开始消耗在电阻上的能量。

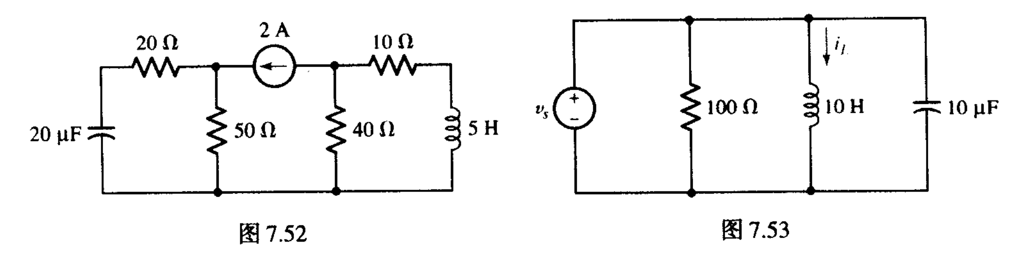


图 7.52　　图 7.53

29. 电路如图 7.54 所示：(a) 分别计算 7 Ω 和 10 Ω 电阻消耗的功率；(b) 用 PSpice 对结果进行验证。提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。
30. (a) 确定图 7.55 中连接到电感的网络的戴维南等效电路；(b) 计算流过电感的电流；(c) 用 PSpice 对结果进行验证，提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。

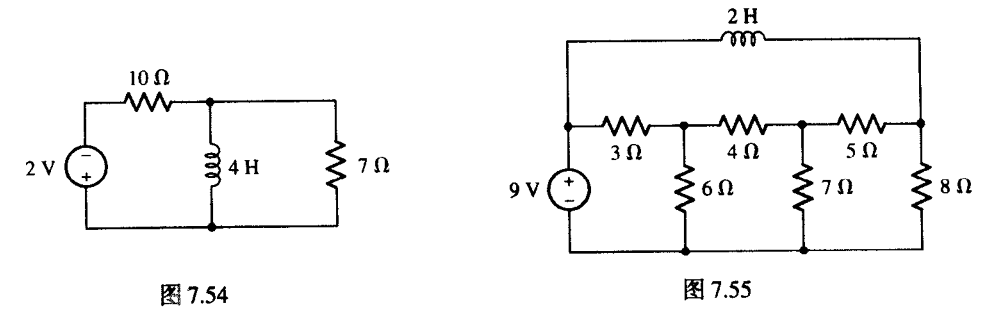


图 7.54　　图 7.55

7.3 电感和电容的组合

31. 网络如图 7.56 所示，如果所有电容都为 10 μF，求等效电容。
32. 网络如图 7.57 所示，如果所有电感都为 77 pH，求等效电感。
33. 电路如图 7.58 所示：(a) 采用串并联组合尽可能化简电路；(b) 如果所有电阻都为 10 kΩ，所有电容都为 50 μF，所有电感都为 1 mH，计算 v_x。



34. 电路如图 7.59 所示：(a) 采用串并联组合规则，重画电路使其包含的元件最少；(b) 如果所有电阻都为 1 Ω，所有电容都为 50 μF，所有电感都为 10 nH，计算 V_x。

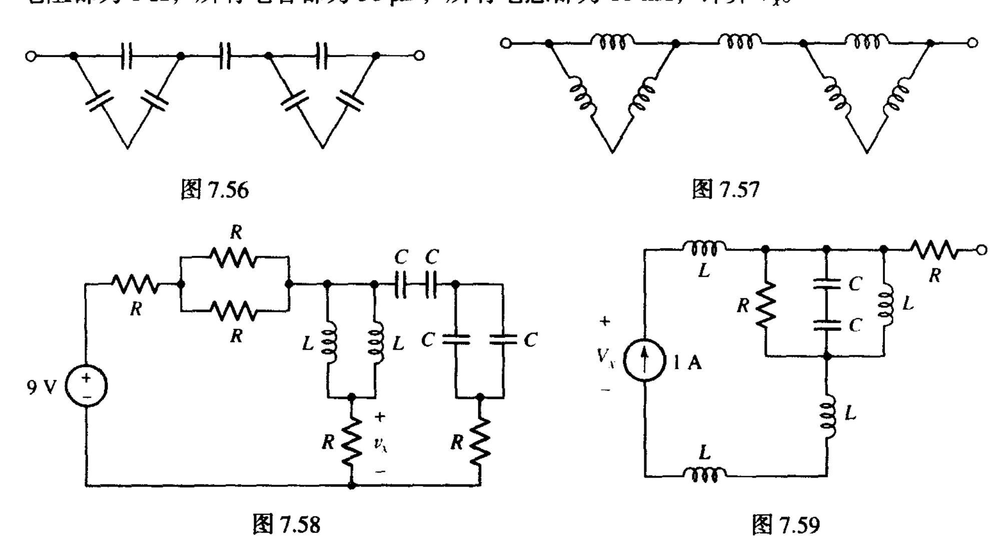


图 7.56　　图 7.57

图 7.58　　图 7.59

35. 化简图 7.60 所示的网络，使得从 a、b 端看进去等效为单个电容。

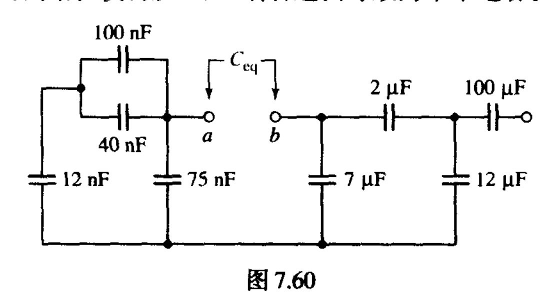


图 7.60

36. 化简图 7.61 所示的网络，使得从 a、b 端看进去等效为单个电感。

37. 参见如图 7.62 所示的网络，当 a、b 端接入 2.5 V 电压时储存的能量为 534.8 μJ，问 C_x 的值是多少？

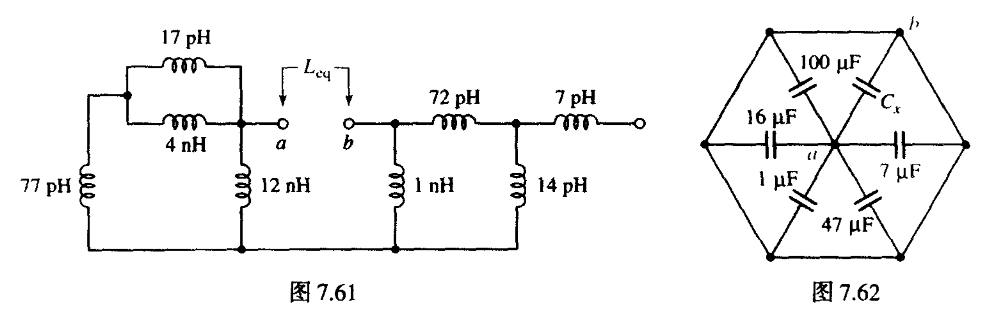


图 7.61　　图 7.62

38. 如图7.63所示的网络由三级并联电感网络串联而成，每级的电感个数等于该级的序号。(a) 如果所有电感为 1.5 H，求等效电感；(b) 当级数为 N 时，求该网络的等效电感的一般表达式。

39. 参见图 7.63 所示的网络，$L_1 = 1$ H，$L_2 = L_3 = 2$ H，$L_4 = L_5 = L_6 = 3$ H。(a) 求等效电感；(b) 当级数为 N 时，求该网络的等效电感表达式，假定第 N 级由 N 个电感组成，每个电感的电感值为 N H。

40. 推广 Δ-Y 变换的概念，并简化图 7.64 所示的网络，假定所有元件都是 2 pF 的电容。

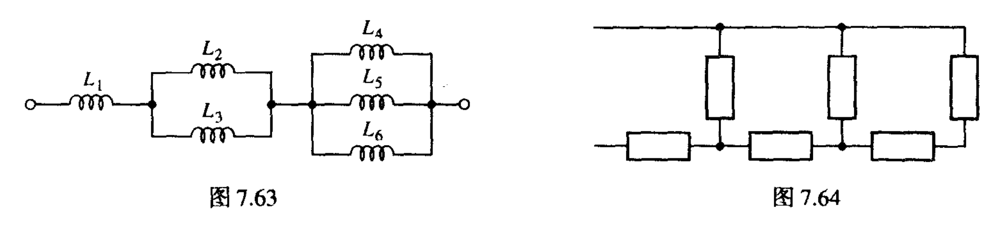


图 7.63　　　　图 7.64

41. 推广 Δ-Y 变换的概念来简化图 7.64 所示网络，假设所有元件都是 1 nH 电感。
42. 给定装满 1 μH 电感的盒子，说明如何（用尽可能少的元件）得到如下的等效电感：(a) 2.25 μH；(b) 750 nH；(c) 450 nH。
43. 参见图 7.65 所示的网络，求：(a) R_{eq}，假定各元件均为 10 Ω 电阻；(b) L_{eq}，假定各元件均为 10 H 电感；(c) C_{eq}，假定各元件均为 10 F 电容。
44. 在如图 7.66 所示的电路中，设元件 A，B，C 和 D 分别为：(a) 1 H，2 H，3 H 和 4 H 的电感，分别求 x-x' 开路和短路时的输入电感；(b) 1 F，2 F，3 F 和 4 F 的电容，分别求 x-x' 开路和短路时的输入电容。

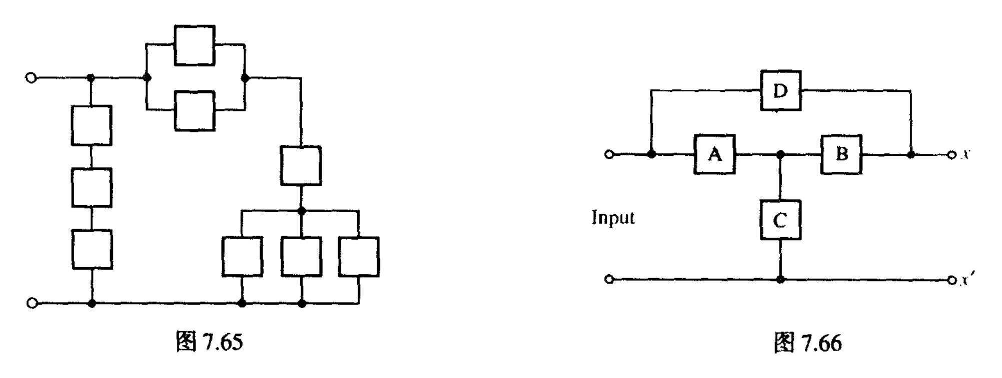


图 7.65　　　　图 7.66

45. 给定装满 1 nF 电容的盒子，使用尽可能少的元件，说明如何得到下面的等效电容：(a) 2.25 nF；(b) 0.75 nF；(c) 0.45 nF。

7.4　线性推论

46. 参见如图 7.67 所示的电路，设 $i_s = 60e^{-200t}$ mA，$i_1(0) = 20$ mA。(a) 求 $v(t)$ 的表达式，t 为任何值；(b) 求 $t \geq 0$ 时 $i_1(t)$ 的表达式；(c) 求 $t \geq 0$ 时 $i_2(t)$ 的表达式。
47. 参见如图 7.68 所示的电路，设 $v_s = 100e^{-80t}$ V，$v_1(0) = 20$ V。(a) 求 $i(t)$ 的表达式，t 为任何值；(b) 求 $t \geq 0$ 时 $v_1(t)$ 的表达式；(c) 求 $t \geq 0$ 时 $v_2(t)$ 的表达式。

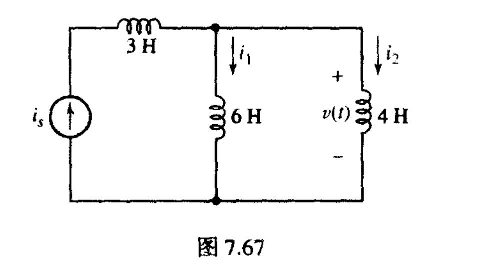


图 7.67

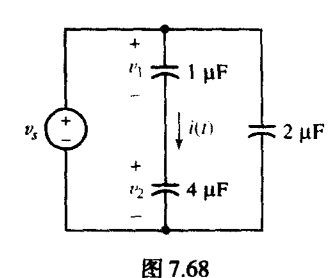


图 7.68

48. (a) 写出图 7.69 所示电路的节点方程；(b) 列出该电路的网孔方程。

49. 如果假定图 7.70 所示电路已工作了很长的时间，利用叠加定理求 $v_C(t)$和 $v_L(t)$。

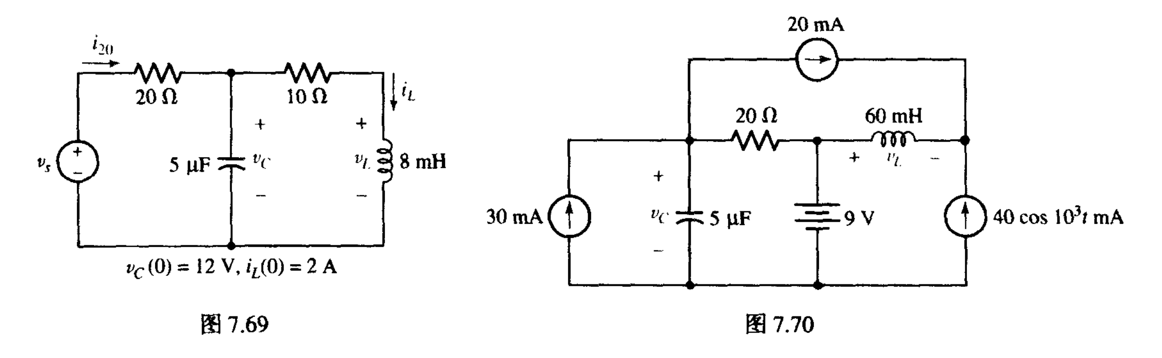


图 7.69 图 7.70

50. 对图 7.71 所示的电路，假定 $t = 0$ 时不储存任何能量，列出完整的节点方程组。

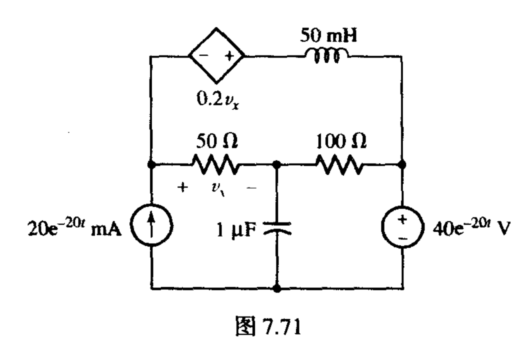


图 7.71

7.5 带电容的简单运放电路

51. 交换图 7.30 所示电路中 R 和 C 的位置，并假定运放的 $R_i = \infty$，$R_o = 0$，$A = \infty$。(a) 求 $v_{out}(t)$，用 $v_s(t)$表示；(b) 如果 A 为有限值，求 $v_{out}(t)$与 $v_s(t)$的关系表达式。

52. 离子注入机的作用是将电离的原子注入硅中以改变其电气特性，为后续的二极管和三极管的制造做准备。离子的注入将产生一个电流，已知该电流与离子浓度成正比（$i = 1.602 \times 10^{-19} \times$ 每秒入射的离子数），其大小可通过让该电流流过一个已知阻值的电阻测量得到，从而得到注入的离子数。如果用 1.000 MΩ 电阻来检测该电流，设计一个电路使得其输出与注入过程中注入硅的总离子数（称为剂量）成正比。

53. 电路如图 7.30 所示，设 $R = 0.5$ MΩ，$C = 2$ μF，$R_i = \infty$ 和 $R_o = 0$。假定期望的输出为 $v_{out} = \cos 10t - 1$ V，如果(a) $A = 2000$ 和(b) A 为无穷大，分别求出 $v_s(t)$。

54. 在一个旋转的轮子中有一个速率传感器，设计一个电路，使其输出一个正电压，电压的幅度等于轮子的加速度（即转动次数/分钟）。假定速率传感器的输出为 1 mV/rpm，轮子转速小于 3500 rpm。

55. (a) 电路如图 7.72 所示，交换电阻和电感的位置，推导用 v_s 表示的 v_{out} 的表达式。(b)解释该电路通常不能在实际中应用的原因。

56. 将一个曝光表接到一个相机上来产生与入射的光照强度成正比的输出，并有 1 mV = 1 mcd（毫堪）。设计一个电路，使其输出电压与总强度成正比，并且 1 V = 1 mcd · s。

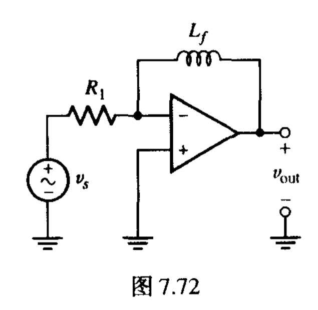


图 7.72

57. 制造玻璃的过程要求冷却速率不超过100°C/min。可获得与当前玻璃融化温度成正比的电压，并且在 500°C~2000°C 范围内有 1 mV = 1°C。设计一个电路，该电路的输出电压表示冷却速率，要求有 1 V = 100°C/min。

58. 一个浮力传感器安装在油箱中，用于测量剩余油料。该传感器指标为 1 V = 10 L。设计一个电路，该电路的输出电压反映油料消耗速率，读数用 L/s 表示，要求 1 V = 1 L/s。

59. 对一个电池进行检测以确定它能够传递给某 1 Ω 负载的能量。可以得到两种信号：电池电压平方的电压信号（1 mV = 1 V^2）以及表示流出电池的电流平方的电压信号（1 mV = 1 A^2）。设计一个电路，该电路的输出电压与电池提供的总能量成正比，要求 1 mV = 1 J。

60. 飞机的测试工程师想监视飞机着陆时的减速度，因为他们关心轮子悬挂系统能经历多大的压力。如果他们能够提供从前轮得到的一个电压信号，并有 1 mV = 1 mph，要求设计一个电路，该电路的输出电压与减速度成正比（要求 1 V = 1 km/s^2）。

7.6 对偶

61. (a) 画出图 7.69 所示电路的完全对偶电路，并确定对偶的变量和对偶的初始条件；(b) 列出对偶电路的节点方程；(c) 列出对偶电路的网孔方程。

62. 画出图 7.51 所示电路的完全对偶电路，以整洁的形式画出，即画图时使用方的转折角，使用明显的参考节点，并且图中不存在交叉线。

63. 以整洁的形式画出图 7.73 所示电路的完全对偶电路。

64. (a) 画出习题 47 所示电路的完全对偶电路，包括各个变量；(b) 写出习题 47 的对偶表述；(c)求解用对偶语言表述后的习题 47。

65. 求出图 7.74 所示电路的对偶电路，并求出用 i_s 表示的 i_{out} 的表达式。（提示：利用运放的详细模型。）

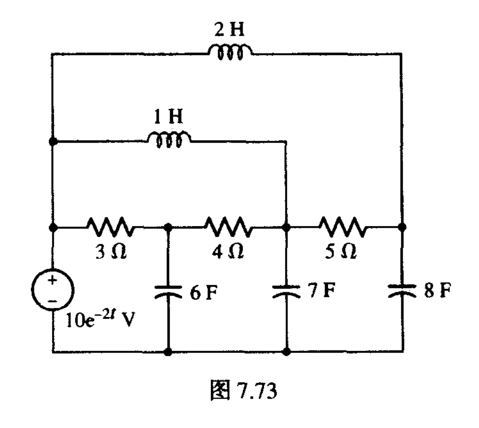


图 7.73

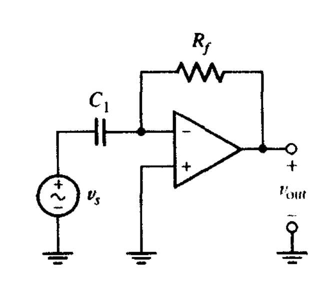


图 7.74

7.7 用 PSpice 对电容和电感建模

66. 计算图 7.75 所示电感储存的能量。用 PSpice 对结果进行验证，并提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。

67. 计算图 7.76 所示电感储存的能量。用 PSpice 对结果进行验证，并提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。



图 7.75　　　　图 7.76

68. 计算图 7.77 所示电容储存的能量。用 PSpice 对结果进行验证，并提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。

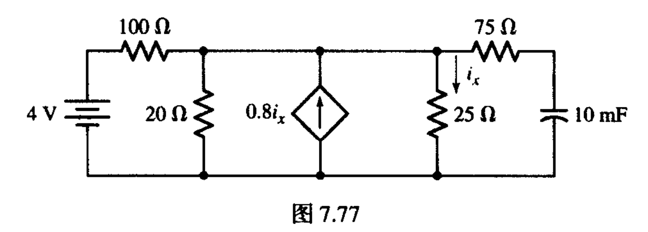


图 7.77

69. 计算图 7.78 所示电容储存的能量。用 PSpice 对结果进行验证，并提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。

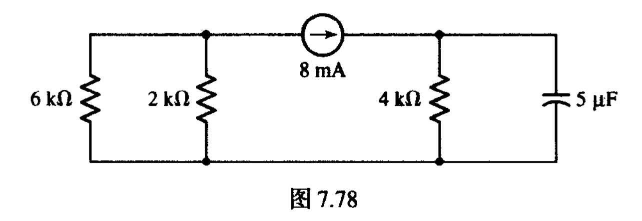


图 7.78

70. 对于图 7.31 所示的运放微分器，设 $C_1 = 5$ nF, $R_f = 100$ MΩ。(a) 如果 $v_s(t) = 3\sin 10t$ V，预测输出；(b) 用 PSpice 对结果进行验证，并提交一份正确标注的原理图以及仿真结果。

71. 用 PSpice 验证当 33 μF 电容接 $v(t) = 5\cos 75t$ V 的电压源时，在 $t = 10^{-2}$ s 时电容储存的能量为 221 μJ（提示：利用组件 VSIN）。

72. 用 PSpice 验证当 100 pH 电感接 $i(t) = 5\cos 75t$ A 的电流源时，在 $t = 0.01$ s 时电感储存的能量为 669 pJ（提示：利用组件 ISIN）。

73. 对于图 7.72 所示电路，如果 $v_s = A\cos 2\pi\, 10^3 t$ V，选择 R_1 和 L_f，使输出等于输入电压导数的两倍。利用 PSpice 验证设计结果。

74. 将习题 7.71 中的 $v(t)$ 改为 $v(t) = 5\cos 75t - 7$ V，重做该题。

75. 将习题 7.72 中的 $i(t)$ 改为 $i(t) = 5\cos 75t - 7$ A，重做该题。

第8章　基本*RL*和*RC*电路

主要概念

- *RL*和*RC*时间常数
- 自由响应和受迫响应
- 计算直流激励下随时间变化的响应
- 如何确定初始条件及其对电路响应的影响
- 阶跃函数输入和包含开关的电路分析
- 利用单位阶跃函数构造脉冲函数
- 连续开关电路的响应

引言

第7章给出了针对同时包含电感和电容的几种电路的描述电路响应的方程，但并没有对其中的任何一个进行求解。下面对只含有电阻和电容或者只含有电阻和电感的简单电路进行求解。

尽管将要考虑的电路形式是非常基本的，但它们具有重要的实用价值。这种形式的网络应用于电子放大器、自动控制系统、运算放大器、通信设备和许多其他应用中。熟悉这种电路能够使我们估算出放大器的输出对快速变化的输入的跟随精度，或者可以估算出当电动机的场电流变化时电动机响应速度的快慢。理解了基本*RL*和*RC*电路后，还可以对放大器或者电动机做一些调整以得到所需的响应。

8.1　无源*RL*电路

包含电感或/和电容的电路分析与描述该电路的微积分方程的建立和求解有关。我们把这种特殊的方程称为齐次线性微分方程，它的每一项都是因变量或因变量导数的一次项。如果得到了因变量的一个表达式，而且该式满足微分方程，同时还满足电容或电感在指定时刻（通常为$t=0$时）的能量分布，那么就得到了该方程的一个解。

该微分方程的解表示电路的一个响应，它有很多名称。因为这个响应取决于电路的固有特性（元件的类型、大小、元件的相互连接），因此通常称为自由响应。但是任何一个实际构造的电路不可能永久储存能量，与电感和电容相关的固有电阻最终会把所有储存的能量转换成热量。由于最终响应会消失，所以通常将其称为瞬态响应。最后，还应该熟悉数学上的一些术语，在数学上称齐次线性微分方程的解为通解（余函数）。

当考虑独立电源作用于电路时，响应的一部分特性类似于采用的电源（激励函数）的特性，这部分响应称为特解、稳态响应或受迫响应，无源电路产生的自由响应作为对该受迫响应的补充，因此电路的完全响应就是特解和通解之和，换句话说，是自由响应和受迫响应之和。无源响应也可称为自然响应、瞬态响应、自由响应或通解，但是因为它更多地描述了系统本身的特性，因此通常称为自由响应。

下面介绍几种不同的方法来求解这些微分方程。然而数学处理不等于电路分析。我们最感兴趣的是答案本身、它们的含义以及对其的解释。后面还将试图熟悉响应的各种形式，这样对于新的电路，仅通过一般思考就可以写出其响应形式。尽管当简单的方法失效时必须采用更复杂的分析方法，但在这种情况下，训练有素的直觉仍然是一种很有价值的能力。

说明： 在一个无源电路中讨论时变电流看起来有些奇怪！要记住的是：这里仅知道 $t=0$ 时刻的电流值，并不知道该时刻以前的电流值；同样，也不知道 $t=0$ 时刻前电路所处的状态。而且，为了使得电流存在，必须在某个时刻存在某个电源，但是这里并不知道这些情况。幸运的是，在分析电路时并不需要知道这些情况。

我们通过如图 8.1 所示的简单串联 RL 电路来介绍瞬态分析。设时变电流为 $i(t)$，将 $t=0$ 时刻的 $i(t)$ 值表示为 I_0，即 $i(0)=I_0$。因此，

$$Ri + v_L = Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

或者

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

我们的目标是得到 $i(t)$ 的表达式，它既要满足该方程，又要满足 $t=0$ 时该表达式的值为 I_0。有几种不同的方法可以求解。

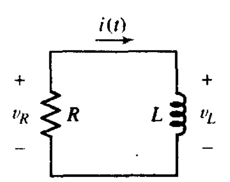


图 8.1 一个串联 RL 电路，要求求解 $i(t)$，满足初始条件 $i(0)=I_0$

直接方法

直接求解该微分方程的方法包含两个步骤：首先以变量分离的形式写出方程，然后对方程两边进行积分。式[1]中的变量为 i 和 t，显然该方程可以乘以 dt，除以 i，然后再重新写成变量分离的形式：

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \qquad [2]$$

因为 $t=0$ 时刻电流为 I_0，t 时刻电流为 $i(t)$，于是在方程两边用相应的积分限进行积分，并令这两个定积分相等：

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt'$$

积分后得到

$$\ln i'\Big|_{I_0}^{i} = -\frac{R}{L}t'\Big|_0^t$$

因此，

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}(t-0)$$

进行简单操作可以得到电流 $i(t)$为

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \tag{3}$$

下面来检查该结果，首先将式[3]代入式[1]得到恒等式 $0 = 0$，然后将 $t = 0$ 代入式[3]得到 $i(0) = I_0$。这两步都是必需的，求得的解必须满足描述该电路的微分方程，也必须满足初始条件。

例题 8.1　如果图 8.2 所示的电感电流在 $t = 0$ 时 $i_L = 2$ A，求 $i_L(t)$在 $t > 0$ 时的表达式以及 $t = 200$ μs 时的值。

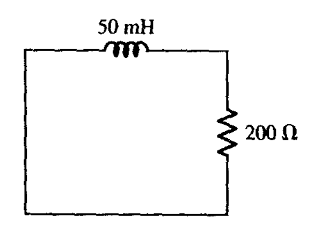


图 8.2　一个简单 RL 电路，$t = 0$ 时刻电感中储存着能量

解：该电路与刚才考虑的电路类型相同，所以电感电流具有如下形式：

$$i_L(t) = I_0 e^{-R/L^t}$$

其中，$R = 200$ Ω, $L = 50$ mH，I_0 为 $t = 0$ 时刻流过电感的初始电流。因此，

$$i_L(t) = 2e^{-4000t}$$

将 $t = 200 \times 10^{-6}$ s 代入，求得 $i_L(t) = 898.7$ mA，小于初始值的一半。

练习

8.1　电路如图 8.3 所示，已知 $i_R(0) = 6$ A，求 $t = 1$ ns 时刻流过电阻的电流 i_R。

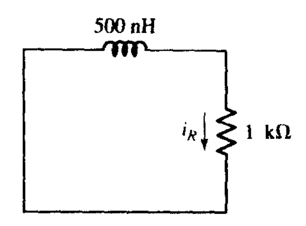


图 8.3　练习 8.1 的电路图

答案：812 mA。

另一种方法

对刚才的方法稍做改变也可以求出解。对式[2]进行变量分离后，可以得到方程两边的不定积分，其右边含有一个积分常数：

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt + K$$

可以得到

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + K \tag{4}$$

不能通过将式[4]代入原来的微分方程（见式[1]）得到常数 K，这样只能得到 $0=0$ 的恒等式，因为对于任何 K 值，式[4]是式[1]的一个解（自行证明）。选择的积分常数必须满足初始条件 $i(0)=I_0$。因此，当 $t=0$ 时，式[4]为

$$\ln I_0 = K$$

将这个 K 值代入式[4]得到响应为

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

或

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

该结果与前面所述相同。

更一般的求解方法

当变量分离时，这两种方法都可以使用，但是并不总是处于这种情况。下面我们将使用一种非常有效的方法，它能否成功应用取决于我们的直觉和经验。首先假设相应的解具有某种形式，然后进行验证，首先将解代入微分方程，然后应用给定的初始条件进行验证。因为我们不能够假设解的精确数值表达式，因此假设的解将包含一些未知常量，通过选择这些常量可使相应的解同时满足微分方程和初始条件。在电路分析中遇到的许多微分方程的解可以用指数函数或几个指数函数之和来表示。假设式[1]的解具有如下的指数形式：

$$i(t) = A e^{s_1 t} \qquad [5]$$

其中，A 和 s_1 是待定常数。将该假定解代入式[1]：

$$A s_1 e^{s_1 t} + A\frac{R}{L}e^{s_1 t} = 0$$

或

$$\left(s_1 + \frac{R}{L}\right) A e^{s_1 t} = 0 \qquad [6]$$

要使以上方程在所有时刻均成立，必然有 $A=0$，或 $s_1=-\infty$，或 $s_1=-R/L$。但是如果取 $A=0$ 或者 $s_1=-\infty$，那么任何响应均为零，这不能作为所求问题的解，因此必须选取：

$$s_1 = -\frac{R}{L} \qquad [7]$$

这样假定的解具有下面的形式：

$$i(t) = A e^{-Rt/L}$$

剩下的常数必须通过应用初始条件 $i(0)=I_0$ 来确定。因此，$A=I_0$，假定解的最后形式为

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

图 8.4 为该基本方法的一个小结。

实际上，可以采用更直接的过程。得到式[7]后求解：

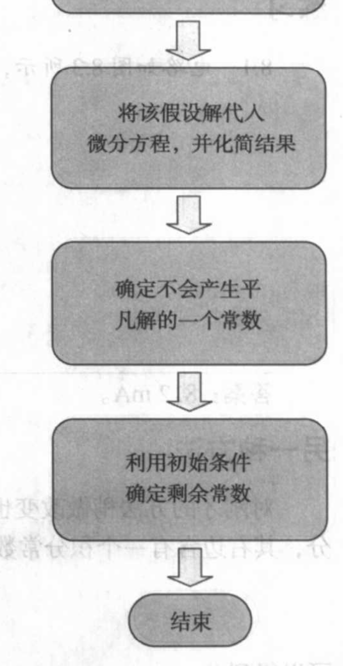


图 8.4　求解一阶微分方程的一般方法流程图，基于经验来假定解的形式

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \qquad [8]$$

该方程称为特征方程。可以直接从微分方程得到特征方程，不需要将假定解代入方程。考虑一般的一阶微分方程：

$$a\frac{df}{dt} + bf = 0$$

其中，a 和 b 是常数。我们用 s^1 替代 df/dt，s^0 替代 f，得到

$$a\frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

从该式可以直接得到特征方程：

$$as + b = 0$$

它有单根 $s = -b/a$。那么微分方程的解为

$$f = Ae^{-bt/a}$$

该过程可以很容易地扩展到二阶微分方程，这将在第 9 章中讨论。

例题 8.2 电路如图 8.5(a)所示，求 $t = 200$ ms 时电压 v 的值。

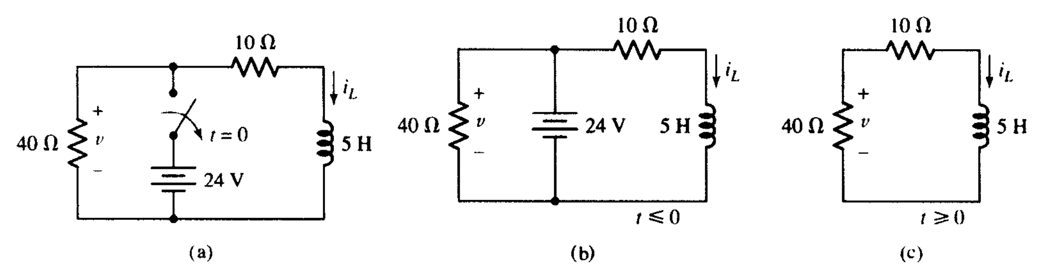


图 8.5 (a) 一个简单 RL 电路，其中开关在 $t = 0$ 时打开；(b) $t = 0$ 以前电路的存在形式；(c) 开关打开后的电路，24 V 电源已被移走

解： ▶ **明确题目的要求**

图 8.5(a)所示的原理图实际上表示两个不同的电路：一个是开关闭合时的电路［见图 8.5(b)］，另一个是开关打开时的电路［见图 8.5(c)］。要求解的是图 8.5(c)所示电路的 $v(0.2)$。

▶ **收集已知信息**

我们需要首先验证这两个电路是否已正确地重画和标注。接下来假设图8.5(b)所示的电路运行了很长时间，这样电路中任何瞬态响应均已消失。除非明确说明，否则我们可能在这些例子中都做这样的假定。

▶ **设计方案**

通过写出 KVL 方程来分析图 8.5(c)所示的电路。最终希望最后可以得到只有 v 和 t 变量的微分方程，可能需要额外的方程和一些替代运算。然后可以求解微分方程而得到 $v(t)$。

▶ **建立一组合适的方程组**

参考图 8.5(c)，写出

$$-v + 10i_L + 5\frac{di_L}{dt} = 0$$

将 $i_L = -v/40$ 代入，求得

$$\frac{5}{40}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{10}{40} + 1\right)v = 0$$

或者更简单的方程

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \qquad [9]$$

▶ 确定是否还需要其他信息

从前面的过程可知，写出 v 的完整表达式需要知道它在特定时刻的信息，最方便的就是选择 $t = 0$ 时刻。通过观察图 8.5(b)所示的电路，得到 $v(0) = 24$ V，但这只在开关打开之前成立。在开关打开的时刻，电阻电压可以变为任何值，但电感电流必须保持不变。

在图 8.5(b)所示的电路中，$i_L = 24/10 = 2.4$ A，因为对于直流电流而言电感相当于短路，因此，在图 8.5(c)中，$i_L(0) = 2.4$ A，从而可求得 $v(0) = (40)(-2.4) = -96$ V。

▶ 尝试求解

前面所述的 3 种基本方法都可以使用。根据经验，首先写出式[9]的特征方程为

$$s + 10 = 0$$

求解可得 $s = -10$，因此，

$$v(t) = Ae^{-10t} \qquad [10]$$

（代入式[9]左边，得到

$$-10Ae^{-10t} + 10Ae^{-10t} = 0$$

结果同预期的一样）。

在式[10]中，令 $t = 0$，利用 $v(0) = -96$ V 求解 A，因此，

$$v(t) = -96e^{-10t} \qquad [11]$$

从而得到 $v(0.2) = -12.99$ V，低于最大电压 -96 V。

▶ 验证结果是否合理或是否与预计结果相同

也可以把图 8.5(c)所示电路中的电感看成是 50 Ω 的电阻来求解电感电流，因此只要时间常数 $\tau = 50/5 = 10$ s。再利用 $i_L(0) = 2.4$ A，可以写出

$$i_L(t) = 2.4e^{-10t}\ \text{A},\ t > 0$$

根据欧姆定理，$v(t) = -40i_L(t) = -96e^{-10t}$，该式与式[11]相同。电感电流和电阻电压有相同的指数项并不是巧合。

练习

8.2 求图 8.6 所示电路中 $t > 0$ 时的电感电压 v。

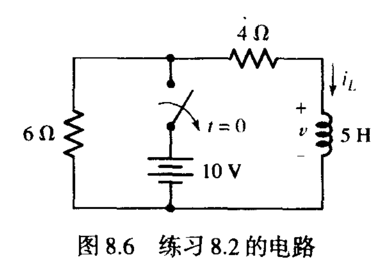


图8.6　练习8.2的电路

答案：$-25e^{-2t}$ V。

计算能量

在解释响应之前，参考图8.1所示的电路，检查功率和能量的关系。电阻中消耗的功率为

$$p_R = i^2R = I_0^2Re^{-2Rt/L}$$

通过对瞬时功率进行从0时刻到无穷时刻的积分得到电阻上转换为热量的总能量为

$$w_R = \int_0^{\infty} p_R\,dt = I_0^2R\int_0^{\infty} e^{-2Rt/L}\,dt$$

$$= I_0^2R\left(\frac{-L}{2R}\right)e^{-2Rt/L}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}L\,I_0^2$$

这是预计的结果，因为最初储存在电感中的能量为$\frac{1}{2}L\,I_0^2$，而在无穷时刻因为电流最终为0，从而导致电感中不再储存能量，因此所有初始能量都被电阻消耗了。

8.2　指数响应特性

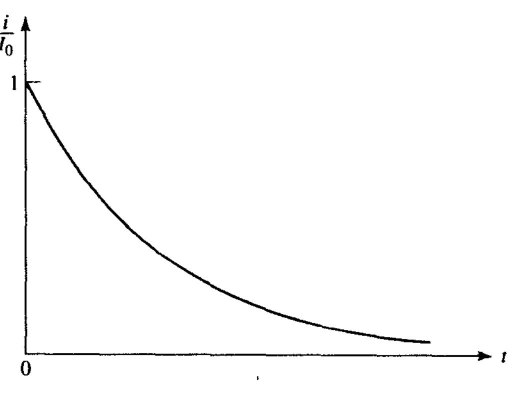


图8.7　$e^{-Rt/L}$对时间t的曲线

现在考虑串联RL电路响应的本质。已知电感电流可表示为

$$i(t) = I_0e^{-Rt/L}$$

在$t = 0$时刻，电流值为I_0，但随着时间的增加，电流逐步减小并趋于零。该电流$i(t)/I_0$对时间t的指数衰减曲线如图8.7所示。因为画出的函数为$e^{-Rt/L}$，所以只要R/L保持不变，那么该曲线也保持不变。因此，对于具有相同R/L或L/R比值的电路必定有相同的曲线。下面来观察该比值对曲线形状的影响。

如果将L与R的比例加倍，那么只有当t也加倍时，该指数才保持不变。换句话说，原来各时刻的响应将在以后的时刻产生，新的响应曲线可以通过将原来曲线中的每个点都向右移动两倍而得到。当L/R变大时，电流衰减到小于初始值的某个特定值所需要的时间将加大。这时人们可能会认为曲线的“宽度”加倍了，或者说曲线“宽度”与L/R成正比。但是，不难发现我们很难给曲线定义“宽度”，因为每条曲线都是从$t = 0$一直延伸到无穷大，然而可以考虑电流按初始速率衰减至零所需要的时间。

衰减的初始速率可以通过计算$t = 0$时刻的导数得到：

$$\left.\frac{d}{dt}\frac{i}{I_0}\right|_{t=0} = -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}\bigg|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

假设衰减速率为常数，用希腊字母 τ 来表示 i/I_0 由单位值衰减到零所用的时间，即

$$\left(\frac{R}{L}\right)\tau = 1$$

或

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad [12]$$

L/R 的单位为秒（s），因此指数 $-Rt/L$ 必定是无量纲的。τ 称为时间常数，如图 8.8 所示。串联 RL 电路的时间常数可以在响应曲线上得到：只需画出曲线在 $t=0$ 时刻的切线，该切线与时间轴的交点即表示时间常数。这通常是从示波器上估计时间常数的一个简便方法。

通过确定 $i(t)/I_0$ 在 $t=\tau$ 时刻的值可以得到 τ 的另一种重要的解释：

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \qquad \text{或} \qquad i(\tau) = 0.3679 I_0$$

可见，经过一个 τ 的时间，响应下降为初始值的 36.8%，因此从这个方面也可以确定 τ 的值，如图 8.9 所示。很容易测量一个 τ 的时间间隔内电流的衰减，使用计算器或者通过查看复指数表可知，$t=\tau$ 时 $i(t)/I_0$ 的值为 0.3679，$t=2\tau$ 时为 0.1353，$t=3\tau$ 时为 0.049 79，$t=4\tau$ 时为 0.018 32，$t=5\tau$ 时为 0.006 738。从时刻零开始经过 3~5 个时间常数后，可以认为此时的电流值与其初始值相比可以忽略。因此，如果要问："电流需要多长时间衰减到零？"则可以这样回答："大约在 5 个时间常数后。"此时的电流比其初始值的 1% 还要小。

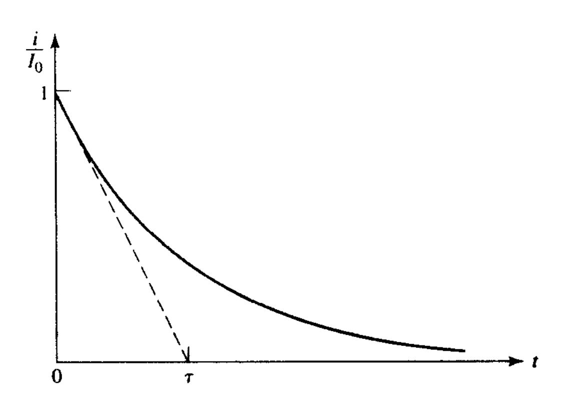


图 8.8 串联 RL 电路的时间常数 τ 等于 L/R。如果保持最初衰减速率不变，那么 τ 就是响应曲线衰减到零所需要的时间

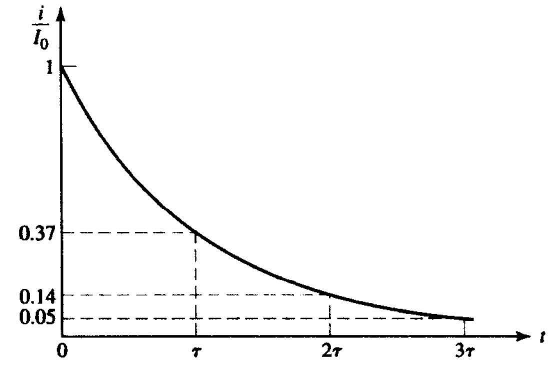


图 8.9 串联 RL 电路中的电流在 $t=\tau$，$t=2\tau$ 和 $t=3\tau$ 时分别下降到初始值的 37%，14% 和 5%

练习

8.3 在一个无源串联 RL 电路中，求下列比值：(a) $i(2\tau)/i(\tau)$；(b) $i(0.5\tau)/i(0)$；(c) t/τ，假定 $i(t)/i(0) = 0.2$；(d) t/τ，假定 $i(0) - i(t) = i(0)\ln 2$。

答案：0.368；0.607；1.609；1.181。

计算机辅助分析

当考虑无源电路的响应时，PSpice的瞬态分析非常有用。本例题将使用PSpice的一个特殊功能来更改仿真时各元件的参数，类似于在仿真时改变直流电压。这可以通过在原理图中加入PARAM元件来实现，而且可以将PARAM元件放置在原理图的任何地方，因为不需要将其连接到电路中。图8.10画出了完整的*RL*仿真电路图，其中初始电感电流为1 mA。

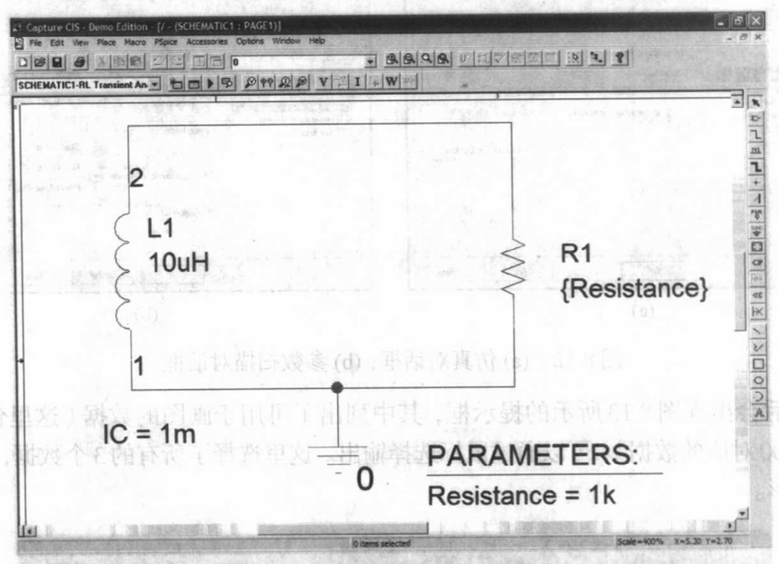


图8.10 利用原理图捕获工具画出的简单*RL*电路

为了将电阻值与仿真的扫描参数建立联系，必须完成3个任务。首先，必须给参数取一个名字，为清晰起见，这里取名为“Resistance”。这可以通过双击标注在图中的PARAMETERS来完成，它会打开编辑这个伪器件的编辑器。点击New Column得到图8.11(a)所示的对话框，在其中的Name下输入Resistance，在Value下输入1k。第二个任务包含：将R1的值与参数扫描关联，这通过双击电路图中R1的默认值完成，并可以得到图8.11(b)所示的对话框。在Value下，简单地输入{Resistance}即可。（注意必须有圆括号。）

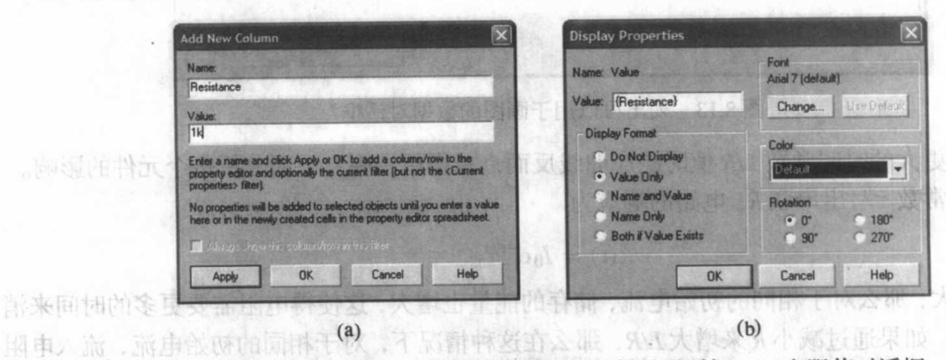
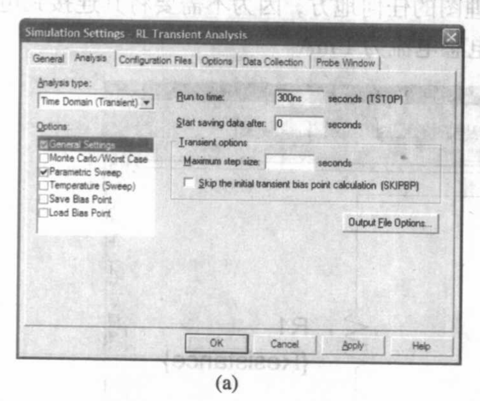


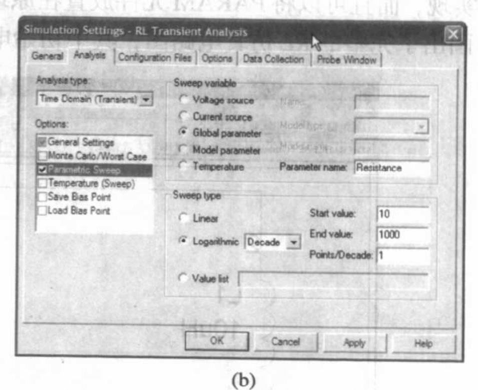
图8.11 (a)在PARAM属性编辑器中增加新的对话框；(b)电阻值对话框

第3个任务包含仿真设置，包括设置瞬态分析参数以及我们希望的R1值。在PSpice下，选择New Simulation Profile［见图8.12(a)］，对于Analysis type选择Time Domain(Transient)，Run to

time 设为 300 ns，在 Options 下选择 Parametric Sweep box。上面最后一步得到图 8.12(b)所示的对话框，其中 Sweep variable 选择 Global parameter，并在 Parameter name 中输入 Resistance。最后一步设置是在 Sweep type 下选择 Logarithmic，Start value 设为 10，End value 设为 1000，以及 1 Points/Decade；利用 Value list 还可以列出需要的电阻阻值。



(a)



(b)

图 8.12 (a) 仿真对话框；(b) 参数扫描对话框

仿真结束后会出现图 8.13 所示的提示框，其中列出了可用于画图的数据（这里包括 Resistance = 10，100 和 1000 对应的数据）。可以通过鼠标选择输出。这里选择了所有的 3 个数据，得到如图 8.14 所示的输出图形。

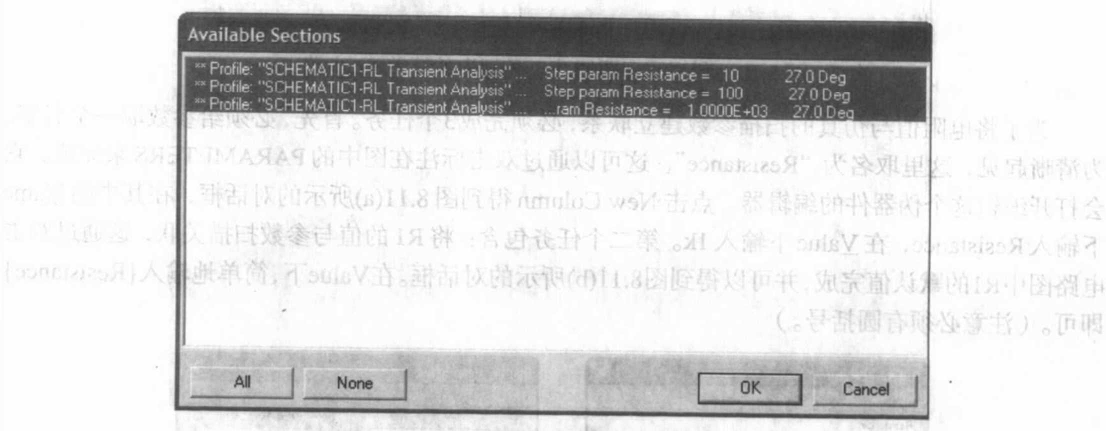


图 8.13 列出可以用于画图的数据对话框

为何具有更大的时间常数 L/R 值时响应曲线反而衰减得更慢呢？下面分析每个元件的影响。利用时间常数 τ 写出串联 RL 电路的响应为

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

如果 L 增大，那么对于相同的初始电流，储存的能量也增大，这使得电阻需要更多的时间来消耗增大的能量。如果通过减小 R 来增大 L/R，那么在这种情况下，对于相同的初始电流，流入电阻的功率将变小，因此需要更多的时间来消耗储存的能量。这个影响可以在图 8.14 所示的仿真结果中清楚地看到。

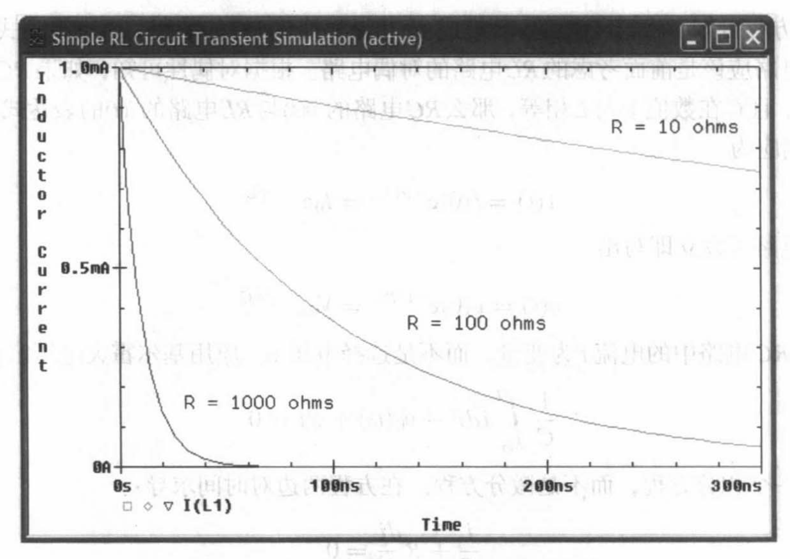


图 8.14　3 个电阻阻值情况下的输出波形

8.3　无源 *RC* 电路

基于电阻电容组合的电路比电阻电感电路更常见。主要原因是实际电容损耗更小，价格更低，器件的实际工作特性与它们的简单数学模型符合得更好，而且尺寸更小，重量更轻，这两点对集成电路来说尤为重要。

现在来分析如图 8.15 所示并联（或者说串联）*RC* 电路的分析与相应的 *RL* 电路的分析的相似之处。假定储存在电容上的初始能量由下式表示：

$$v(0) = V_0$$

图 8.15　一个并联 *RC* 电路，需要确定 $v(t)$，初始条件为 $v(0) = V_0$

离开电路上面节点的总电流必定为 0，因此可以写出

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

除以 *C* 得到

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \qquad [13]$$

与式[1]相比，式[13]有类似的形式：

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad [1]$$

对比以上两个方程可知，将式[1]中的i替换成v，L/R替换成RC的乘积，可以得到式[13]。那么现在分析的RC电路应该是前面考虑的RL电路的对偶电路。根据对偶性可知，如果RC电路与RL电路的电阻相同，且C在数值上与L相等，那么RC电路的$v(t)$与RL电路的$i(t)$的表达式完全相同，因此RL电路的响应为

$$i(t) = i(0)\mathrm{e}^{-Rt/L} = I_0\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

因此对于RC电路可以立即写出

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-t/RC} = V_0\mathrm{e}^{-t/RC} \qquad [14]$$

假定选择RC电路中的电流i为变量，而不是选择电压v。应用基尔霍夫电压定律可得

$$\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' - v_0(t_0) + Ri = 0$$

我们得到的是一个积分方程，而不是微分方程。在方程两边对时间求导：

$$\frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \qquad [15]$$

并将i替换为v/R，再次得到式[13]：

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

式[15]可以作为前面讨论的出发点，但这样不能体现对偶原理的作用。

现在讨论式[14]表示的RC电路的电压响应的物理本质。在$t=0$时刻得到正确的初始条件，随着时间趋于无穷大，电压变为零。该结果与我们的想法一致：如果电容两端有任何电压存在，那么能量将持续地流入电阻并以热量的形式被电阻耗尽，因此，最终的电压值必然等于零。RC电路的时间常数可以使用对偶性得到，既可以根据RL电路的时间常数的表达式来求得，也可以根据响应经过一个时间常数后下降到其初始值的37%来得到：

$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

因此，

$$\tau = RC \qquad [16]$$

由于对负指数函数和时间常数的含义非常清楚，因此很容易画出如图8.16所示的响应曲线。R或C越大，时间常数就越大，储存的能量被消耗得就更慢。在电阻两端电压固定的情况下，电阻越大其消耗的功率越小，于是需要更长的时间将储存的能量转为热量。在电容两端电压固定的情况下，电容越大其储存的能量就越大，于是也需要更长的时间来消耗初始能量。

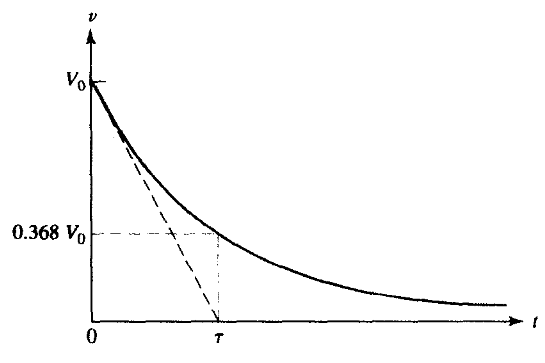


图8.16　并联RC电路中电容电压$v(t)$与时间的函数。$v(t)$的初始值为V_0

例题8.3　对于图8.17(a)所示的电路，求$t = 200\ \mu s$时的电压v。

解： 为了求得电压，需要画出两个电路并加以分析：一个是开关断开之前的电路［见图8.17(b)］，另一个是开关断开之后的电路［见图8.17(c)］。

图 8.17　(a) 简单 *RC* 电路，$t=0$ 时开关打开；(b) $t=0$ 之前存在的电路；(c) 开关断开后的电路，9 V 电源被移走

分析图 8.17(b)所示电路的唯一目的是得到初始电容电压，假定该电路已经处于稳态，完全是一个直流电路。且没有电流流过电容或 4 Ω 电阻，所以，

$$v(0) = 9\ \text{V} \tag{17}$$

接下来分析图 8.17(c)所示的电路，可得

$$\tau = RC = (2+4)(10\times10^{-6}) = 60\times10^{-6}\ \text{s}$$

因此从式[14]可得

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-t/RC} = v(0)\,\mathrm{e}^{-t/60\times10^{-6}} \tag{18}$$

当 $t=0$ 时，两个电路的电容电压必须相同，而其他电压或电流没有这个限制。将式[17]代入式[18]：

$$v(t) = 9\mathrm{e}^{-t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

得到 $v(200\times10^{-6}) = 321.1$ mV（小于最大值的 4%）。

练习

8.4　对于图 8.18 所示的电路，求 $v(0)$ 和 $v(2\ \text{ms})$。

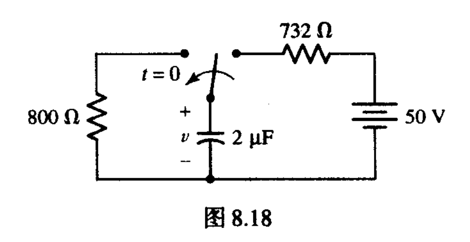


图 8.18

答案：50 V，14.33 V。

8.4　更一般的观察方法

在例题8.2和例题8.3中已经讲到，前面得到的关于串联*RL*电路的结论可以推广到包含一个电感和任意多个电阻的电路，同样，可以将关于*RC*电路的结论推广到包含一个电容和任意多个电阻的电路，甚至可以考虑包含受控源的电路。

一般 *RL* 电路

作为一个例子，考虑如图 8.19 所示的电路。从电感两端看进去的等效电阻为

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

因此时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \tag{19}$$

图 8.19 一个无源电路，包含一个电感和几个电阻，通过确定时间常数 $\tau = L/R_{eq}$ 分析电路

我们注意到如果电路中存在几个电感，并且这些电感可以利用串/并联组合进行合并，那么式[19]可以进一步推广为

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \tag{20}$$

其中，L_{eq} 表示等效电感。

说明：也可以表示成 $\tau = L/R_{TH}$，其中 R_{TH} 为从电感 L 两端看进去的戴维南等效电阻。

极短间隔：0^+ 和 0^- 的区别

下面来考虑图 8.19 所示的电路，假定 $t = 0$ 时刻电感中储存了一定的能量，使得 $i_L(0) \neq 0$。

电感电流为

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau}$$

这表示所谓的基本解。通常还需要求出 i_L 之外的电流或者电压，例如 R_2 上的电流 i_2。对于电路中的电阻部分，总是可以运用基尔霍夫定律和欧姆定律进行分析，不过这里使用分流定理更为方便：

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}[i_L(0)e^{-t/\tau}]$$

有时还可能遇到不知道电感电流而只知道其他电流的情形。因为电阻上的电流可以发生突变，因此通过采用符号 0^+ 来表示在 $t = 0$ 后的瞬间发生的变化。用数学语言来表示：$i_1(0^+)$是 $i_1(t)$从右边趋近于零的极限[①]。因此，如果给定 i_1 的初始值为 $i_1(0^+)$，那么 i_2 的初始值为

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

从这些值可以得到初始值 $i_L(0)$为

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1(0^+)$$

对于 i_2，表达式变为

① 注意，这只是为了标注方便。当在方程中遇到 $t = 0^+$ 和 $t = 0^-$ 时，它们都是指 0 时刻。该标注可以来区分事情发生前后时刻的差别，如开关打开或闭合、电源打开或关闭。

$$i_2 = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

说明：注意，$i_L(0^+)$总是等于$i_L(0^-)$。但对于电感电压、任何电阻上的电流和电压来说，这并不一定成立，因为它们在$t=0$时刻会发生变化。

下面来看一看是否可以直接得到最后一个表达式。因为电感电流以$e^{-t/\tau}$指数衰减，所以电路中的每个电流必定都具有这个函数形式。通过将电感电流看成电源电流并把它加到电阻网络中可使其变得很明了。电阻网络中每个电流和电压都具有相同的时间依赖性，因此可以将i_2表示为

$$i_2 = Ae^{-t/\tau}$$

其中，

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

A必须通过i_2的初始值来确定。因为$i_1(0^+)$已知，R_1和R_2两端的电压已知，并且，

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

因此可得

$$i_2(0^+) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}$$

因此，

$$i_2(t) = i_1(0^+)\frac{R_1}{R_2}e^{-t/\tau}$$

对于许多问题，可以采用类似的求解步骤快速求解。首先判断出响应对于时间的依赖关系为指数衰减形式，然后通过对电阻进行合并来确定电路的时间常数，接下来可以写出解的形式，幅度待定，最后由给定的初始条件确定这个待定的幅度，从而完成整个求解过程。

任何包含一个电感和任意多个电阻的电路都可以采用同样的方法进行求解，这种方法也可以运用于包含多个电感和多个电阻的电路，因为可以采用电阻合并和电感合并的方法将这些电路简化为单个电感和单个电阻的形式。

例题8.4 电路如图8.20(a)所示，确定$t>0$时的i_1和i_L。

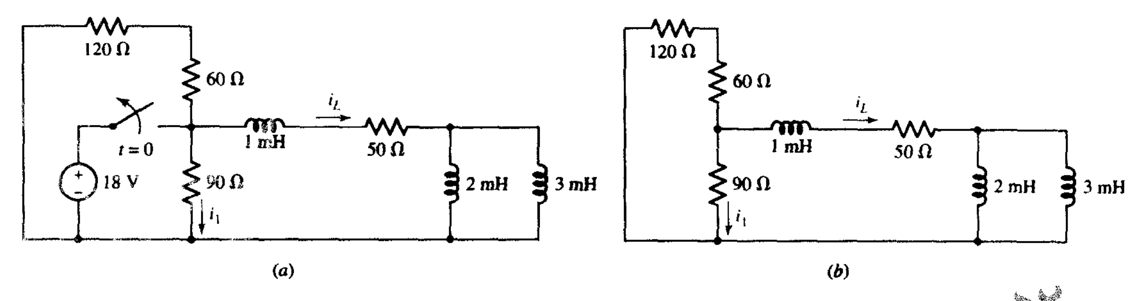


图8.20 (a) 包含多个电阻和电感的电路；(b) $t=0$之后，电路简化成110 Ω等效电阻与$L_{eq}=2.2$ mH等效电感的串联



$t = 0$之后，电源从电路中断开，如图8.20(b)所示，可以很容易求出等效电感为

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

与等效电感串联的等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110\ \Omega$$

时间常数为

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20\ \mu\text{s}$$

因此，自由响应的形式为$Ke^{-50\,000t}$，其中K为未知常量。考虑开关打开之前那个时刻的电路（$t = 0^-$），$i_L = 18/50$ A。因为$i_L(0^+) = i_L(0^-)$，已知在$t = 0^+$时刻$i_L = 18/50$ A或$i_L = 360$ mA，因此，

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA}, & t < 0 \\ 360e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

对于i_1，在$t = 0$时刻没有不能突变的约束，因此它在$t = 0^-$时刻的值（18/90 A或200 mA）与求$t > 0$时的i_1不相关。相反，必须通过$i_L(0^+)$来求解$i_1(0^+)$。利用分流定理可得

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)\frac{120 + 60}{120 + 60 + 90} = -240 \text{ mA}$$

因此，

$$i_1 = \begin{cases} 200 \text{ mA}, & t < 0 \\ -240e^{-50\,000t} \text{ mA}, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

可以利用PSpice和开关模型Sw_tOpen验证上面的分析。对于开关模型来说，实际上它只是两个电阻值：一个对应于在指定时刻打开之前的开关（默认为10 mΩ），另一个对应于打开后的开关（默认值为1 MΩ）。如果剩余电路的等效电阻与这两个值中的任何一个相当，那么必须通过双击电路图中的开关符号来重新设置这两个电阻值。此外还有在指定时刻闭合的开关模型：Sw_tClose。

练习

8.5 电路如图8.21所示，求$t = 0.15$ s时下列各值：(a) i_L; (b) i_1; (c) i_2。

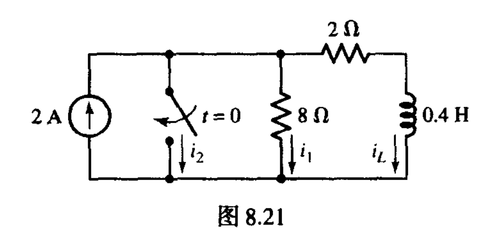


图8.21

答案：0.756 A；0；1.244 A。

我们已经讨论了可以用一个等效电阻与一个等效电感串联等效的任何电路的自由响应的求解过程。实际上，包含几个电阻和几个电感的电路并不能很容易地将其化简成单个等效电感与单个等效电阻串联。在这种情况下，不存在单个负指数项或单个时间常数，而是通常会有若干个负指数项，负指数项的个数等于对电路进行所有可能的电感合并之后剩余的电感数。详细讨论见第9章。

一般 RC 电路

许多我们希望求解自由响应的 RC 电路包含多个电阻和电容。就像对 RL 电路一样，首先考虑给定电路能够化简成只包含一个电阻和一个电容的等效电路的情况。

假定电路包含单个电容，但有多个电阻。电容两端的电阻网络可以用一个等效电阻来替换，我们可以写出电容电压的表达式。在这种情况下，电路的时间常数为

$$\tau = R_{eq}C$$

其中，R_{eq} 为网络的等效电阻。R_{eq} 实际上是从电容两端看进去的戴维南等效电阻。

如果电路包含多个电容，而且可以利用串并联组合把这些电容替换为一个等效电容 C_{eq}，那么电路的有效时间常数为

$$\tau = RC_{eq}$$

更一般的情况是

$$\tau = R_{eq}C_{eq}$$

需要指出的是，能够用一个等效电容替换的并联电容必须具有相同的初始条件。

例题 8.5　电路如图 8.22(a)所示，如果 $v(0^-) = V_0$，求 $v(0^+)$和 $i_1(0^+)$。

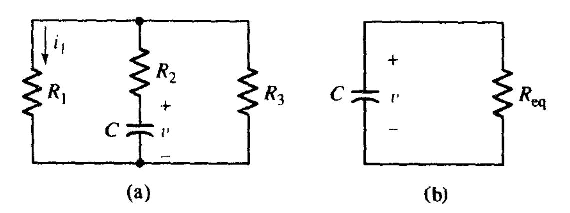


图 8.22　(a)包含一个电容和几个电阻的给定电路；(b) 多个电阻被一个等效电阻替换，时间常数为 $\tau = R_{eq}C$

解：首先将图 8.22(a)简化成图 8.22(b)，可以写出

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

其中，

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \qquad 和 \qquad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

每个电流和电压必须具有 $Ae^{-t/R_{eq}C}$ 的形式，其中 A 为电流或电压的初始值。例如 R_1 上的电流可以表示为

$$i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$$

其中，

$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\right)C$$

$i_1(0^+)$需要根据初始条件来确定。在 $t = 0^+$ 时刻电路中的电流必须由电容提供。因为 v 不能突变，因此 $v(0^+) = v(0^-) = V_0$，而且

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1 R_3/(R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

练习

8.6 电路如图 8.23 所示，求 v_C 和 v_o 的值，t 分别为：(a) 0^-；(b) 0^+；(c) 1.3 ms。

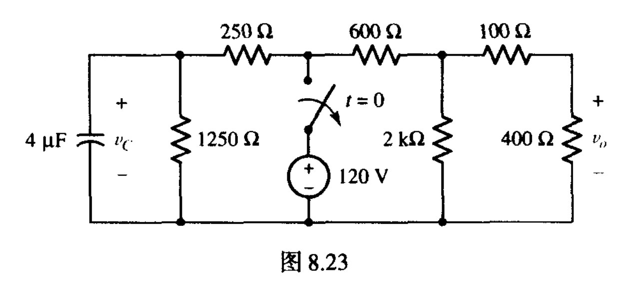


图 8.23

答案：100 V，38.4 V；100 V，25.6 V；59.5 V，15.22 V。

上述方法也可以应用到包含一个储能元件和一个或多个受控源的电路。在这种情况下，可以写出合适的KCL或KVL方程以及一些必要的方程。从这些方程提取出一个微分方程，从而得到特征方程并求出时间常数。或者，可以首先求出与电感或电容两端相连的网络的戴维南等效电阻，利用它来计算 *RL* 或 *RC* 时间常数，除非受控源的控制变量是储能元件的电压或电流，此时不能应用戴维南定理。下面的例子将对此情况进行讨论。

例题 8.6 电路如图 8.24(a)所示，如果 $v_C(0^-) = 2$ V，求 $t > 0$ 时的电压 v_C。

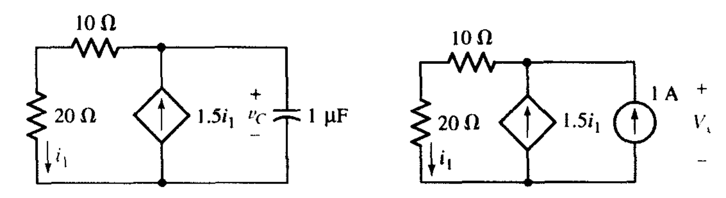


图 8.24 (a) 一个简单 *RC* 电路，包含一个不受电容电压或电流控制的受控源；(b)求解与电容相连网络的等效电阻的电路

解：受控源不受电容电压或电流控制，因此可以通过求解电容左边网络的戴维南等效电路开始分析。接上一个 1 A 的参考电源，如图 8.24(b)所示：

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

其中，

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right)\frac{20}{10+20}V_x = \frac{V_x}{30}$$

进行一些代数运算，求得 $V_x = -60$ V，该网络的戴维南等效电阻为 −60 Ω（不常见，但在处理受控源时还是可能出现的）。因此该电路具有负的时间常数：

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60\ \mu\text{s}$$

因而电容电压为

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V}$$

其中，$A = v_C(0^-) = v_C(0^+) = 2$ V，因此

$$v_C(t) = 2e^{t/60\times10^{-6}}\ \text{V} \qquad [21]$$

非常有趣的是它并不稳定：它随时间呈指数增长。它不能连续工作，电路中的部分元件最终将失效。

另一种方法是写出图 8.24(a)所示电路上面节点的 KCL 方程：

$$v_C = 30\left(1.5i_1 - 10^{-6}\frac{dv_C}{dt}\right) \tag{22}$$

其中，

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \tag{23}$$

将式[23]代入式[22]，并进行代数运算，可得

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60 \times 10^{-6}}v_C = 0$$

其特征方程为

$$s - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} = 0$$

因此，

$$s = \frac{1}{60 \times 10^{-6}}$$

所以，

$$v_C(t) = Ae^{t/60\times 10^{-6}}\ \text{V}$$

该式与前面的结果相同。将 $A = v_C(0^+) = 2$ V 代入得到式[21]，即 $t > 0$ 时电容电压的表达式。

练习

8.7 (a) 考虑如图 8.25 所示电路，如果 $v_C(0^-) = 11$ V，确定 $t > 0$ 时的电压 $v_C(t)$。(b)电路是否稳定？

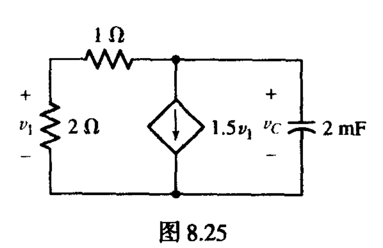


图 8.25

答案：(a) $v_C(t) = 11e^{-2\times 10^3 t/3}$ V, $t > 0$; (b)稳定电路，随时间呈指数衰减而不是增长。

一些同时包含多个电阻和多个电容的电路可以化简为仅包含单个电阻和单个电容的等效电路，但这要求原来的电路可以划分为两部分：一部分包含所有的电阻，另一部分包含所有的电容，而且这两部分仅通过两根理想导线相连接。不过，通常情况下并不总是能够进行这样的化简，所以需要用多个时间常数来描述包含多个电阻和多个电容的电路。

需要留心的是试图将某些理想元件直接相连的情况。例如，如果试图将 $t = 0$ 以前具有不同电压的两个理想电容串接起来，则在使用理想电容模型时将会产生问题。不过，实际电容都具有一定的电阻，能量可以通过它们被损耗。

8.5 单位阶跃函数

前面已经介绍了不包含电源或激励函数的RL和RC电路的响应。我们把这个响应称为自由响应，因为它的形式只取决于电路本身。得到响应的原因在于电路中电感或电容元件储存了初始能量。在某些情况下，会遇到包含电源和开关的电路，在 $t = 0$ 时刻执行特定的开关操作可移去电路中的所有电源，而电路中储存有一定的能量。换句话说，前面解决的是能源在瞬间从电路移走后的问题，现在必须考虑能源在瞬间接入电路时产生的响应类型。

这里将重点讨论在突然加上的能源是直流电源时会产生什么样的响应。因为每个电子器件都必须接上电源才能工作，并且因为大多数器件在其生命周期中会被多次打开和关闭，因此我们的研究适用于许多实际情况。即使现在只限于直流电源，但这些简单的例子却可以描述许多实际设备的工作情况。例如，下面要分析的第一个电路可以描述直流电动机启动时电流的建立过程。在微处理器中，采用方波电压脉冲来表示数或者命令，在其他许多电子和晶体管电路中，也可以找到产生和应用方波电压脉冲的例子。在电视接收机中的同步和扫描电路中，以及在使用脉冲调制的通信系统、雷达系统和许多其他应用中也都存在类似的电路。

前面已经提到过能源的“突然接入”，此时我们指在0时刻突然接入[①]。因此，与电池串联的开关的闭合等效于一个激励函数，它在开关闭合前为零，而在闭合瞬间之后等于电池电压。这种激励函数在开关闭合时刻有一个跳变或者说不连续。这种具有不连续导数的激励函数称为奇异函数，两种最重要的奇异函数是单位阶跃函数和单位脉冲函数。

单位阶跃函数定义为时间的函数，时间小于零时其值为0，而时间大于零时其值为1。如果以 $(t - t_0)$ 作为参数，用符号 u 来表示单位阶跃函数，那么对所有小于 t_0 的 t 值，$u(t - t_0)$ 必然为0；对所有大于 t_0 的其他 t 值必然为1；而在 $t = t_0$ 处，$u(t - t_0)$ 从0跳变到1，它在 $t = t_0$ 时的值没有定义，但是对任意接近 $t = t_0$ 的时刻其值都是已知的，通常用 $u(t_0^-) = 0$ 和 $u(t_0^+) = 1$ 来表示。单位阶跃激励函数可以用下式简洁地定义为

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

图8.26是该函数的图形表示。注意，在 $t = t_0$ 时刻是一条单位长度的垂直线。尽管该垂直线严格来说不是定义的一部分，但通常在每个图形中都会给出。

注意，单位阶跃函数不一定必须是时间的函数，例如可以用 $u(x - x_0)$ 来表示一个单位阶跃函数，其中的 x 可能是以米为单位的长度或者频率等。

在电路分析中通常将不连续或开关操作发生的瞬间时刻定义为 $t = 0$。由于 $t_0 = 0$，因此用 $u(t - 0)$ 表示相应的单位阶跃函数，或更简单地表示为 $u(t)$。如图8.27所示。即，

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

单位阶跃函数本身是无量纲的。如果希望用它表示一个电压，那么 $u(t - t_0)$ 必须乘以一个常数电压，如5 V。因此 $v(t) = 5u(t - 0.2)$ V表示一个理想电压源，该电压源在 $t = 0.2$ s之前为0，而在 $t = 0.2$ s之后为5 V。图8.28(a)所示的是这样一个电源被连接到一般网络中的情况。

① 这句话的含义是它的接入不需要时间。当然这在物理上是不可能的，但是如果事件发生的时间与描述该电路工作情况的其他时间相比非常短时，它近似正确，而且便于数学描述。

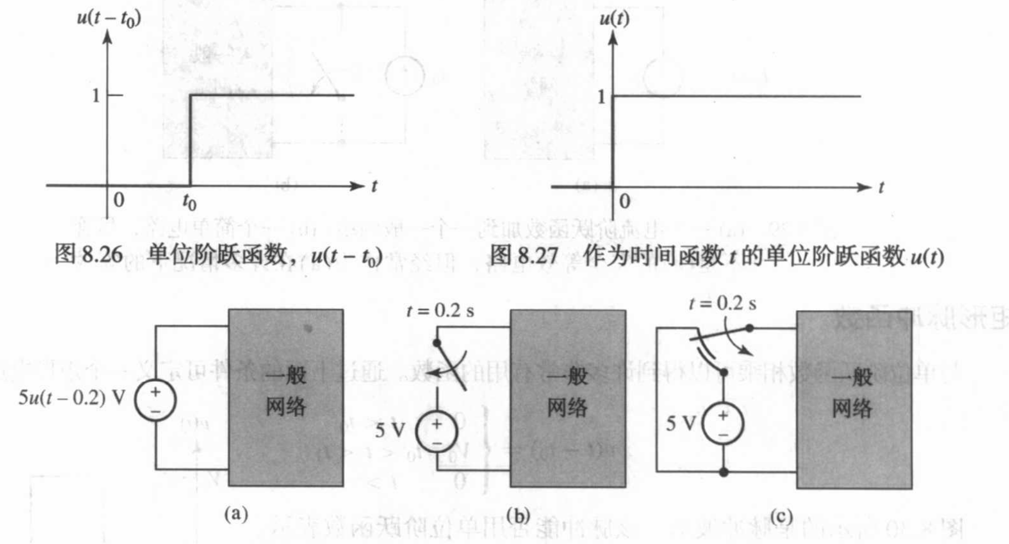


图 8.26　单位阶跃函数，$u(t - t_0)$

图 8.27　作为时间函数 t 的单位阶跃函数 $u(t)$

图 8.28　(a) 一个电压阶跃函数作为驱动一般网络的电源；(b) 一个简单电路，尽管不是(a)的完全等效电路，但可以作为(a)在某些情况下的等效；(c) (a)的完全等效电路

实际电源和单位阶跃函数

读者很自然地会问，与这些不连续的激励函数相等效的物理电源是什么？这里的等效指的是两个网络的电压－电流特性相同。对于图 8.28(a)中的阶跃电压源，电压－电流特性非常简单：在 $t = 0.2$ s之前电压为0，而在 $t = 0.2$ s之后电压为5 V，在这两个时间段内的电流可以为任意有限值。第一个可能想到的是如图 8.28(b)所示的等效电路，即5 V直流电源与一个在 $t = 0.2$ s时闭合的开关相串联的形式。但是该网络在 $t < 0.2$ s时不等效，因为在这个时间段内，电池和开关两端的电压完全未知，该等效电源为开路，其两端的电压可以是任意值。在 $t = 0.2$ s之后，网络等效，如果只对这段时间感兴趣，并且在 $t = 0.2$ s时刻从两个网络中流出的初始电流相同，那么图 8.28(b)是图 8.28(a)的一个有用的等效。

为了得到与电压阶跃激励函数完全等效的电路，可以使用一个单刀双掷开关。在 $t = 0.2$ s 前，使用该开关可保证这个一般网络输入端的电压为零。在 $t = 0.2$ s 后，开关打到另一端，得到 5 V 的恒定电压输入。在 $t = 0.2$ s 时，电压是不确定的（符合阶跃激励函数的定义），并且电池是短路的（幸运的是，这里只是在处理数学模型）。图 8.28(a)的完全等效网络如图 8.28(c)所示。

图8.29(a)是一个电流阶跃函数驱动一般网络的例子。如果用一个直流电源与一个开关并联网络来替代该电路，则必须意识到这两个电路只有在 $t = t_0$ 时刻以后等效。但是只有在两个电路初始条件相同时，这两个电路在 $t = t_0$ 时刻以后的响应才相同。图 8.29(b)所示的电路隐含地意味着 $t < t_0$ 时电流源两端没有电压。但是图 8.29(a)所示的电路并不是这种情况。只是我们经常交换使用图8.29(a)和图 8.29(b)的电路。完全与图 8.29(a)等效的电路是图 8.28(c)所示电路的对偶，图 8.29(b)所示的完全等效电路单独用电流和电压阶跃函数是不能够构建的①。

① 可以得到等效电路的条件是：在 $t = t_0$ 之前流过开关的电流为已知。

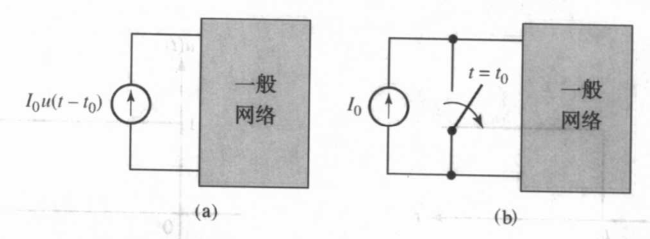


图 8.29 (a) 一个电流阶跃函数加到一个一般网络；(b) 一个简单电路，尽管不是(a)的完全等效电路，但经常作为(a)在许多情况下的等效

矩形脉冲函数

与单位阶跃函数相乘可以得到许多非常有用的函数。通过下面的条件可定义一个矩形电压脉冲：

$$v(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ V_0 & t_0<t<t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases}$$

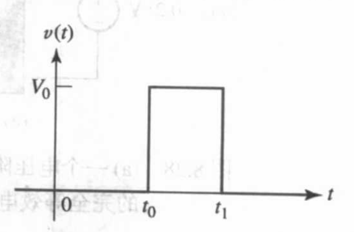


图 8.30 一个有用的激励函数，矩形电压脉冲

图 8.30 所示的是脉冲波形。该脉冲能否用单位阶跃函数表示呢？我们来考虑两个单位阶跃函数的差值：$u(t-t_0)-u(t-t_1)$。这两个阶跃函数如图 8.31(a)所示，它们的差值为一个矩形脉冲。电源 $V_0u(t-t_0)-V_0u(t-t_1)$可以提供如图 8.31(b)所示的电压。

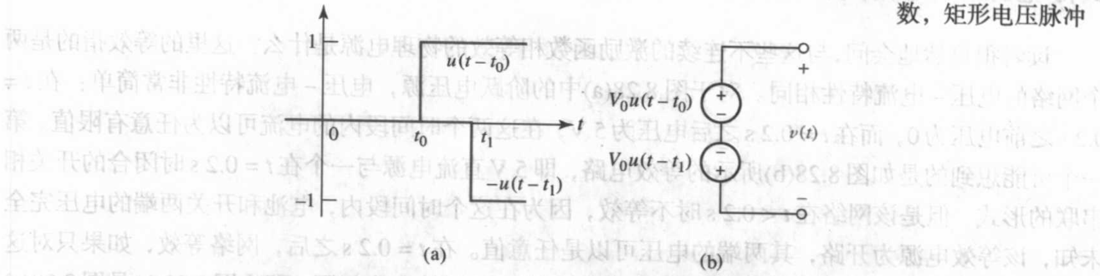


图 8.31 (a) 单位阶跃函数 $u(t-t_0)$和 $-u(t-t_1)$；(b) 一个产生图 8.30 所示矩形脉冲电压的电源

如果在 $t=t_0$ 时刻，网络突然接上一个正弦电压源 $V_m\sin\omega t$，则合适的电压函数为 $v(t)=V_mu(t-t_0)\sin\omega t$。如果要表示对工作在 47 MHz(295 Mrad/s)下的无线遥控小车突然发送能量，则可以用第二个单位阶跃激励函数在 70 ns 后接入，从而将正弦电源关闭①。其电压脉冲可写为

$$v(t)=V_m[u(t-t_0)-u(t-t_0-7\times10^{-8})]\sin(295\times10^6t)$$

该函数如图 8.32 所示。

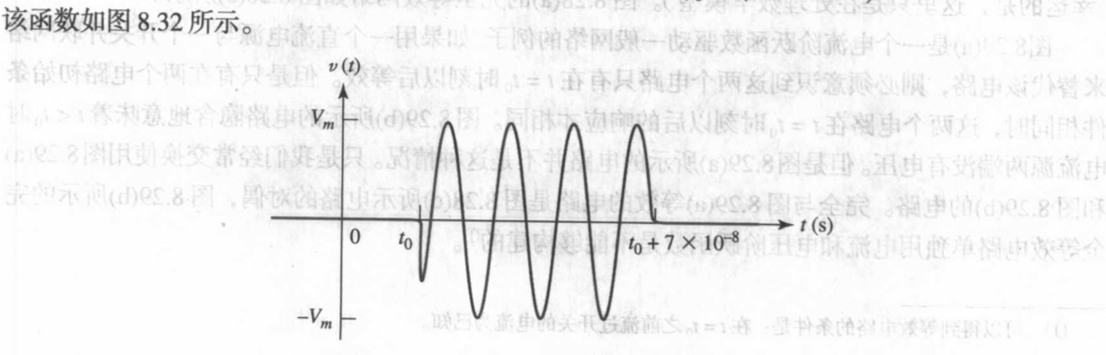


图 8.32 一个 47 MHz 的射频脉冲，用 $v(t)=V_m[u(t-t_0)-u(t-t_0-7\times10^{-8})]\sin(295\times10^{6t})$描述

① 显然，可以很好地控制这辆小车。作用时间是 70 ns。

练习

8.8　求出 $t = 0.8$ 时下面各表达式的值：(a) $3u(t) - 2u(-t) + 0.8u(1 - t)$；(b) $[4u(t)]u(-t)$；(c) $2u(t)\sin \pi t$。

答案：3.8；0；1.176。

8.6　受激 RL 电路

下面分析将直流电源瞬间接入简单网络的情形。电路含有一个电压为 V_0 的电池，它与一个开关、一个电阻 R 和一个电感 L 串联。$t = 0$ 时开关闭合，如图 8.33(a)所示。显然，在 $t = 0$ 之前电流 $i(t)$ 为零，于是可以将电池和开关替换成阶跃电压函数 $V_0u(t)$，它在 $t = 0$ 之前不产生响应。在 $t = 0$ 之后，两个电路相同。因此，可以根据图 8.33(a)所示的电路，或根据图 8.33(b)所示的电路来求解电流 $i(t)$。

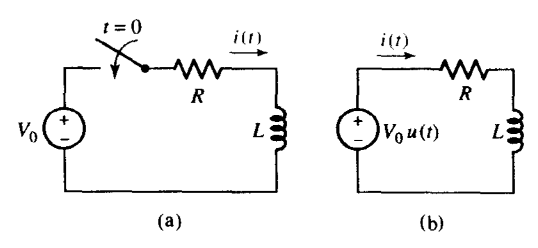


图 8.33　(a) 给定电路；(b) 一个等效电路，对所有时间都产生相同的 $i(t)$ 响应

此时采用下面的方法来求解 $i(t)$。首先写出合适的电路方程，然后进行变量分离并通过积分得到解。当求出解后，可以发现它由两部分组成，通过分析这两部分可以知道它们的物理含义。而当对解的各项物理含义有了更多的理解后，以后对任何电源接入电路的问题就可以采用更快和物理含义更清晰的方法来求解。下面用正规方法来求解。

对图 8.33(b)电路应用基尔霍夫电压定理：

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0u(t)$$

因为单位阶跃函数在 $t = 0$ 时不连续，首先考虑 $t < 0$ 时的解，然后考虑 $t > 0$ 时的解。因为从 $t = -\infty$ 到 $t < 0$ 的范围内激励为零，所以此时的响应必然也为零，因此，

$$i(t) = 0 \qquad t < 0$$

但是对于大于 0 的时间段，$u(t)$ 为 1，因此必须求解下面的方程：

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \qquad t > 0$$

经过几步代数运算，将变量分离，可得

$$\frac{L\,di}{V_0 - Ri} = dt$$

直接对两边积分：

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k$$

为了计算k，必须使用初始条件。在$t=0$之前，$i(t)$为0，因此$i(0^-)=0$。又因为电感中的电流不能在零时间区间内改变，所以$i(0^+)=0$。令$t=0$时$i=0$，因此得到

$$-\frac{L}{R}\ln V_0=k$$

从而可得

$$-\frac{L}{R}[\ln(V_0-Ri)-\ln V_0]=t$$

重新排列可得

$$\frac{V_0-Ri}{V_0}=\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

或

$$i=\frac{V_0}{R}-\frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-Rt/L}\qquad t>0 \tag{24}$$

因此，对所有时间有效的响应的表达式为

$$i=\left(\frac{V_0}{R}-\frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-Rt/L}\right)u(t) \tag{25}$$

更直接的过程

这是我们需要的解，但却不是通过最简单的方法得到的。为了建立一个更直接的过程，我们来解释式[25]中的两项。指数项是RL电路自由响应的函数形式，它为负指数，随着时间的增加衰减到零，由时间常数L/R来表示。这部分响应的函数形式与无源电路得到的形式相同。但是这个指数项的幅度取决于电源电压V_0。因此可以得到结论，响应将由两部分组成，其中第一部分的函数形式与无源电路的响应形式相同，但幅度取决于激励函数。那么另外一部分呢？

式[25]还包含一个常数项——V_0/R。为什么会出现该常数项呢？答案很简单：随着能量逐渐被消耗，自由响应趋向于零，但是总响应不会趋向于零。电路最后表现为一个电阻、一个电感和一个电池的串联。因为对于直流，电感相当于短路，此时流过的唯一电流为V_0/R。这个电流是由激励函数直接贡献的，我们称它为受迫响应，是开关闭合很长时间后存在的响应。

完全响应包含两部分：自由响应和受迫响应。自由响应是电路本身的特性，与电源无关，其形式可以通过分析无源电路得到，幅度取决于电源初始幅度和储存的初始能量。受迫响应有激励函数的特性，可以通过求解所有开关都已完成操作（打开或闭合）很长时间的电路得到。因为现在只考虑了开关和直流电源，因此受迫响应只是一个简单直流电路问题的解。

例题8.7 对于图8.34所示的电路，求$t=\infty, 3^-, 3^+$和100 μs时，电源值改变后的$i(t)$。

解： 所有瞬态都已经消失后（$t\to\infty$），电路是一个由12 V电压源驱动的简单直流电路。电感相当于短路：

$$i(\infty)=\frac{12}{1000}=12\ \text{mA}$$

图8.34 一个简单RL电路，由一个电压阶跃函数驱动

$i(3^-)$是什么意思呢？这只是一个记号，便于表示电压源值变化前的瞬时时刻。$t<3$时，$u(t-3)=0$。因此，$i(3^-)=0$。

在$t=3^+$时刻，激励函数$12u(t-3)=12$ V。但是，因为电感电流不能在0时间间隔内发生变化，因此$i(3^+)=i(3^-)=0$。

分析$t>3$ s时的电路的最直接方法是将式[25]写成

$$i(t')=\left(\frac{V_0}{R}-\frac{V_0}{R}e^{-Rt'/L}\right)u(t')$$

注意，该方程同样适用于该电路，如果将时间轴变换为

$$t'=t-3$$

那么，由于已知$V_0/R=12$ mA，$R/L=20\,000\ \mathrm{s^{-1}}$，因此，

$$i(t-3)=\left(12-12e^{-20\,000(t-3)}\right)u(t-3)\ \mathrm{mA} \qquad [26]$$

上式可以写成更简单的形式：

$$i(t)=\left(12-12e^{-20\,000(t-3)}\right)u(t-3)\ \mathrm{mA} \qquad [27]$$

因为单位阶跃函数在$t<3$时为0。将$t=3.0001$ s代入式[26]或式[27]，可求得在100 μs时，电源值发生变化后，$i=10.38$ mA。

练习

8.9 电压源$60-40u(t)$ V与一个10 Ω电阻以及一个50 mH电感串联。求t为下列值时电感电流和电压的幅度,(a) 0^-; (b) 0^+; (c) ∞; (d) 3 ms。

答案：6 A，0 V；6 A，40 V；2 A，0 V；4.20 A，22.0 V。

培养直觉理解

将完全响应分为自由响应和受迫响应的原因可以从物理上进行分析。前面已经讲到电路最终必然表现为受迫响应，但是操作（打开或闭合）开关的瞬间，电感的初始电流（或者RC电路中电容两端的初始电压）的值取决于储存在这些元件中的能量，所以这些电流或者电压与受迫响应决定的电流或电压大小不一样，因此两者之间必然存在一个过渡阶段，在这个过渡阶段，电压或者电流从给定的初始值过渡到由激励源确定的最终值。在完全响应表达式中，体现这个从初值到终值的过渡过程的部分称为自由响应（通常也称为暂态响应）。如果要以这些术语来描述简单无源RL电路的响应，那么可以说受迫响应为零，自由响应可以看成由储存的能量决定的初始响应与零受迫响应之间的过渡。

以上的讨论仅对那些自由响应最终会消失的电路才正确。对于每个元件都具有一定电阻的实际电路，这通常是正确的，不过也有例外，比如许多“病态”电路，它们的自由响应在时间趋于无穷大时并不会消失。比如由一串电感组成的环形电路中的电流，或者一串电容中的各电容电压。

8.7 自由响应和受迫响应

考虑完全响应由受迫响应和自由响应两部分组成也有数学上的原因。主要是因为任何线性微分方程的解都可以表示为两部分之和：通解（自由响应）和特解（受迫响应）。这里不去深入研究一般的微分方程理论，只考虑前面各节中遇到的微分方程的一般形式：

$$\frac{di}{dt}+Pi=Q$$

或

$$di + Pi\,dt = Q\,dt \qquad [28]$$

将Q看成激励函数，并将其表示成$Q(t)$来强调它是一个时间函数。假定P为正的常数可以简化讨论。后面还将假设Q是一个常数，从而可以将其限制为直流激励函数。

任何基础微分方程的标准教材中都会讲到，如果式[28]两边乘以一个合适的积分因子，那么两边均为某个函数的微分形式，直接积分就可以得到方程的解。我们不进行变量分离，而只是将它们重新排列成可以直接进行积分的形式。对于该方程，积分因子为$e^{\int P\,dt}$或e^{Pt}，因为P是常数。方程两边乘以这个积分因子可得

$$e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt = Qe^{Pt}\,dt \qquad [29]$$

左边是ie^{Pt}的微分：

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt}\,di + iPe^{Pt}\,dt$$

因此式[29]可以简化为

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt}\,dt$$

对两边进行积分可得

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt}\,dt + A$$

其中，A为积分常数。乘以e^{-Pt}可得$i(t)$的解为

$$i = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}\,dt + Ae^{-Pt} \qquad [30]$$

如果激励函数$Q(t)$已知，那么通过计算积分可以得到$i(t)$的函数形式。这里并不计算出每个积分，而是利用式[30]来得到几个通用的结论。

自由响应

首先注意到，对于无源电路，Q必定为零，并且其解为自由响应：

$$i_n = Ae^{-Pt} \qquad [31]$$

对于只含有电阻、电感和电容的电路，常数P不为负，它的值只取决于无源电路元件①及其在电路中的相互连接。于是，随着时间的无限增大，自由响应将趋于零。简单RL电路必然属于这种情况，因为初始能量将在电阻中逐渐以热能的形式损耗完。另外，还存在P为零的理想电路，在这种电路中自由响应不会消失。

因此可以知道组成完全响应的其中一项有自由响应的形式，其大小取决于（但不总是等于）完全响应的初始值，因此也取决于激励函数的初始值。

受迫响应

接下来可以看出式[30]的第一项取决于激励函数$Q(t)$的函数形式。对于随着时间变为无限大时自由响应消失的那些电路，这一项必然完全描述了自由响应消失后的响应形式，通常称其为受迫响应，也称为稳态响应或者特解。

① 如果电路包含受控源或负电阻，那么P可能为负。

现在只考虑将直流电源突然接入电路的情形，因此 $Q(t)$ 对所有时间都是常数。现在可以计算式[30]中的积分，得到受迫响应为

$$i_f = \frac{Q}{P} \tag{32}$$

完全响应为

$$i(t) = \frac{Q}{P} + A\mathrm{e}^{-Pt} \tag{33}$$

对于 RL 串联电路，Q/P 是常数电流 V_0/P，$1/P$ 是时间常数。可以看到不用计算积分也可以得到受迫响应，因为它是时间在无穷大时的完全响应，且等于电源电压除以串联的电阻值。因此通过观察最终电路可以得到受迫响应。

确定完全响应

下面通过简单 RL 串联电路来解释怎样通过将自由响应和受迫响应相加来确定完全响应。前面已经分析了图8.35所示的电路，但求解过程较长。需要求的响应是电流 $i(t)$，首先将该电流表示成自由响应和受迫响应之和：

$$i = i_n + i_f$$

自由响应的函数形式必定与不加电源时得到的响应相同，因此用短路替换阶跃电压源可得到我们熟悉的 RL 串联电路：

$$i_n = A\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

其中，幅度 A 需要确定，因为初始条件也影响完全响应，所以不能简单地认为 $A = i(0)$。

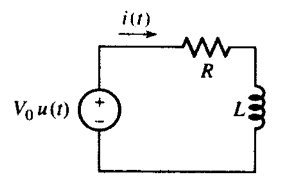


图8.35　一个串联 RL 电路，用于解释如何利用自由响应与受迫响应相加来得到完全响应的方法

接下来考虑受迫响应。在这个特殊的例子中，受迫响应必定为常数，因此在所有大于0的时间内，电源都是常数 V_0。因此，在自由响应消失后，电感两端没有电压，电阻 R 两端电压为 V_0，因此受迫响应简化为

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

注意，受迫响应已经完全确定，不含未知量。接来下合并两个响应可得

$$i = A\mathrm{e}^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

应用初始条件来计算 A。在 $t = 0$ 之前电流为0，并且因为它是流过电感的电流，所以其值不能瞬时变化。这样，该电流在 $t = 0$ 后立即为0，即

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

因此，

$$i = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad [34]$$

仔细观察，发现A不是i的初始值，因为$A = -V_0/R$，而$i(0) = 0$。在考虑无源电路时，我们发现A是响应的初始值。但是当存在激励函数时，必须首先求得响应的初始值，然后将初始值代入完全响应方程中来求解A。

图8.36给出了响应曲线，可以看到电流从初始值0到最终值V_0/R的建立过程。瞬态过程在3τ时间内有效完成。如果该电路表示一个大功率直流电动机的励磁线圈，其可能的参数为$L = 10$ H，$R = 20\ \Omega$，可以求出$\tau = 0.5$ s，因此可以知道励磁电流大约在1.5 s后建立。在经过一个时间常数后，电流大小将达到其终值的63.2%。

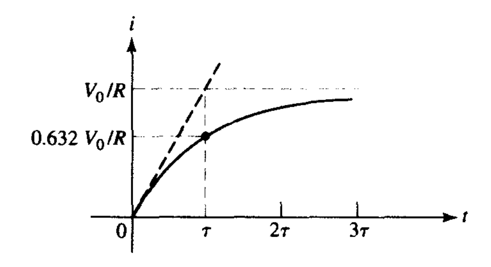


图8.36 流过图8.35所示电路中的电感电流曲线。曲线在初始时刻的切线与常数受迫响应在$t = \tau$处相交

例题8.8 求图8.37所示电路中$i(t)$的表达式。

解： 该电路包含一个直流电压源和一个阶跃电压源。可以用戴维南等效电路来替换电感左边的电路，不过这里只需要知道它等效为一个电阻串联一个电压源即可。该电路只包含一个储能元件——电感。我们首先注意到：

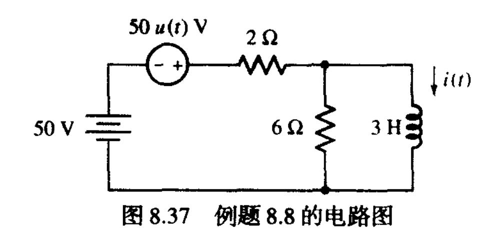


图8.37 例题8.8的电路图

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2\text{ s}$$

由于

$$i = i_f + i_n$$

因此自由响应是一个负指数：

$$i_n = Ke^{-t/2}\text{ A} \qquad t > 0$$

因为激励函数是直流电源，因此受迫响应将为常数电流。对于直流来说，电感相当于短路，即

$$i_f = \frac{100}{2} = 50\text{ A}$$

因此，

$$i = 50 + Ke^{-0.5t} \qquad \text{A} \qquad t > 0$$

为了计算K，必须得到电感电流的初始值。在$t = 0$之前，该电流为25 A，并且不能瞬时变化，因此，

$$25 = 50 + K$$

或

$$K = -25$$

因此，

$$i = 50 - 25e^{-0.5t} \qquad \text{A} \qquad t > 0$$

它和下面的表达式一起构成了完整的解：

$$i = 25\text{ A} \qquad t < 0$$

或者可以将其写成单个表达式：

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t) \qquad A$$

完全响应曲线如图8.38所示。注意自由响应是怎样将$t<0$时的响应与恒定的受迫响应连接起来的。

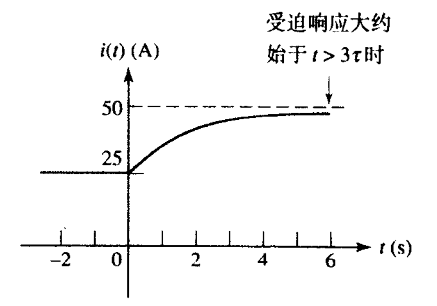


图8.38　图8.37所示电路的响应曲线

练习

8.10　电压源 $v_s = 20u(t)$ V 与 200 Ω 电阻和 4 H 电感串联，求下列时刻电感电流的幅度：(a) 0^-；(b) 0^+；(c) 8 ms；(d) 15 ms。

答案：0；0；33.0 mA；52.8 mA。

作为上面这种求解方法的最后一个例子，即通过观察求得完全响应，重新考虑简单*RL*串联电路，但激励函数是脉冲。

例题 8.9　求简单串联*RL*电路的电流响应，设激励函数为矩形电压脉冲，幅度为V_0，持续时间为t_0。

解：将激励函数表示为两个阶跃电压源$V_0u(t)$和$-V_0u(t-t_0)$之和，如图8.39(a)和图8.39(b)所示，并且利用叠加原理来得到响应。假设$i_1(t)$表示$i(t)$中由上端电压源$V_0u(t)$单独作用产生的响应，$i_2(t)$则表示$-V_0u(t-t_0)$单独作用产生的响应，因此，

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

现在的任务是将两个响应i_1和i_2分别写成自由响应与受迫响应之和。响应$i_1(t)$可以由式[34]给出：

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}), \qquad t > 0$$

注意，该解只当$t>0$时有效，当$t<0$时有$i_1 = 0$。

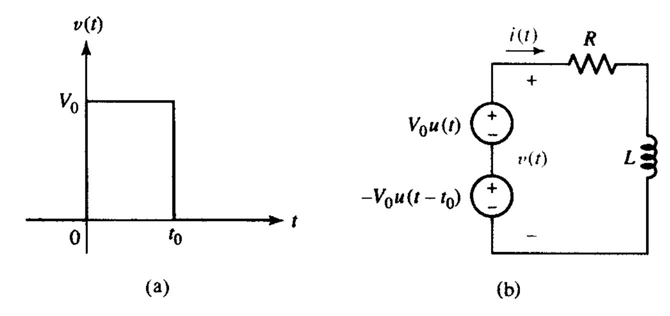


图8.39　(a) 在简单串联*RL*电路中用做激励函数的矩形电压脉冲；(b) 串联*RL*电路，其激励函数由两个独立阶跃电压源的组合表示，求电流$i(t)$

现在来考虑第二个电源及其响应$i_2(t)$。只有电源极性和加入的时间与前一个电源不同。因此没有必要求解它的自由和受迫响应的形式，因为根据解$i_1(t)$可以直接写出：

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R}[1 - e^{-R(t-t_0)/L}] \qquad t > t_0$$

其中，t的有效区间为$t>t_0$，对于$t<t_0$，有$i_2 = 0$。

现在将两个解相加，但必须小心，因为每个解在不同的时间区间内有效，因此，

$$i(t) = 0 \qquad t < 0 \tag{35}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \qquad 0 < t < t_0 \tag{36}$$

以及

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R}(1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \qquad t > t_0$$

或更简洁地表示为

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_0/L} - 1) \qquad t > t_0 \tag{37}$$

尽管式[35]~式[37]完整描述了图8.39(b)所示电路对图8.39(a)所示脉冲波形的响应，但是该电流波形本身对电路时间常数τ和电压脉冲宽度t_0比较敏感。两种可能的曲线如图8.40所示。

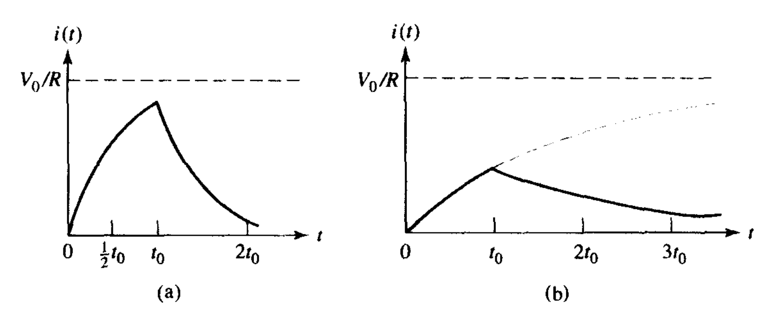


图8.40　图8.39(b)所示电路的两种可能的响应曲线：(a) $\tau = t_0/2$；(b) $\tau = 2t_0$

左边的曲线是时间常数为激励脉冲宽度一半的情形，所以呈指数上升的部分在指数衰减开始之前已基本上达到了V_0/R。右边为相反的情形，即其时间常数为t_0的两倍，于是响应不可能达到最大幅度值。

下面对某个瞬间时刻打开或关闭直流电源后RL电路响应的求解过程做一个总结。假定将所有独立电源置零后，电路可以简化为单个等效电阻R_{eq}与单个电感L_{eq}串联的情形，需要求出的响应用$f(t)$表示。

1. 将所有独立源置零，化简电路得到R_{eq}和L_{eq}，求出时间常数$\tau = L_{eq}/R_{eq}$。
2. 将L_{eq}视为短路，使用直流分析方法求得$i_L(0^-)$，即不连续性发生前的电感电流。
3. 再将L_{eq}视为短路，使用直流分析方法求得受迫响应。这是当$t \to \infty$时$f(t)$趋近的值，将它表示为$f(\infty)$。
4. 将总的响应写成受迫响应与自由响应之和：$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$。
5. 利用条件$i_L(0^+) = i_L(0^-)$求出$f(0^+)$。如果有必要，可以将L_{eq}替换为一个电流源$i_L(0^+)$［如果$i_L(0^+) = 0$则为开路］来计算。除了电感电流（和电容电压）外，电路中的其他电流和电压值可以突变。
6. $f(0^+) = f(\infty) + A$，$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$，或总的响应＝终值＋（初值－终值）$e^{-t/\tau}$。

练习

8.11　考虑如图8.41所示的电路，它在$t = 0$开关打开前已工作了很长时间。求t为下列时刻时i_R的值：(a) 0^-；(b) 0^+；(c) ∞；(d) 1.5 ms。

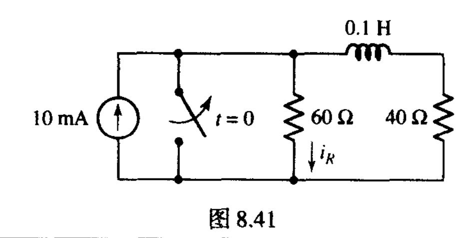


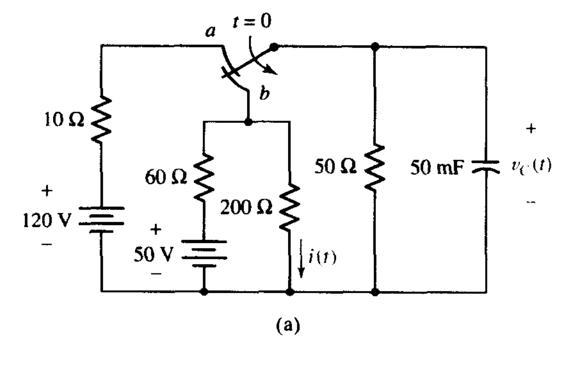
图 8.41

答案：0；10 mA；4 mA；5.34 mA。

8.8 受激 RC 电路

任何 RC 电路的完全响应也可写成自由响应和受迫响应之和。因为该过程与已经讨论的 RL 电路相应过程类似，因此这里最好的方法是通过一些例子来解释。在这些例子中，我们的目标不只是与电容相关的量，还包括与电阻相关的电流。

例题 8.10　电路如图 8.42 所示，求任何时刻电容电压 $v_C(t)$ 和 200 Ω 电阻上的电流 $i(t)$。



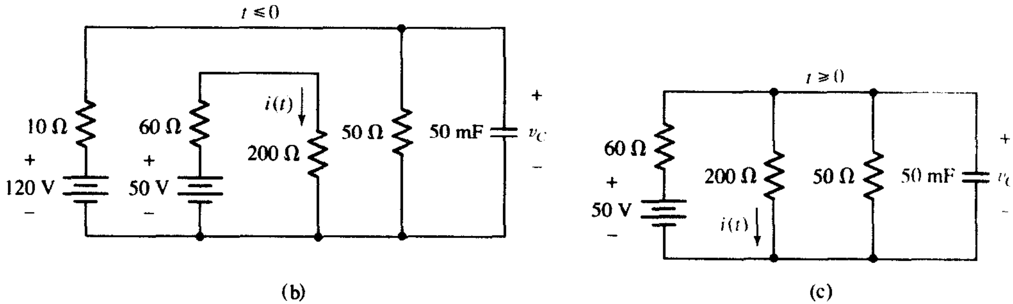


图 8.42　(a) 一个 RC 电路，其中 v_C 和 i 的完全响应等于各自的自由响应和受迫响应之和；(b) $t \leqslant 0$ 时的电路；(c) $t \geqslant 0$ 时的电路

解：首先考虑电路在 $t < 0$ 时的状态，即开关处于位置 a，电路如图 8.42(b)所示。与通常一样，假设不存在瞬态响应，只有 120 V 电源产生的受迫响应与 $v_C(0^-)$ 相关。利用简单的分压规则就可以得到初始电压：

$$v_C(0) = \frac{50}{50+10}(120) = 100\ \text{V}$$

因为电容电压值不能瞬时变化，因此在 $t = 0^-$ 和 $t = 0^+$ 时，该电压相等。

现在将开关转向 b，其完全响应可表示为

$$v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$$

为了方便起见，相应的电路重画于图8.42(c)中。将50 V电源替换为短路线，并通过计算等效电阻求得时间常数（换句话说，求得电容两端看进去的戴维南等效电阻）来写出自由响应的形式。等效电阻为

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{200} + \frac{1}{60}} = 24\ \Omega$$

因此，

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C} = Ae^{-t/1.2}$$

为了计算开关在b时的受迫响应，需要等到所有电压和电流都已经停止变化为止，因此电容相当于开路。再一次使用分压规则：

$$v_{C_f} = 50\left(\frac{200 \parallel 50}{60 + 200 \parallel 50}\right)$$

$$= 50\left(\frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250}\right) = 20\ \text{V}$$

因此，

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2} \qquad \text{V}$$

从已求得的初始条件可得

$$100 = 20 + A$$

或

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} \qquad \text{V} \qquad t \geqslant 0$$

以及

$$v_C = 100\ \text{V} \qquad t < 0$$

图8.43(a)所示的是该响应的波形，由此可再一次看到自由响应是从初始值到最后响应的过渡。

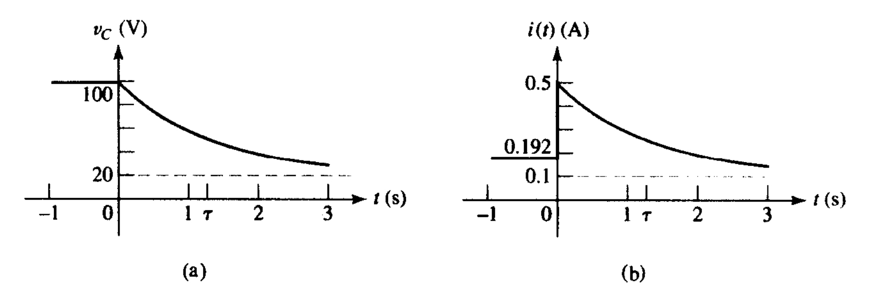


图8.43　图8.42电路中的响应波形：(a) v_C响应；(b) i响应

接下来求解$i(t)$。该响应在开关变换的瞬间不一定保持不变。显然，当处在位置a时，i = 50/260 = 192.3 mA；当处在位置b时，该电流的受迫响应为

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)}\left(\frac{50}{50 + 200}\right) = 0.1\ \text{A}$$

自由响应的形式与前面求得的电容电压自由响应的形式相同：

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

合并受迫响应和自由响应可得

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} \quad \text{A}$$

为了计算 A，需要知道 $i(0^+)$，求解时需要把注意力集中在储能元件（电容）上。在开关转换期间 v_C 必须保持为 100 V，该条件决定了 $t = 0^+$ 时刻其他的电压和电流。因为 $v_C(0^+) = 100$ V，且电容与 200 Ω 电阻并联，因此可求得 $i(0^+) = 0.5$ A，$A = 0.4$ A，由此可得

$$i(t) = 0.1923 \text{ A} \qquad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \quad \text{A} \qquad t > 0$$

或

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{A}$$

其中最后一个表达式对所有的时间 t 都成立。

可以利用 $u(-t)$ 简洁地写出完全响应：当 $t < 0$ 时 $u(-t)$ 为 1，当 $t > 0$ 时 $u(-t)$ 为 0。因此，

$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \quad \text{A}$$

该响应曲线如图8.43(b)所示。我们注意到只需4个参数就可以写出单储能元件电路响应的函数形式或画出图形：开关动作之前的常数（0.1923 A），开关动作后瞬间时刻的值（0.5 A），恒定的受迫响应（0.1 A），以及时间常数（1.2 s）。然后可以很容易地写出或者画出负指数函数。

练习

8.12 对于图 8.44 所示的电路，求 $v_C(t)$ 在 t 等于下列时刻的值：(a) 0^-；(b) 0^+；(c) ∞；(d) 0.08 s。

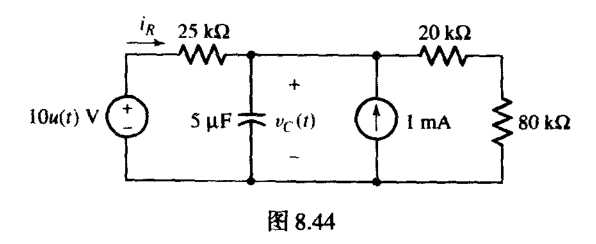


图 8.44

答案：20 V；20 V；28 V；24.4 V。

我们通过列出在 8.7 节结束时的对偶描述进行一个总结。

下面对某个瞬间时刻（例如 $t = 0$ 时）打开或关闭直流电源后 RC 电路响应的求解过程做一个总结。假定将所有独立电源置零后电路可以简化为单个等效电阻 R_{eq} 与单个等效电容 C_{eq} 并联的情形，需要求出的响应用 $f(t)$ 表示。

1. 将所有独立源置零，化简电路得到 R_{eq} 和 C_{eq}，求出时间常数 $\tau = C_{eq}R_{eq}$。
2. 将 C_{eq} 视为开路，使用直流分析方法求得 $v_C(0^-)$，即不连续性发生前的电容电压。
3. 再将 C_{eq} 视为开路，使用直流分析方法求得受迫响应。这是当 $t \to \infty$ 时 $f(t)$ 趋近的值，可将其表示为 $f(\infty)$。
4. 将总的响应写成受迫响应与自由响应之和：$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$。

5. 利用条件 $v_C(0^+) = v_C(0^-)$求出$f(0^+)$。如果有必要，可以将 C_{eq} 替换为一个电压源 $v_C(0^+)$［如果 $v_C(0^+) = 0$，则为短路］来计算。除了电容电压（和电感电流）外，电路中的其他电流和电压值可以突变。

6. $f(0^+) = f(\infty) + A$，$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\,e^{-t/\tau}$，或总的响应 = 终值 +（初值 - 终值）$e^{-t/\tau}$。

从刚才的分析可见，应用于RL电路分析的基本步骤也可以应用于RC电路的分析。到目前为止，我们只考虑直流激励函数电路的分析，尽管式[30]可以是一个更通用的函数，如 $Q(t) = 9\cos(5t - 7^\circ)$ 或者 $Q(t) = 2e^{-5t}$。在结束本节之前，我们探讨一种非直流激励的情况。

例题 8.11 电路如图 8.45 所示，求 $t > 0$ 时 $v(t)$的表达式。

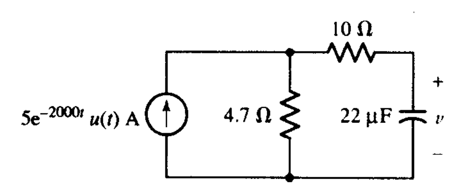


图 8.45 一个简单 RC 电路，被一个指数衰减的激励函数驱动

解：根据经验，完全响应的形式为

$$v(t) = v_f + v_n$$

其中，v_f 类似于激励函数，v_n 的形式为 $Ae^{-t/\tau}$。

那么时间常数τ等于多少呢？我们用开路来替换电源，并求得与电容并联的戴维南等效电阻为

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7\ \Omega$$

因此，时间常数 $\tau = R_{eq}C = 323.4\ \mu s$，或 $1/\tau = 3.092 \times 10^3\ s^{-1}$。

可以用几种不同的方法来求解，但最直接的方法是进行电源变换，我们可以得到一个电压源 $23.5e^{-2000t}\,u(t)$ V 与 14.7 Ω 电阻和 22 μF 电容的串联（注意这里并没有改变时间常数）。

写出 $t > 0$ 时的简单 KVL 方程：

$$23.5e^{-2000t} = (14.7)(22 \times 10^{-6})\frac{dv}{dt} + v$$

重新排列得到

$$\frac{dv}{dt} + 3.092 \times 10^3 v = 72.67 \times 10^3\ e^{-2000t}$$

与式[28]和式[30]比较可以写出完全响应为

$$v(t) = e^{-Pt}\int Qe^{Pt}dt + Ae^{-Pt}$$

其中，$P = 1/\tau = 3.092 \times 10^3$，$Q(t) = 72.67 \times 10^3\ e^{-2000t}$，因此，

$$v(t) = e^{-3092t}\int 72.67 \times 10^3 e^{-2000t}e^{3092t}dt + Ae^{-3092t}\ \text{V}$$

进行积分可得

$$v(t) = 66.55e^{-2000t} + Ae^{-3092t}\ \text{V} \qquad [38]$$

这个唯一的电源由 $t < 0$ 时为零值的阶跃函数控制，从而可知 $v(0^-) = 0$。因为 v 为电容电压，$v(0^+) = v(0^-)$，因此求得初始条件 $v(0) = 0$。将该值代入式[38]求得 $A = -66.55$ V，因此，

$$v(t) = 66.55(e^{-2000t} - e^{-3092t})\ \text{V}, \qquad t > 0$$

练习

8.13 电路如图 8.46 所示，求 $t > 0$ 时的电容电压 v。

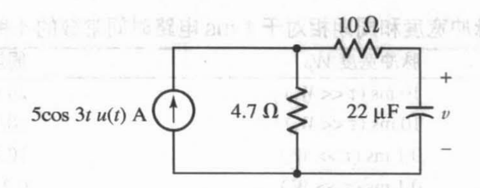


图 8.46　正弦函数激励下的 *RC* 电路

答案： $23.5\cos 3t + 22.8 \times 10^{-3}\sin 3t - 23.5e^{-3092t}$ V。

8.9　连续开关电路的响应预测

在例题 8.9 中，我们简单考虑了一个 *RL* 电路加上脉冲波形后的响应，其中电源先被接入电路，然后又被移出电路。在实际工作中，这种情况非常常见，因为有些电路只会被加电一次（例如，乘客车辆气囊触发电路）。在预测简单 *RL* 和 *RC* 电路受到脉冲或脉冲串（有时称为连续开关电路）激励的响应时，关键因素是电路时间常数与定义脉冲序列的不同时间之间的相对大小。基本分析原理是储能元件是否有时间在脉冲结束之前完全充电，以及是否有时间在下一个脉冲开始之前完全放电。

考虑图 8.47(a)所示的电路，它接入一个脉冲电压源，该电压源采用 7 个独立参数来描述，如图 8.47(b)所示。波形处于 V1 和 V2 之间。从 V1 变化到 V2 所需的时间 t_r 称为上升时间（TR），从 V2 变到 V1 所需的时间 t_f 称为下降时间（TF）。脉冲持续时间 W_p 称为脉冲宽度（PW），波形周期 T（PER）是脉冲重复所需时间。我们注意到 SPICE 允许脉冲串开始之前有一个时间延迟（TD），这对于某些结构的电路很有用，它可以允许初始瞬态响应衰减。

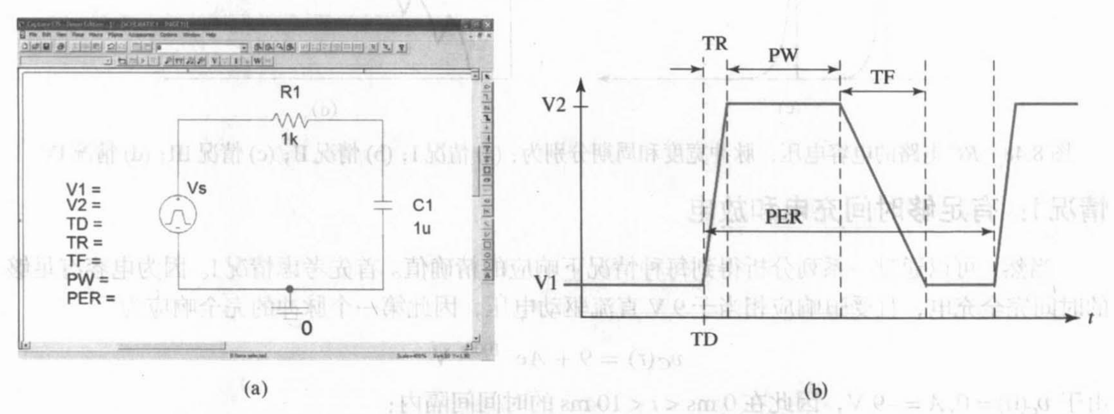


图 8.47　(a) 接有脉冲电压波形的简单 *RC* 原理电路图；(b) SPICE VPULSE 参数定义图

为了便于讨论，设时间延迟为零，V1 = 0，V2 = 9 V。该电路时间常数 $\tau = RC = 1$ ms，从而设上升时间和下降时间为 1 ns。尽管 SPICE 不允许电压在零时间间隔内发生变化（因为它利用离散时间间隔来求解微分方程），但是与时间常数相比，1 ns 可以合理地近似为瞬时。

这里考虑 4 种情况，这 4 种情况被总结在表 8.1 中。前面两种情况中，由于脉冲宽度 W_p 远大于电路时间常数，因此脉冲开始时产生的瞬态在脉冲结束之前就已经消失。后面两种情况则相反：脉冲宽度很小以至于电容在脉冲结束之前没有时间完全放电。当两个脉冲之间的时间间隔（$T - W_p$）大于（情况 II）或小于（情况 III）电路时间常数时，电路响应也具有类似的结果。

表 8.1 脉冲宽度和周期相对于 1 ms 电路时间常数的 4 种不同情况

情况	脉冲宽度 W_P	周期 T
I	10 ms ($\tau << W_p$)	20 ms ($\tau << T - W_p$)
II	10 ms ($\tau << W_p$)	10.1 ms ($\tau >> T - W_p$)
III	0.1 ms ($\tau >> W_p$)	10.1 ms ($\tau << T - W_p$)
IV	0.1 ms ($\tau >> W_p$)	0.2 ms ($\tau >> T - W_p$)

我们在图8.48中画出了每种情况的电路响应，这里可以任意选择电容电压作为感兴趣的变量，因为任何电压和电流都具有相同的时间依赖性。在情况I中，电容有时间完全充电和完全放电［见图 8.48(a)］，在情况 II 中［见图 8.48(b)］，脉冲之间的时间间隔减小，电容不再有足够的时间完全放电。相反，在情况 III［见图 8.48(c)］和情况 IV［见图 8.48(d)］中，电容没有时间完全充电。

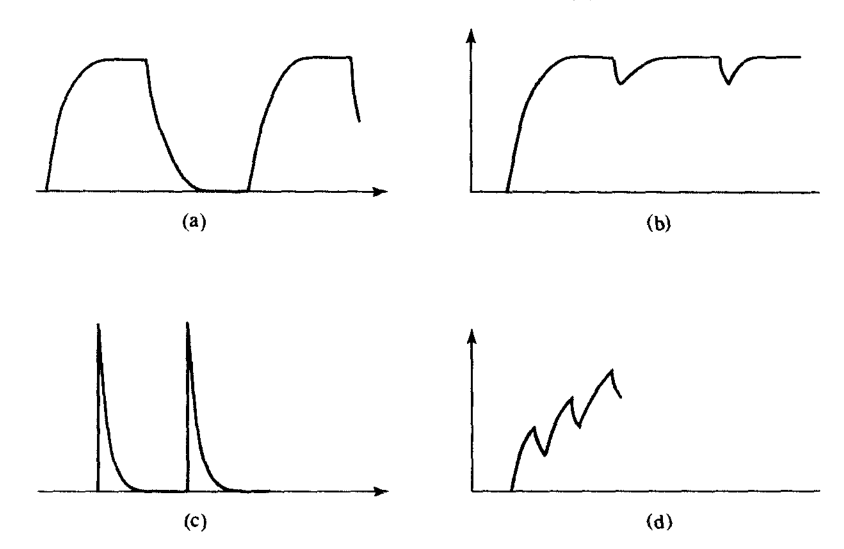


图 8.48 RC 电路的电容电压，脉冲宽度和周期分别为：(a) 情况 I; (b) 情况 II; (c) 情况 III; (d) 情况 IV

情况 I：有足够时间充电和放电

当然，可以通过一系列分析得到每种情况下响应的精确值。首先考虑情况I。因为电容有足够的时间完全充电，且受迫响应相当于 9 V 直流驱动电压，因此第一个脉冲的完全响应为

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \text{V}$$

由于 $v_C(0) = 0$, $A = -9$ V，因此在 0 ms < t < 10 ms 的时间间隔内：

$$v_C(t) = 9(1 - e^{-1000t})\ \text{V} \qquad [39]$$

在 t = 10 ms 时，电源突然降为 0 V，电容开始通过电阻放电。在这个时间区间内，得到的是一个无源 RC 电路，其响应为

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-0.01)},\quad 10\ \text{ms} < t < 20\ \text{ms} \qquad [40]$$

其中，B = 8.999 59 V，该值是通过将 t = 10 ms 代入式[39]求得的，取整为 9 V。注意，计算得到的值与在脉冲结束之前初始瞬态已经结束的假设一致。

在 t = 20 ms 时，电压源立即跳到 9 V。在此之前的电容电压通过将 t = 20 ms 代入式[40]求得，v_C(20 ms) = 408.6 μV，与 9 V 相比，近似为零。

如果取 4 位有效位，那么在第二个脉冲开始时电容电压为零，与起始点一样，因此式[39]和式[40]组成后续脉冲响应的基础，可以写为

$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1-e^{-1000t})\ \mathrm{V}, & 0\ \mathrm{ms} \leqslant t \leqslant 10\ \mathrm{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.01)}\ \mathrm{V}, & 10\ \mathrm{ms} < t \leqslant 20\ \mathrm{ms} \\ 9(1-e^{-1000(t-0.02)})\ \mathrm{V}, & 20\ \mathrm{ms} < t \leqslant 30\ \mathrm{ms} \\ 9e^{-1000(t-0.03)}\ \mathrm{V}, & 30\ \mathrm{ms} < t \leqslant 40\ \mathrm{ms} \end{cases}$$

依次类推。

情况 II：有足够时间完全充电但没有时间完全放电

接下来分析如果电容不能完全放电会发生什么情况（情况 II）。式[39]仍然描述了 $0\ \mathrm{ms} < t < 10\ \mathrm{ms}$ 区间内的情况，式[40]描述了两个脉冲之间的电容电压，只是时间间隔缩减为 $10\ \mathrm{ms} < t < 10.1\ \mathrm{ms}$。

在 $t = 10.1\ \mathrm{ms}$ 时，即第二个脉冲刚开始之前，电容电压 v_C 为 8.144 V，因为电容只有 0.1 ms 的放电时间，因此当接下来的脉冲开始时，它还剩有最大能量的82%。因此，在接下来的时间段内：

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \mathrm{V}, \quad 10.1\ \mathrm{ms} < t < 20.1\ \mathrm{ms}$$

其中，$v_C(10.1\ \mathrm{ms}) = 9 + C = 8.144\ \mathrm{V}$，$C = -0.856\ \mathrm{V}$，因此，

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \mathrm{V}, \qquad 10.1\ \mathrm{ms} < t < 20.1\ \mathrm{ms}$$

该脉冲比前面脉冲更快地达到 9 V 的峰值电压。

情况 III：没有时间完全充电但有时间完全放电

在电压脉冲结束之前且瞬态过程没有结束时会发生什么？实际上，这就是情况 III。下式如同情况 I 中的公式：

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t}\ \mathrm{V} \tag{41}$$

上式仍然适用于这种情况，但只在 $0\ \mathrm{ms} < t < 0.1\ \mathrm{ms}$ 区间内有效。由于初始条件不变，所以 $A = -9\ \mathrm{V}$。现在，在 $t = 0.1\ \mathrm{ms}$ 时，即第一个脉冲结束之前的瞬间，求得 $v_C = 0.8565\ \mathrm{V}$。这与电容有足够时间完全充电时能够达到的9 V的最大电压相距甚远，这是由于脉冲宽度只有电路时间常数的十分之一导致的直接结果。

此时电容开始放电，因此，

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \mathrm{V}, \qquad 0.1\ \mathrm{ms} < t < 10.1\ \mathrm{ms} \tag{42}$$

已经得到 $v_C(0.1^-\ \mathrm{ms}) = 0.8565\ \mathrm{V}$，因此 $v_C(0.1^+\ \mathrm{ms}) = 0.8565\ \mathrm{V}$，将该值代入式[42]求得 $B = 0.8565\ \mathrm{V}$。在 $t = 10.1\ \mathrm{ms}$ 时，即第二个脉冲刚开始之前，电容电压已经基本衰减到 0 V，它同时也是第二个脉冲开始时的初始条件，因此式[41]可以重写成

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000(t-10.1\times10^{-3})}\ \mathrm{V}, \qquad 10.1\ \mathrm{ms} < t < 10.2\ \mathrm{ms} \tag{43}$$

该式用于描述相应的响应。

情况 IV：没有时间完全充电和放电

最后，我们分析脉冲宽度和周期很短以至于电容没有时间完全充电和放电的情况。根据经验可得

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000t}\ \text{V}, \qquad 0\ \text{ms} < t < 0.1\ \text{ms} \qquad [44]$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1000(t-1\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.1\ \text{ms} < t < 0.2\ \text{ms} \qquad [45]$$

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-2\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.2\ \text{ms} < t < 0.3\ \text{ms} \qquad [46]$$

$$v_C(t) = De^{-1000(t-3\times10^{-4})}\ \text{V}, \qquad 0.3\ \text{ms} < t < 0.4\ \text{ms} \qquad [47]$$

在 $t = 0.2$ ms，第二个脉冲刚开始之前，电容电压衰减至 $v_C = 0.7750$ V，由于没有足够的时间完全放电，因此电容保留了初始充电得到的大部分能量。在 0.2 ms < t < 0.3 ms 区间内，将 $v_C(0.2^+) = v_C(0.2^-) = 0.7750$ V 代入式[46]求得 $C = -8.225$ V。接着，计算式[46]在 $t = 0.3$ ms 时的值，由于第二个脉冲结束前 $v_C = 1.558$ V，从而求得 $D = 1.558$ V，经过几个脉冲，电容慢慢充电到不断增大的电压值，此时如果输出详细的响应将有助于分析，图 8.49 中给出了情况 I 到情况 IV 的 PSpice 仿真结果。特别要注意的是：在图 8.49(d)中，细节的充电/放电瞬态响应在形状上类似于图 8.49(a)~图 8.49(c)所示，它叠加在$(1 - e^{-t/\tau})$的充电响应上，经过 3~5 个时间常数，电容电压达到最大值，在这种情况下，单个脉冲周期不能使电容完全充电或放电。

我们没有预测 $t >> 5\tau$ 时响应的特点，虽然这是我们非常感兴趣的地方。注意，图 8.49(d)所示的响应约从 4 ms 开始，而且具有一个 4.50 V 的平均值，该值是电压源脉冲允许电容完全充电时可达到的值的一半。实际上，该平均值可以通过直流电容电压乘以脉冲宽度与周期的比值得到。

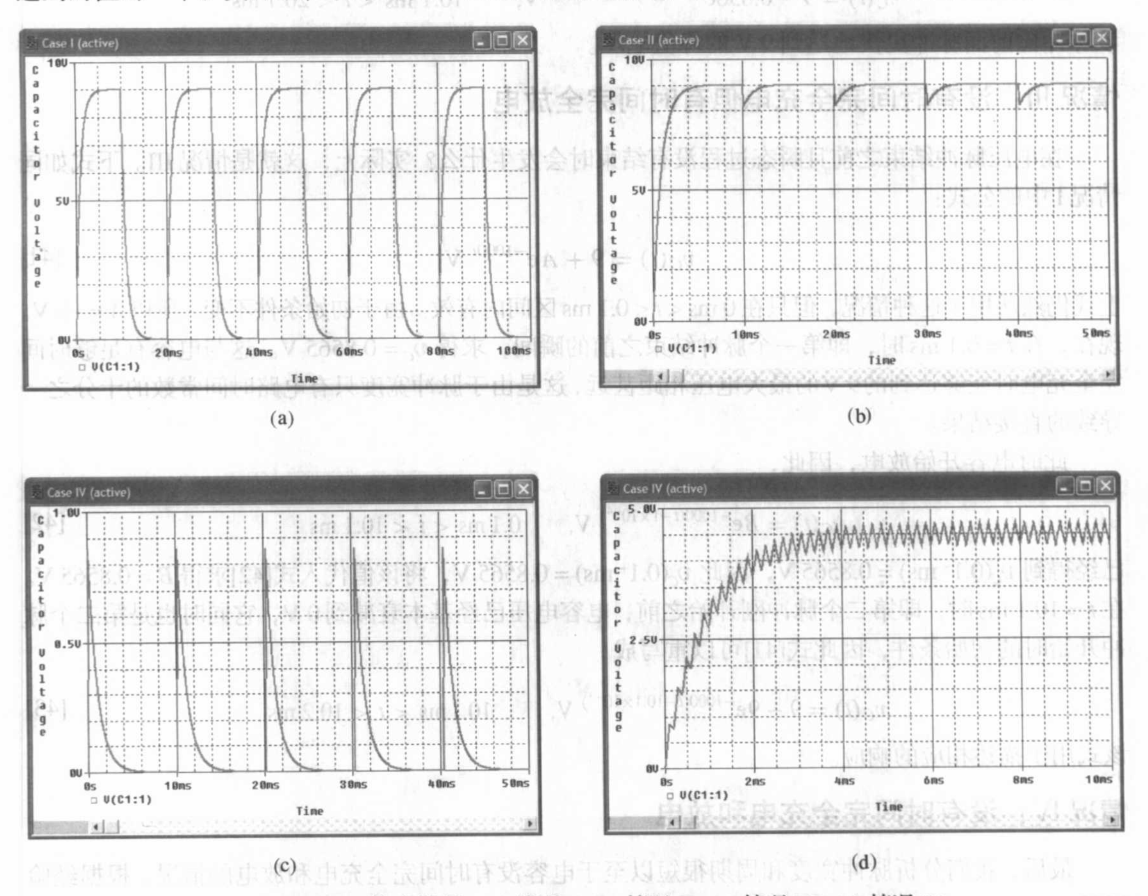


图 8.49 PSpice 仿真结果：(a) 情况 I；(b) 情况 II；(c) 情况 III；(d) 情况 IV

练习

8.14 画出以下条件下0 s < t < 6 s范围内的$i_L(t)$: (a) $v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-4) - 3u(t-6) + \ldots$; (b) $v_s(t) = 3u(t) - 3u(t-2) + 3u(t-2.1) - 3u(t-4.1) + \ldots$。

答案: (a) 见图 8.50(a); (b) 见图 8.50(b)。

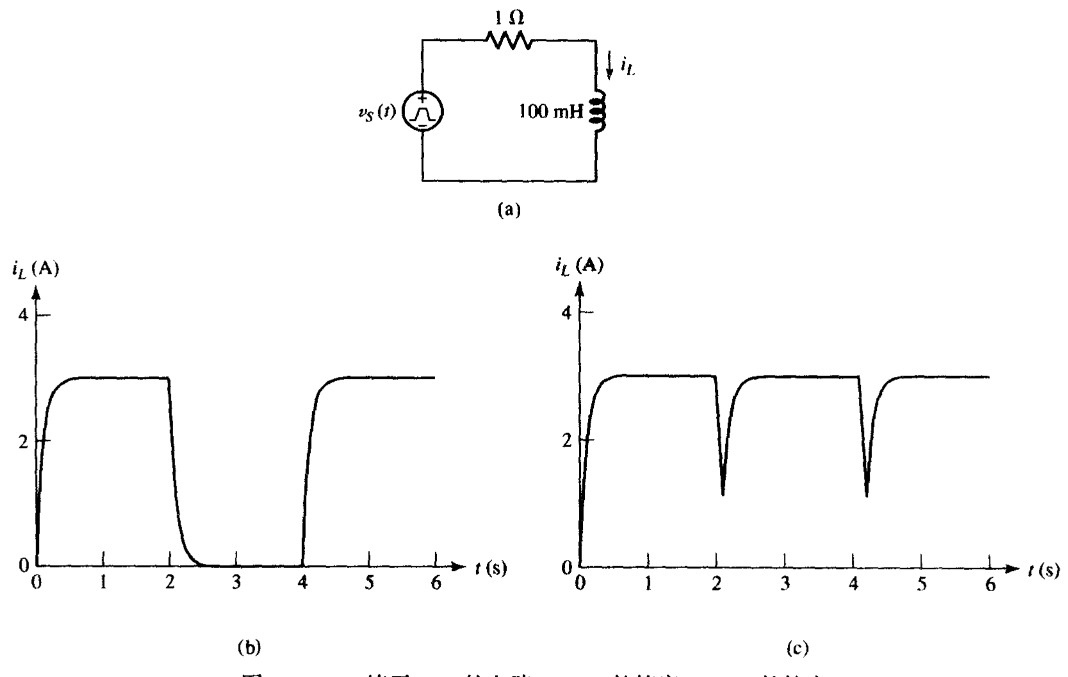


图 8.50 (a) 练习 8.14 的电路; (b) (a)的答案; (c) (b)的答案

实际应用——数字集成电路中的频率限制

现代集成电路［如可编程逻辑阵列（PAL）和微处理器（见图8.51）］都是由称为门的晶体管电路连接而成的。

数字信号用1和0的组合来表示，可以是数据或指令（如，“加”或“减”）。从电气上来说，用高电压表示逻辑“1”，用低电压表示逻辑“0”。实际上，它们都有对应的电压范围，例如，在7400系列的TTL逻辑集成电路中，2~5 V之间的任何电压将被解释为逻辑“1”，0~0.8 V之间的电压被解释为逻辑“0”，0.8~2 V之间的电压不与任何逻辑状态相对应，如图8.52所示。

数字电路中的一个关键参数是它们的工作速度。这里，“速度”指的是将一个门从一个逻辑态切换到另一个逻辑态（从逻辑“0”到逻辑“1”，或者相反）的速度，以及将一个门的输出传到另一个门的输入所需要的延时。尽管晶体管含有的固有电容会影响切换速度，但目前限制数字集成电路速度的主要因素还是互连路径。可以用一个简单的RC电路来模拟两个逻辑门之间的连接路径（当然随着集成电路特征尺寸的不断减小，需要用更精确的模型来精确估算电路的性能）。例如，考虑一条长2000 μm、宽2 μm的连接路径。在典型的硅集成电路中，这样的路径可以用一个0.5 pF的电容与一个100 Ω的电阻组成的电路来模拟，如图8.53所示。

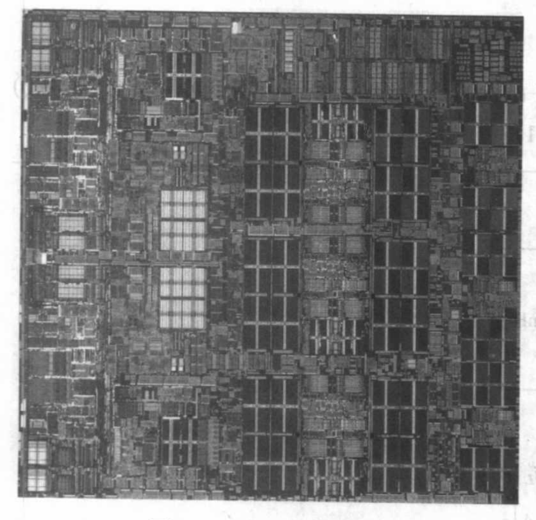


图 8.51　IBM 电源芯片

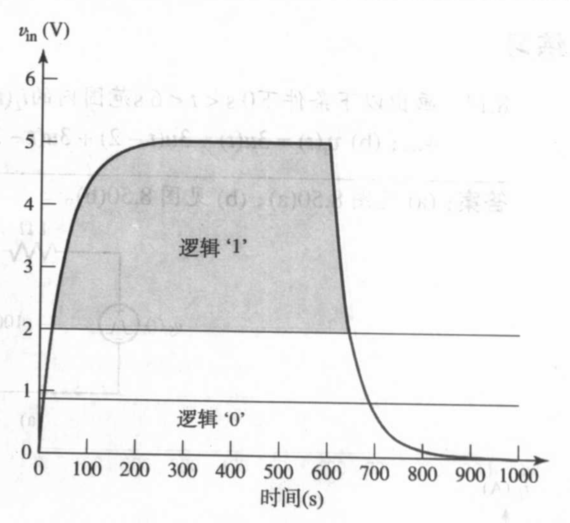


图 8.52　路径电容的充电 / 放电特性，分别表示 TTL 逻辑“1”和逻辑“0”的电压范围

假设电压 v_{out} 表示门的输出电压，它从逻辑“0”状态变化到逻辑“1”状态。第二个门输入端的电压为 v_{in}，我们感兴趣的是 v_{in} 变为 v_{out} 值所需要的时间。

假定该 0.5 pF 电容最初没有电荷［也就是说 $v_{in}(0) = 0$］，计算 RC 时间常数为 $\tau = RC = 50$ ps，定义 v_{out} 发生变化的时刻为 $t = 0$。可以得到

图 8.53　集成电路连接路径的电路模型

$$v_{in}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{out}(0)$$

设 $v_{in}(0) = 0$，求得 $A = -v_{out}(0)$，因此，

$$v_{in}(t) = v_{out}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

检查该方程，可以看到 v_{in} 在经过 5τ（即 250 ps）后达到 $v_{out}(0)$。如果在该瞬态过程结束之前 v_{out} 再次发生改变，那么电容没有足够的时间来完全充电。在这种情况下，v_{in} 将小于 $v_{out}(0)$。例如，假定 $v_{out}(0)$等于逻辑 1 电压的最小值，则意味着 v_{in} 将不会随之变为逻辑 1。如果这时 v_{out} 突然变为 0 V（逻辑 0），则电容将开始放电，从而使得 v_{in} 进一步减小。因此，如果逻辑状态切换得太快，将不能够使信息从一个门传到另一个门。

因此，门逻辑状态能够变化的最快速度是$(5\tau)^{-1}$。这可以用最大工作频率来表示：

$$f_{max} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2\ \text{GHz}$$

其中，因子 2 表示充电 / 放电周期。如果需要集成电路工作在更高频率来执行更快的计算，则需要减小互连电容和 / 或互连电阻。

总结和复习

- 对于含有电容和电感的电路，当电源瞬时接入或者移出时，电路的响应总是由两部分组成：自由响应和受迫响应。

- 自由响应（也称为瞬态响应）的形式只取决于元件值和元件的连接方式。
- 受迫响应的形式是激励函数的镜像，因此直流激励函数总是产生恒定的受迫响应。
- 可以化简为一个等效电感 L 和一个等效电阻 R 的电路的自由响应为 $i(t)=I_0e^{-t/\tau}$，其中 $\tau=L/R$ 为电路的时间常数。
- 可以化简为一个等效电容 C 和一个等效电阻 R 的电路的自由响应为 $v(t)=V_0e^{-t/\tau}$，其中 $\tau=RC$ 为电路的时间常数。
- 单位阶跃函数是模拟开关闭合或打开的一种有用的方法，但是要注意初始条件。
- 由直流电源激励的 RL 或 RC 电路的完全响应的形式为 $f(0^+)=f(\infty)+A$ 和 $f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-t/\tau}$，即总的响应 = 终值 +（初值 - 终值）$e^{-t/\tau}$。
- RL 或 RC 电路的完全响应也可以通过写出感兴趣量的单个微分方程并求解得到。
- 当处理连续开关电路或输入脉冲波形的电路时，相关问题是相对于电路的时间常数，储能元件是否有足够的时间完全充电和放电。

深入阅读

微分方程求解方法可在下面的书中找到：

W. E. Boyce 和 R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed. New York: Wiley, 2002。

详细描述电路瞬态响应可在下面的书中找到：

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*. New York: Wiley, 1954。

习题

8.1　无源 RL 电路

1. 考虑图 8.54 所示的简单 RL 电路。如果 $R=4.7\ \text{k}\Omega$, $L=1\ \mu\text{H}$, $i(0)=2\ \text{mA}$，计算：(a) $t=100$ ps 时的 i; (b) $t=212.8$ ps 时的 i; (c) $t=75$ ps 时的 v_R; (d) $t=75$ ps 时的 v_L。

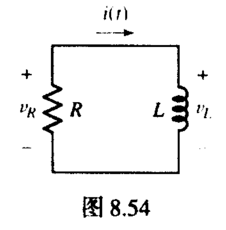


图 8.54

2. 参见图 8.54 所示电路，电阻 $R=1\ \Omega$，电感 $L=2$ H，在 $t=0$ 时，电感储存了 100 mJ 的能量，计算：(a) $t=1$ s 时的 i; (b) $t=5$ s 时的 i; (c) $t=10$ s 时的 i; (d) $t=2$ s 时电感中剩余的能量。
3. 简单 RL 电路如图 8.54 所示，已知电阻 $R=100\ \Omega$，如果 $i(0)=2$ A，$i(50\ \mu\text{s})=735.8\ \mu\text{A}$，求电感 L 的值。
4. 某简单 RL 电路如图 8.54 所示，已知 L 为 3 mH，如果 $i(0)=1.5$ A，$i(2\ \text{s})=551.8$ mA，计算电阻 R 的值。
5. 在 $t=0$ 时，图 8.54 所示电路中的 3 mH 电感储存了 1 J 的能量，而 $t=1$ ms 时能量为 100 mJ，计算 R 的值。
6. 图 8.55 所示电路中的开关已经闭合很长时间了，如果在 $t=0$ 时开关打开，求：(a) 开关变化后的瞬间电感电流 i_L 的值。(b) 开关变化后的瞬间电压 v 的值。

7. 电路如图 8.56 所示，其中的开关为单刀双掷开关，在图中，它表示闭合一个电路之前先打开另一个电路，这种类型的开关也称为“先接后切”开关。假定开关位于图中所示的位置已有很长时间，确定如下时刻的 v 和 i_L：(a)开关切换前的瞬间；(b)开关切换后的瞬间。

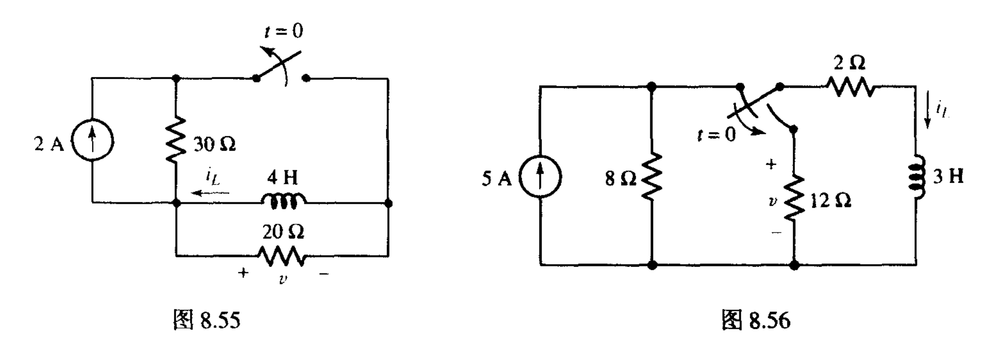


图 8.55　　图 8.56

8. 如图 8.57 所示的电路已经运行了若干小时，在 $t = 0$ 时开关闭合。当 $t = 5\ \mu s$ 时，计算：(a) i_L；(b) i_{SW}。

9. 图 8.58 所示电路中的开关已经闭合很长时间了，并在 $t = 0$ 时打开。(a) 求 $t > 0$ 时的 $i_L(t)$；(b) 计算 i_L；(c) 如果 $i_L(t_1) = 0.5i_L(0)$，求 t_1。

10. 对于图 8.59 所示的电路，(a) 写出描述电阻电压 v_R 在 $t > 0$ 时的微分方程；(b) 求解特征方程；(c) 计算开关打开前的瞬间、打开后的瞬间以及 $t = 1$ s 时的 v_R。

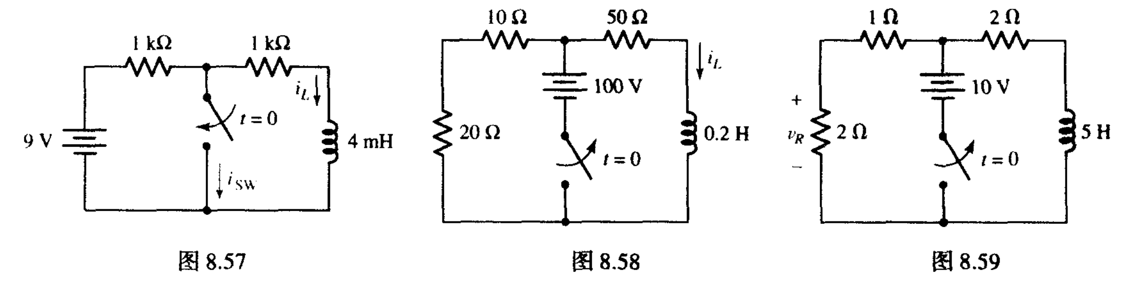


图 8.57　　图 8.58　　图 8.59

8.2 指数响应特性

11. 图 8.7 所示的是 i/I_0 与时间函数的曲线。(a) 求当 i/I_0 等于 0.1，0.01 和 0.001 时 t/τ 的值；(b) 如果画出曲线在 $t/\tau = 1$ 点处的切线，那么它与 t 轴的交点为多少？

12. 参见图 8.60 所示的响应曲线，求电路的时间常数和流过电感的初始电流。

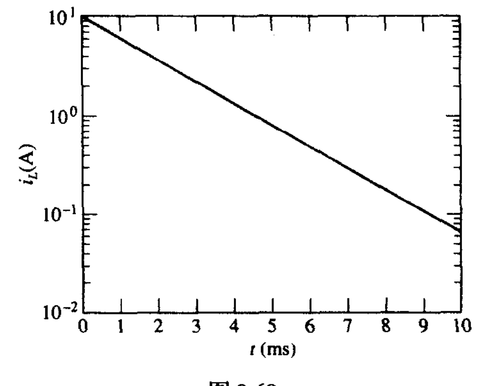


图 8.60

13. 简单 *RL* 电路中，10 mH 电感储存的初始能量为 15 mJ，当 $R = 1\ \text{k}\Omega$，$R = 10\ \text{k}\Omega$ 和 $R = 100\ \text{k}\Omega$ 时，分别画出电阻电压的曲线，并用 PSpice 仿真对结果进行验证。
14. 在图 8.1 所示电路中，设 $R = 1\ \text{M}\Omega$ 和 $L = 3.3\ \mu\text{H}$。(a) 计算电路的时间常数；(b) 如果 $t = 0$ 时电感的初始能量为 43 μJ，确定 $t = 5$ ps 时 i_L 的值；(c) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。
15. 一个数字信号通过一个电感为 125.7 μH 的绕制得较松的线圈，如果要求瞬态的持续时间小于 100 ns，确定接收设备最大允许的戴维南等效电阻。
16. 电路如图 8.61 所示，开关在 $t = 0$ 闭合前已断开很长时间。画出下列响应在 $-5\ \mu\text{s} < t < 5\ \mu\text{s}$ 时区间内的曲线：(a) $i_L(t)$；(b) $i_x(t)$。

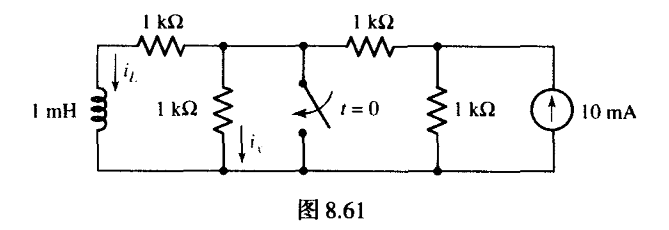


图 8.61

8.3　无源 *RC* 电路

17. 在图 8.62 所示的并联 *RC* 电路中，$C = 1\ \mu\text{F}$，表示电介质损耗的电阻 $R = 100\ \text{M}\Omega$。$t = 0$ 时电容储存了 1 mJ 的能量。(a) 求电路时间常数；(b) 计算 $t = 20$ s 时的 i；(c)用 PSpice 仿真对结果进行验证。
18. 对于图 8.62 所示的电路，假定 $R = 1\ \Omega$，$C = 2$ F，且 $i(0) = 10$ V。计算下列时刻的 v 值：(a) $t = 1$ s；(b) $t = 2$ s；(c) $t = 5$ s；(d) $t = 10$ s。

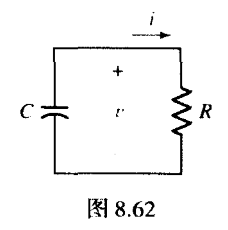


图 8.62

19. 在图 8.61 所示的电路中，假设 $R = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 4$ mF。如果 $v(0) = 5$ V，计算：(a) $t = 1$ ms 时的 v；(b) $t = 2$ ms 时的 i；(c) $t = 4$ ms 时电容中剩余的能量。
20. 对于图 8.62 所示的 *RC* 电路，已知 C 为 100 pF。(a) 如果 $v(0) = 1.5$ V，$v(2\ \text{ns}) = 100$ mV，求电阻 R 的值；(b) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。
21. 一个立体声收音机的电源中含有两个并联的 50 mF 大电容。当关掉电源时可以看到：表示电源打开的黄色 LED 指示灯经过几秒的时间才慢慢熄灭。电视也是如此，于是你决定用一个具有不同快门速度的焦距为 35 mm 的照相机以及一些廉价的胶卷来做一个实验。这里采用 4 种快门速度：150 ms, 1 s, 1.5 s 和 2.0 s。当速度从 150 ms 增大到 1.5 s 时，呈现在胶卷中的图像亮度增大。速度为 1.5 s 和 2.0 s 的图像之间没有明显差别。当快门速度为 150 ms 时，图像强度只有采用最快的快门速度进行拍摄所得到的图像强度的14%。估算连接到接收机电源的电路的戴维南等效阻抗。
22. (a) 电路如图 8.63 所示，求 $v_C(t)$对所有时间的表达式；(b)在何时 $v_C = 0.1\,v_C(0)$?

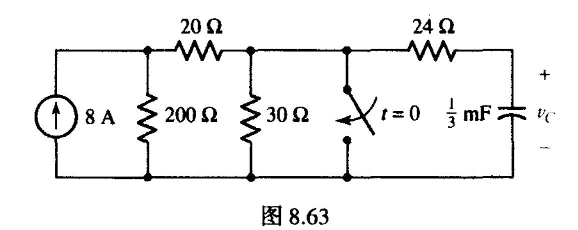


图 8.63

23. 一个 4 A 电流源、一个 20 Ω 电阻以及一个 5 μF 电容相并联。$t = 0$ 时，电源的幅度突然降为零（即变成一个 0 A 的电源）。(a)在何时电容电压降为其初始值的一半；(b)在何时电容储存的能量降到其初始值的一半？
24. 电路如图 8.64 所示，确定 $v_C(t)$和 $i_C(t)$，并在同一个时间轴上画出这两条曲线，$-0.1\ \text{s} < t < 0.1\ \text{s}$。
25. 电路如图 8.65 所示，确定电流 i 和电压 v 在 $t = 0^+$，$t = 1.5$ ms 和 $t = 3.0$ ms 时的值。

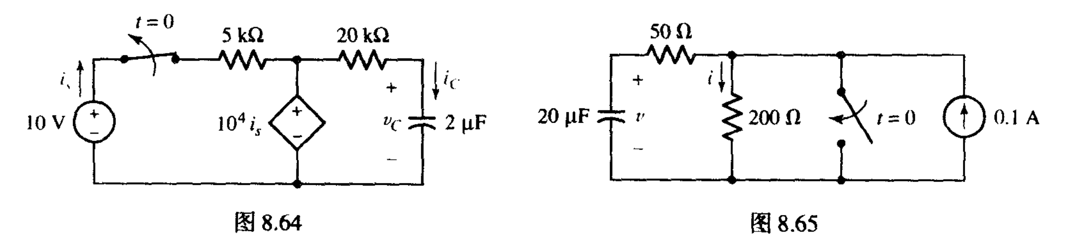


图 8.64　　　　图 8.65

8.4 更一般的观察方法

26. 图 8.66 所示电路中的开关在打开之前已经闭合了很长时间，$t = 0$ 时开关打开，求 i_L 和 i_x 在下列时刻的值：(a) $t = 0^-$；(b) $t = 0^+$；(c) $t = 300$ μs。

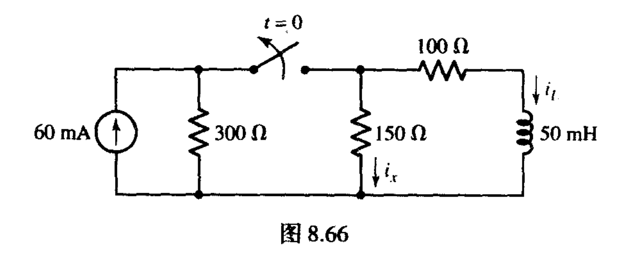


图 8.66

27. 一个 0.2 H 的电感与一个 100 Ω 的电阻并联，在 $t = 0$ 时电感电流为 4 A。(a) 求 $t = 0.8$ ms 时 $i_L(t)$ 的值；(b)如果在 $t = 1$ ms 时将另一个 100 Ω 的电阻并联到电感两端，求 $t = 2$ ms 时 i_L 的值。
28. 一个 20 mH 的电感和一个 1 kΩ 的电阻并联，设 $t = 0$ 时回路电流为 40 mA。(a)在何时该电流等于 10 mA？(b)在 $t = 10$ μs 时将一个多大的电阻串联接入电路中可以使 $t = 15$ μs 时的电流等于 10 mA？
29. 参见图 8.67 所示的网络，初始值 $i_1(0) = 20$ mA，$i_2(0) = 15$ mA。(a) 确定 $v(0)$；(b) 求 $v(15\ \mu\text{s})$ 的值；(c) 在何时 $v(t) = 0.1v(0)$？
30. 电路如图 8.68 所示，求 R_1 和 R_2 的值，使得 $v_R(0^+) = 10$ V 且 $v_R(1\ \text{ms}) = 5$ V。

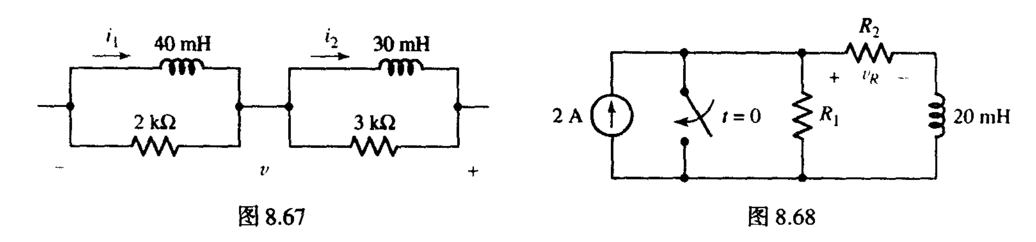


图 8.67　　　　图 8.68

31. 电路如图 8.69 所示，开关在 $t = 0$ 闭合前已打开了很长时间。(a)求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式；(b)画出 $-4\ \text{ms} < t < 4\ \text{ms}$ 时 $v_x(t)$的曲线。
32. 电路如图 8.70 所示，如果 $i_L(0) = 10$ A，求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

图 8.69　　　　图 8.70

33. 参见图 8.71 所示的电路，求 $t = -0.1$ s，0.03 s 和 0.1 s 时的 i_1，并画出 i_1 随 t 变化的曲线，其中，$-0.1\text{ s} < t < 1\text{ s}$。

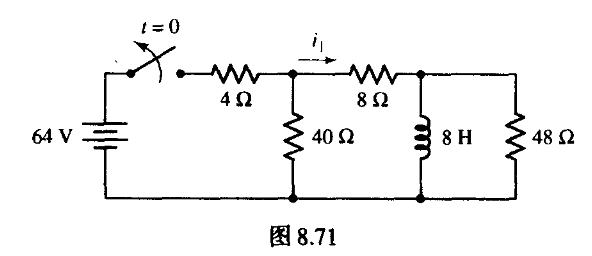


图 8.71

34. 某电路由一个 0.5 H 电感、一个 10 Ω 电阻和一个 40 Ω 电阻串联而成，$t = 0$ 时电感电流为 4 A。(a)求 $i_L(15\text{ ms})$；(b)如果 $t = 15$ ms 时 40 Ω 的电阻被短路了，求 $i_L(30\text{ ms})$。

35. 电路如图 8.72 所示，它含有两个并联的电感，于是在两个电感回路之间可能存在循环流动的电流。令 $i_1(0^-) = 10$ A 和 $i_2(0^-) = 20$ A。(a) 求 $i_1(0^+)$，$i_2(0^+)$和 $i(0^+)$；(b) 确定 $i(t)$的时间常数 τ；(c) 求 $t > 0$ 的 $i(t)$；(d) 求 $v(t)$；(e) 由 $v(t)$以及初始值求出 $i_1(t)$和 $i_2(t)$；(f) 证明 $t = 0$ 时储存的能量等于 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 之间电阻性网络消耗的能量加上 $t = \infty$ 时储存在电感中的能量。

36. 电路如图 8.73 所示，假设它从昨天中午开始按照图示形式工作。电路中的开关在早上 10 点整打开，求以下时刻 i_1 和 v_C 的值：(a) 早上 9：59；(b) 早上 10：05；(c) 求 $t = 1.2\tau$时的 $i_1(t)$；(d) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。

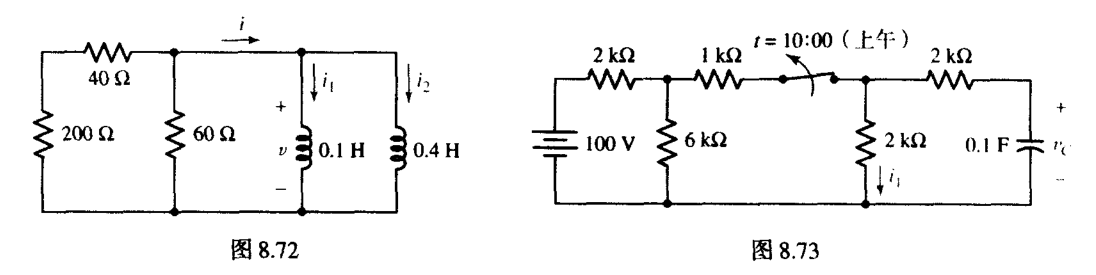


图 8.72　　　　图 8.73

37. 如图 8.74 所示电路已工作了很长的时间，在 $t = 0$ 时开关打开。求下列各值：(a) $i_x(0^-)$；(b) $i_s(0^-)$；(c) $i_x(0^+)$；(d) $i_s(0^+)$；(e) $i_x(0.4\text{ s})$。

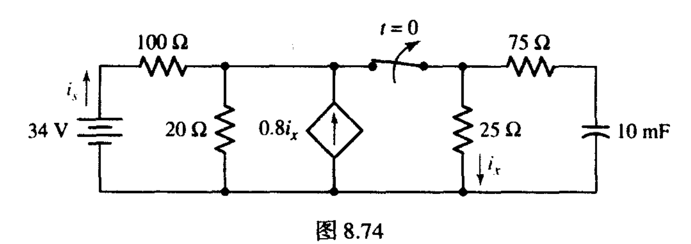


图 8.74

38. 电路如图 8.75 所示，在 $t=0$ 之前开关已经闭合了很长一段时间，$t=0$ 时将开关打开。(a) 求 $t>0$ 时的 $v_C(t)$；(b)计算 $i_A(-100\ \mu s)$ 和 $i_A(100\ \mu s)$ 的值；(c)用 PSpice 仿真对结果进行验证。

39. 图 8.76 所示的电路处在该状态已有很长的时间，$t=0$ 时开关闭合。(a) 求 $t<0$ 时的 $i_1(t)$；(b) 求 $t>0$ 时的 $i_1(t)$。

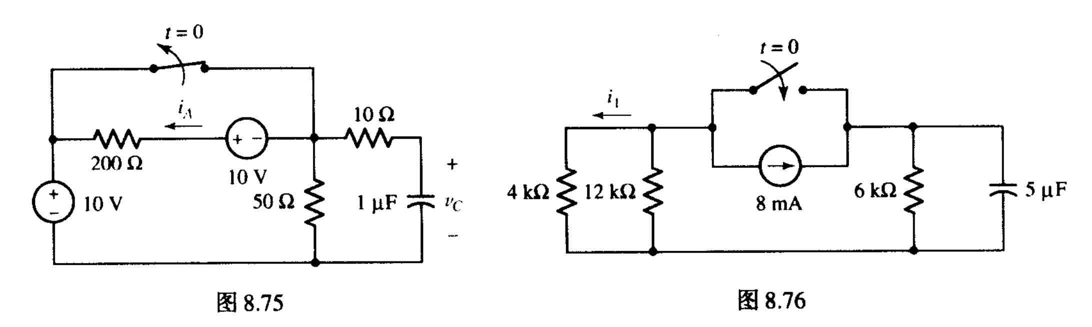


图 8.75　　图 8.76

40. 图 8.77 所示的电路处在该状态已有很长的时间，$t=0$ 时两个开关同时打开，如图所示。(a)求 $t>0$ 时 v_{out} 的表达式；(b) 求出 $t=0^+$，1 μs 和 5 μs 时 v_{out} 的值。

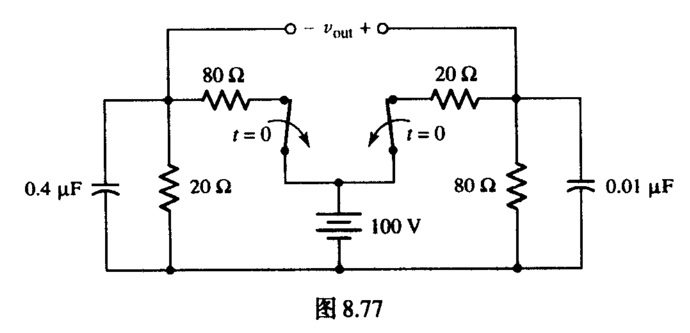


图 8.77

41. (a) 假设图 8.78 所示的电路处在该状态已有很长的时间，求开关打开之后的 $v_C(t)$ 的表达式；(b) 计算在 $t=3\ \mu s$ 时的 $v_C(t)$ 的值；(c) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。

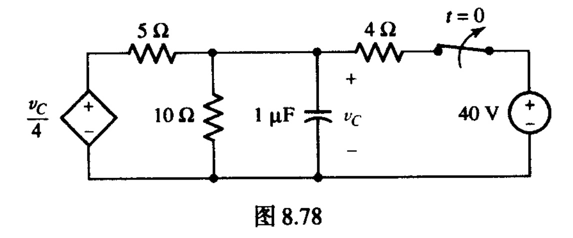


图 8.78

42. 电路如图 8.79 所示，确定 R_0 和 R_1 的值，使得 $t=0.5$ ms 时 $v_C=50$ V 和 $t=2$ ms 时 $v_C=25$ V。

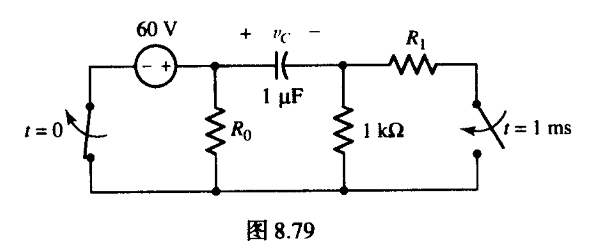


图 8.79

43. 电路如图 8.80 所示，分别确定 $v_C(t)$在下列两种情况下的表达式：(a) $t<0$；(b) $t>0$。

44. 电路如图 8.81 所示，求 $t<0$ 和 $t>0$ 时 $i_1(t)$的表达式。

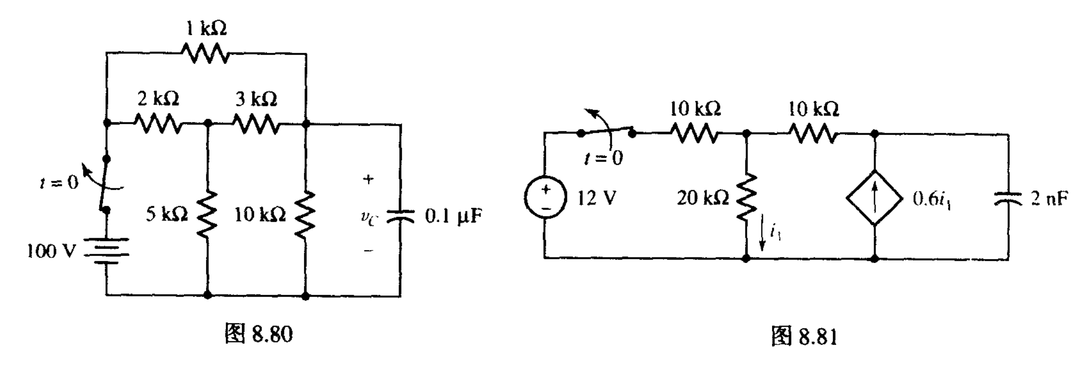


图 8.80　　图 8.81

45. 图 8.82 所示电路中的开关处于 A 端很长时间后移到 B 端，此时 $t=0$。这使得两个电容串接在一起，从而在两个电容两端产生大小相等方向相反的直流电压。(a) 求 $v_1(0^-)$，$v_2(0^-)$和 $v_R(0^-)$；(b) 求 $v_1(0^+)$，$v_2(0^+)$和 $v_R(0^+)$；(c) 求 $v_R(t)$的时间常数；(d) 求 $t>0$ 时的 $v_R(t)$；(e) 求 $i(t)$；(f) 由 $i(t)$和初始条件求出 $v_1(t)$和 $v_2(t)$；(g) 证明 $t=\infty$ 时电容储存的能量加上 20 kΩ 电阻上消耗的能量等于 $t=0$ 时储存在电容上的能量。

46. 电路如图 8.83 所示，$t<0$ 时 i_s 的值为 1 mA，$t>0$ 时为零，分别计算下面两种情况下的 $v_x(t)$：(a) $t<0$；(b) $t>0$。

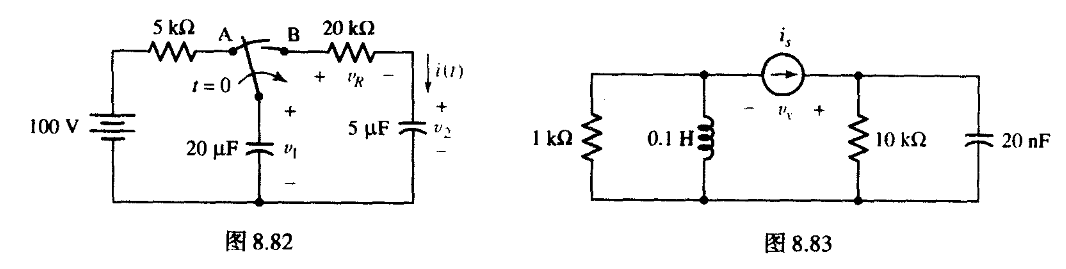


图 8.82　　图 8.83

47. 电路如图 8.84 所示，$t<0$ 时的 v_s 值等于 20 V，$t>0$ 时的值等于零。求：(a) $t<0$；(b) $t>0$ 时的 $i_x(t)$。

48. 参见图 8.85 所示的电路，其中的开关已闭合很长时间。保险丝是一种特殊类型的电阻，当流过的电流超过 1 A 且持续时间超过 100 ms 时将因过热而熔化（当然还有其他类型的保险丝）。保险丝的电阻为 3 mΩ。如果开关在 $t=0$ 时打开，那么保险丝会不会熔断？用 PSpice 对结果进行验证。

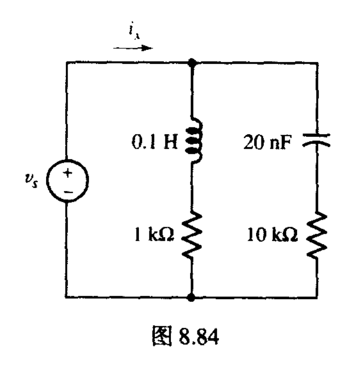


图 8.84

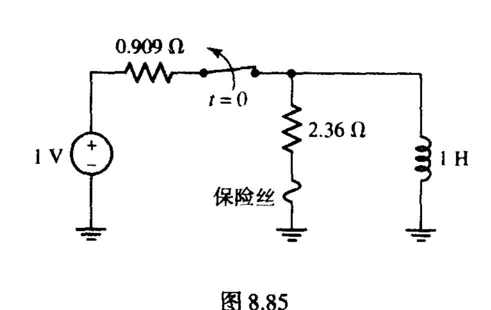


图 8.85

8.5 单位阶跃函数

49. 利用单位阶跃函数，写出描述图 8.86 所示波形的表达式。
50. 利用单位阶跃函数，写出描述图 8.87 所示波形的表达式。

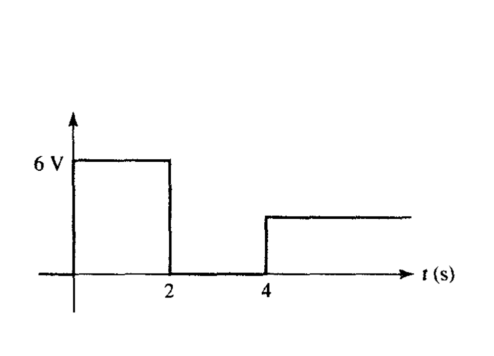


图 8.86

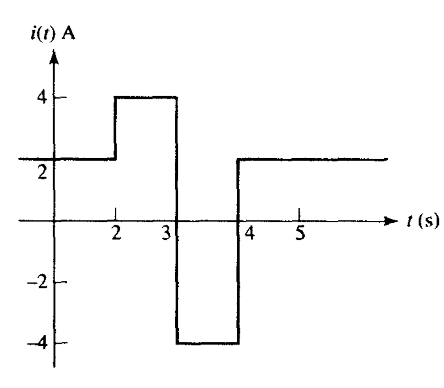


图 8.87

51. 给定函数 $f(t)=6u(-t)+6u(t+1)-3u(t+2)$，计算 $f(t)$ 在下列各时刻的值：(a) $t=-1$；(b) $t=0^-$；(c) $t=0^+$；(d) $t=1.5$；(e) $t=3$。
52. 给定函数 $g(t)=9u(t)-6u(t+10)+3u(t+12)$，计算 $g(t)$ 在下列各时刻的值：(a) $t=-1$；(b) $t=0^+$；(c) $t=5$；(d) $t=11$；(e) $t=30$。
53. 图 8.88 所示电路中的电源值 $v_A=300u(t-1)$ V，$v_B=-120u(t+1)$ V，$i_C=3u(-t)$ A。求 $t=-1.5$ s, -0.5 s, 0.5 s 和 1.5 s 时的 i_1 值。
54. 图 8.88 所示电路中的电源值 $v_A=600tu(t+1)$ V，$v_B=600(t+1)u(t)$ V，$i_C=6(t-1)u(t-1)$ A。(a) 求 $t=-1.5$ s, -0.5 s, 0.5 s 和 1.5 s 时的 i_1；(b) 画出 $-2.5\text{ s}<t<2.5\text{ s}$ 时 i_1 与 t 的图形。
55. 求 $t=2$ 时的下列各值：(a) $2u(1-t)-3u(t-1)-4u(t+1)$；(b) $[5-u(t)][2+u(3-t)][1-u(1-t)]$；(c) $4e^{-u(3-t)}u(3-t)$。
56. 电路如图 8.89 所示，求 $t<0$ 和 $t>0$ 时的 i_x，假设未知支路包含：(a) 一个打开的开关与 60 V 电池串联，+参考端在上面。$t=0$ 时开关闭合；(b) 一个电压源 $60u(t)$ V，+参考端在上面。

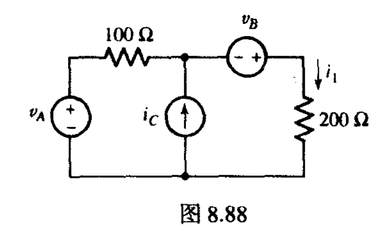


图 8.88

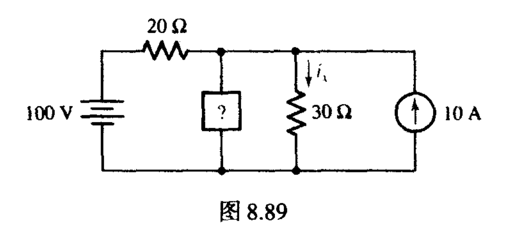


图 8.89

57. 电路如图 8.90 所示，分别求从 $t=-0.5$ s 和 $t=3.5$ s 开始持续 1 s 后的 i_x。

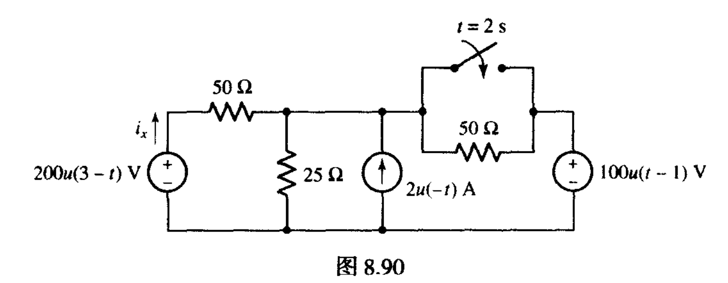


图 8.90

58. 电路如图 8.91 所示，开关在 $t<0$ 时位于位置 A，在 $t=0$ 时切换到 B，然后在 $t=4$ s 时切换到 C，在 $t=6$ s 时切换到 D，之后保持不变。画出 $v(t)$ 随时间变化的曲线，并将其表示成阶跃激励函数之和的形式。

59. 在某未知元件上所加的电压为 $7u(t)-0.2u(t)+8u(t-2)+3$ V。(a) 求出 $t=1$ s 时该元件两端的电压；(b) 如果流过该元件的相应电流为 $3.5u(t)-0.1u(t)+4u(t-2)+1.5$ A，则这是一个什么类型的元件？其值为多大？

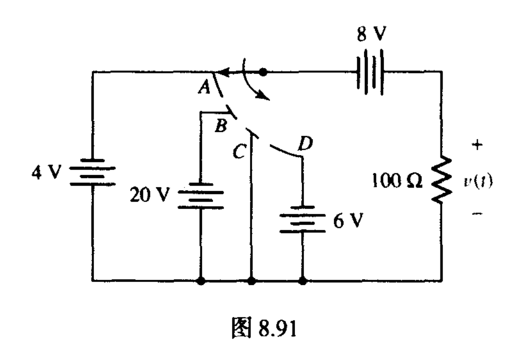


图 8.91

8.6　受激 RL 电路

60. 对于图 8.92 所示的电路：(a) 求 $v_R(t)$ 对所有 t 都有效的表达式；(b) 计算 $t=2$ ms 时的 v_R；(c) 用 PSpice 对(b)的结果进行验证。

61. 参见图 8.93 所示的电路：(a) 求 $i_L(t)$；(b) 利用 $i_L(t)$ 的表达式求 $v_L(t)$。

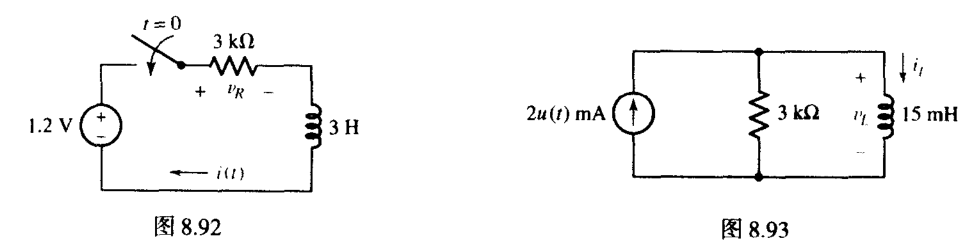


图 8.92　　图 8.93

62. 电路如图 8.94 所示，求下列时刻的 i_L 值：(a) −0.5 s；(b) 0.5 s；(c) 1.5 s。

63. 参见图 8.95 所示的电路，求以下各参量的表达式并画出波形：(a) $i_L(t)$；(b) $v_1(t)$。

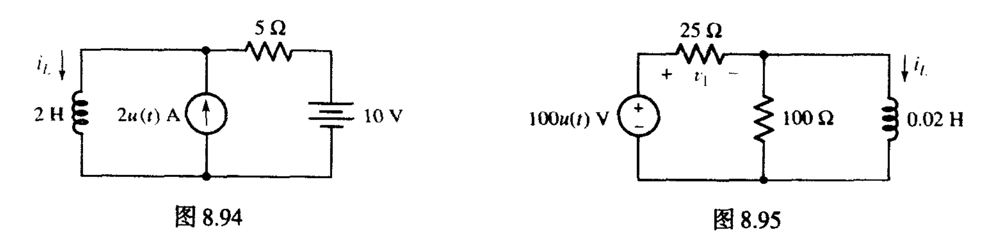


图 8.94　　图 8.95

64. 参见图 8.96 所示的电路：(a) 计算 2 kΩ 的电阻在 $t=1$ ms 时吸收的功率；(b) 求出 $i(t)$ 在 3 μs 时的值；(c) 确定流过 12 kΩ 的电阻的峰值电流；(d) 用 PSpice 对结果进行验证。

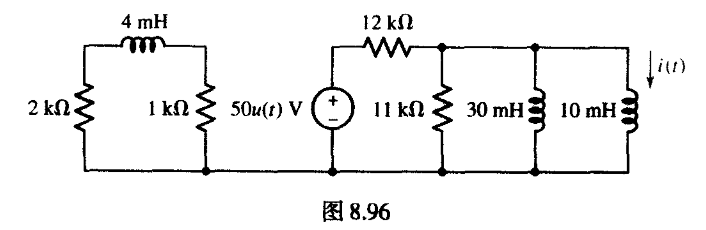


图 8.96

8.7 自由响应和受迫响应

65. 对于图 8.97 所示的电路：(a) 求 $i(t)$对所有时间都有效的表达式；(b) 计算 $t = 1.5\ \mu s$ 时的 $i(t)$；(c) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。

66. 对于图 8.98 所示的 *RL* 电路：(a) 求 $v_R(t)$对所有时间都有效的表达式；(b) 计算 $t = 2$ ms 时的 $v_R(t)$；(c) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。

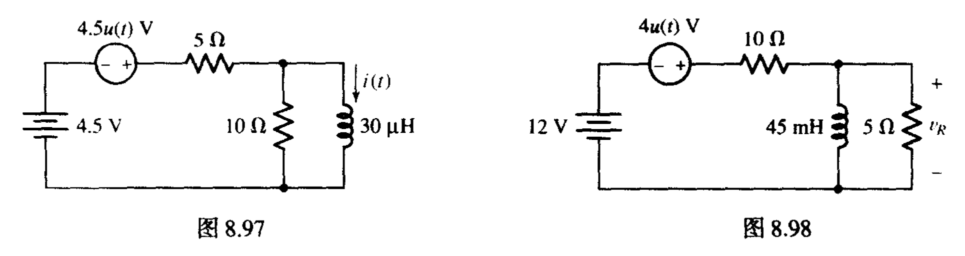


图 8.97　　　　图 8.98

67. 参见图 8.99 所示的电路，计算 $t = 27\ \mu s$ 时的 $v_1(t)$。

68. 电路如图 8.100 所示，开关已闭合很长的时间。(a) 求 $t < 0$ 时的 i_L；(b) 开关在 $t = 0$ 时打开，求 $i_L(t)$对所有时间都有效的表达式。

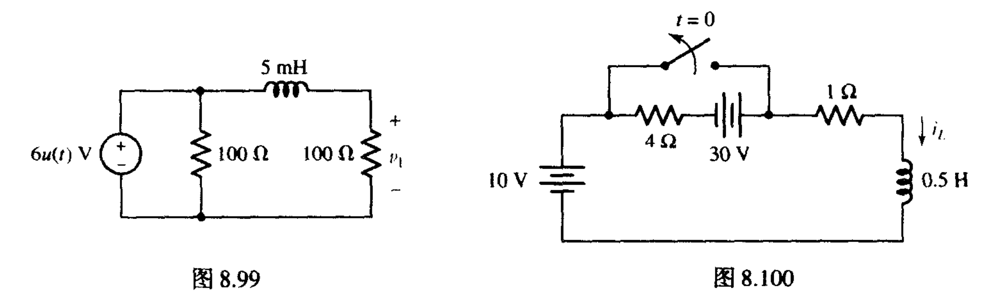


图 8.99　　　　图 8.100

69. 电路如图 8.101 所示，开关已打开很长的时间。(a) 求 $t < 0$ 时的 i_L；(b)开关在 $t = 0$ 时闭合，求 $i_L(t)$对所有时间有效的表达式。

70. 电路如图 8.102 所示，求下列时刻的 i_L 和 v_1 值：(a) 0^-；(b) 0^+；(c) ∞；(d) 0.2 ms。

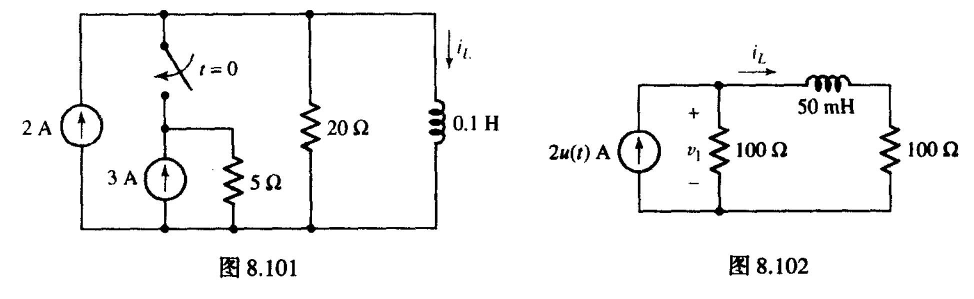


图 8.101　　　　图 8.102

71. 8.7 节中的式[33]表示受激 *RL* 串联电路的一般解，其中，Q 在一般情况下为时间的函数，A 和 P 为常量。令 $R = 125\ \Omega$，$L = 5$ H，如果电压激励函数 $LQ(t)$分别为：(a) 10 V；(b) $10u(t)$ V；(c) $10 + 10u(t)$ V；(d) $10u(t)\cos 50t$ V，求 $t > 0$ 时的 $i(t)$。

72. 电路如图 8.103 所示，开关已闭合很长的时间。(a) 求 $t < 0$ 时的 i_L；(b) 求开关打开后瞬间的电流值 $i_L(0^+)$；(c) 求 $i_L(\infty)$；(d) 推导 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

73. 电路如图 8.104 所示，求对所有时间都有效的 i_L。

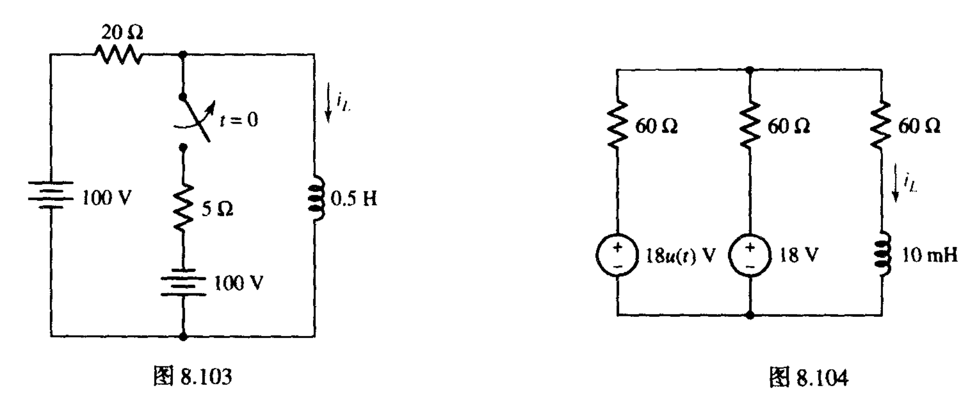


图 8.103　　图 8.104

74. 电路如图 8.105 所示，假定开关已闭合很长时间，然后在 $t = 0$ 时打开。求下列时刻 i_x 的值：(a) 0^-; (b) 0^+; (c) 40 ms。
75. 参见如图 8.105 所示的电路，假定开关已打开很长时间，然后在 $t = 0$ 时闭合。求下列时刻 i_x 的值：(a) 0^-; (b) 0^+; (c) 40 ms。
76. 电路如图 8.106 所示，求对所有时间都有效的 $v_x(t)$。

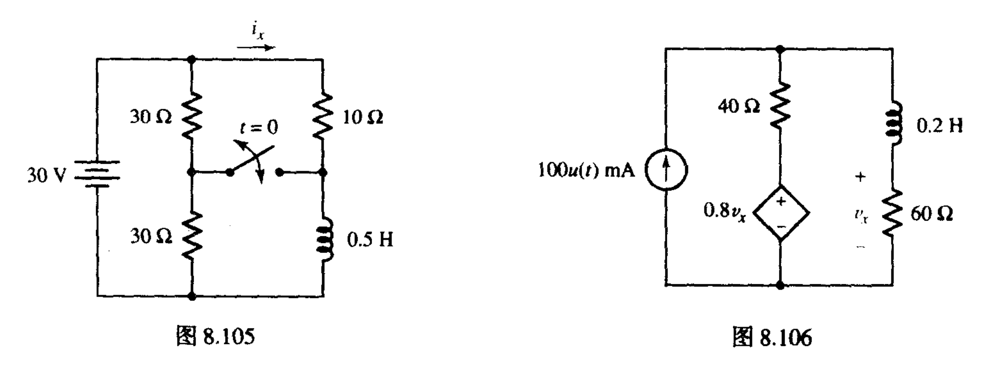


图 8.105　　图 8.106

77. 参见图 8.107 所示的电路，求：(a) $i_L(t)$；(b) $i_1(t)$。
78. 求图 8.108 所示电路中 $v(t)$ 对所有时间都有效的表达式。

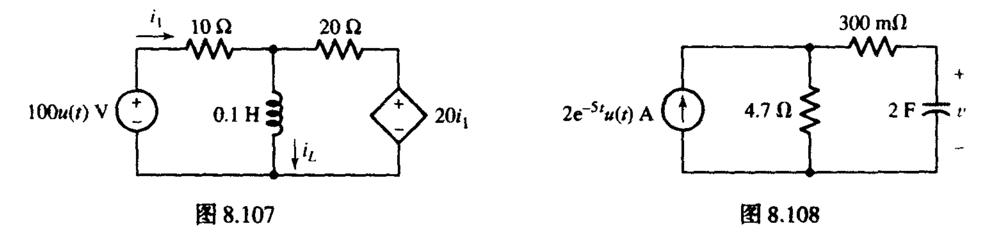


图 8.107　　图 8.108

79. 求图 8.109 所示电路中 $v(t)$ 对所有时间都有效的表达式。

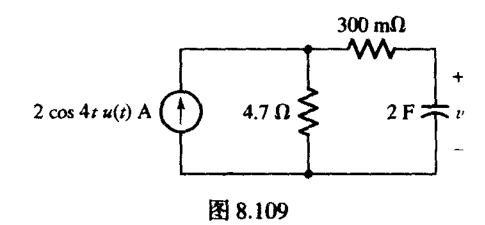


图 8.109

8.8 受激 *RC* 电路

80. (a) 电路如图 8.110 所示，求 $t = -2\ \mu s$ 和 $t = +2\ \mu s$ 时的 v_C；(b) 用 PSpice 对结果进行验证。

81. 参见图 8.111 所示的 *RC* 电路，求 $v_C(t)$对所有时间有效的表达式。

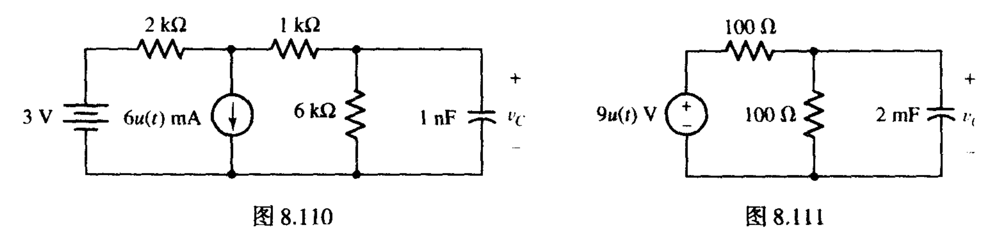


图 8.110　　图 8.111

82. 图 8.112 所示电路中的开关已经闭合了很长时间，$t = 0$ 时开关打开，求对所有时间都有效的 i_A。
83. 图 8.112 所示电路中的开关已经闭合了很长时间，$t = 0$ 时开关打开，求对所有时间都有效的 i_A。
84. 图 8.113 所示电路中的开关已经打开了很长时间，$t = 0$ 时开关突然闭合，求 i_{in} 在 t 等于：(a) −1.5 s；(b) 1.5 s 时的值。

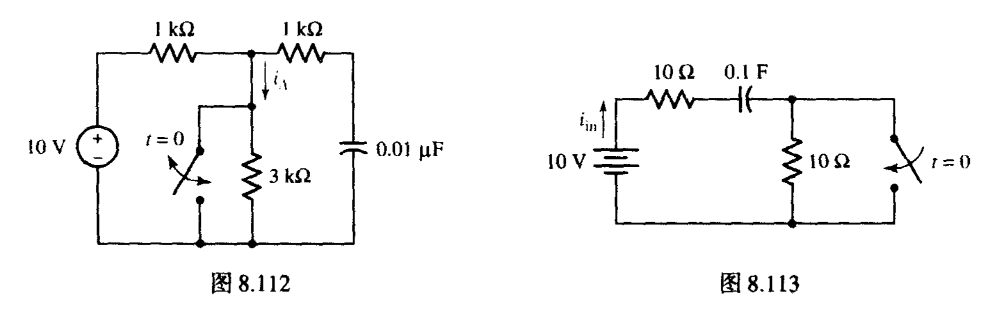


图 8.112　　图 8.113

85. 电路如图 8.114 所示，假设 $v_s = -12u(-t) + 24u(t)$，求下列变量在 $-5\ ms < t < 5\ ms$ 时间内的代数表达式并画出波形：(a) $v_C(t)$；(b) $i_{in}(t)$。
86. 求图 8.115 所示电路中 v_C 在 $t > 0$ 时的表达式。

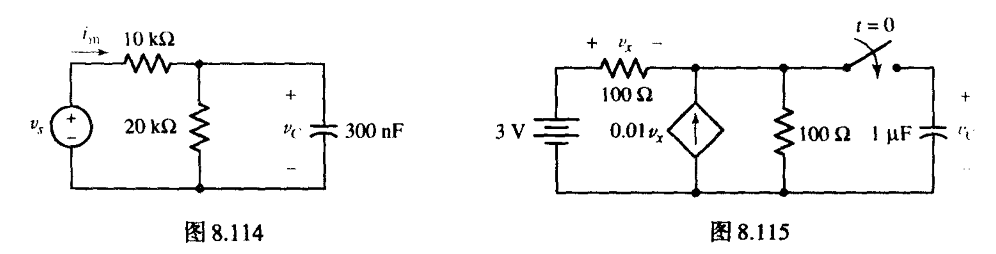


图 8.114　　图 8.115

87. 电路如图 8.116 所示，求 $t = 0.4$ s 和 0.8 s 时 $v_C(t)$的值。

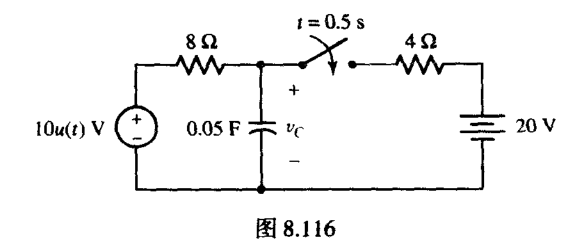


图 8.116

88. 在图 8.117 所示的电路中，(a) 求针对所有时间的 $v_C(t)$；(b) 画出 $-1\text{ s} < t < 2\text{ s}$ 区间内 $v_C(t)$ 的波形。用 PSpice 对结果进行验证。

89. 在图 8.118 所示的电路中，求：(a) $t < 0$ 和 (b) $t > 0$ 时的 $v_R(t)$。现在假设开关闭合很长时间并在 $t = 0$ 时打开，求：(c) $t < 0$ 和 (d) $t > 0$ 时的 $v_R(t)$。

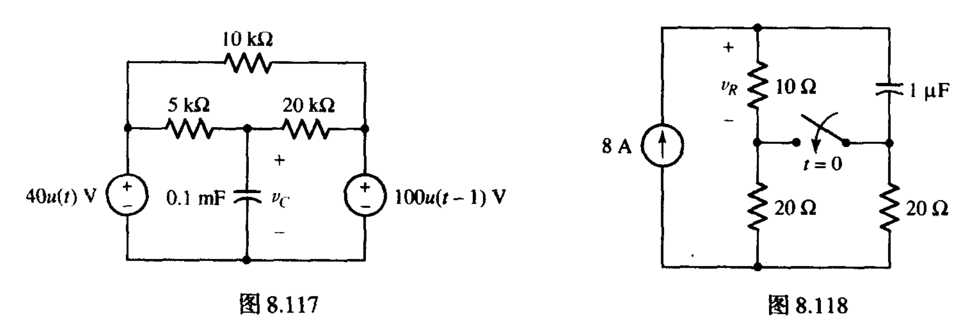


图 8.117　　图 8.118

90. 图 8.119 所示电路中的开关位于 A 已经很长时间了。在 $t = 0$ 时移向 B，并在 $t = 1$ ms 时移回到 A。求使 $v_C(1\text{ ms}) = 8$ V，$v_C(2\text{ ms}) = 1$ V 的 R_1 和 R_2 的值。

91. 电路如图 8.120 所示，求 $t = 0$ 之后第一次 $v_x = 0$ 的时刻。

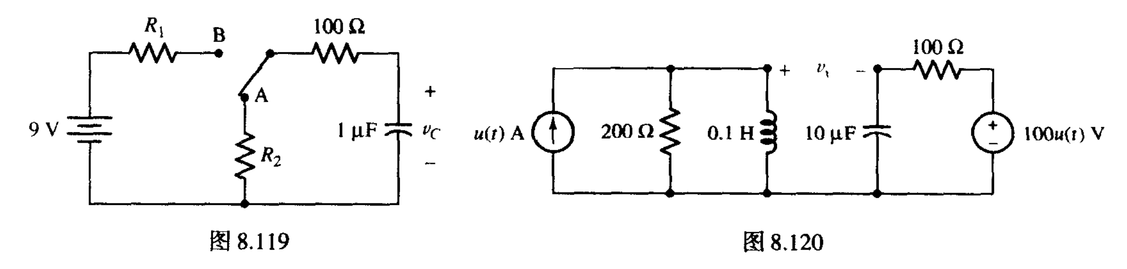


图 8.119　　图 8.120

92. 在图 8.121 所示的电路中，$t = 0$ 时，一个开关打开，同时另一个开关闭合。画出 1 kΩ 电阻在 $-1\text{ ms} \leqslant t \leqslant 7\text{ ms}$ 区间内吸收功率的波形。在 $t = 0$ 时，1 mA 电源也关闭。

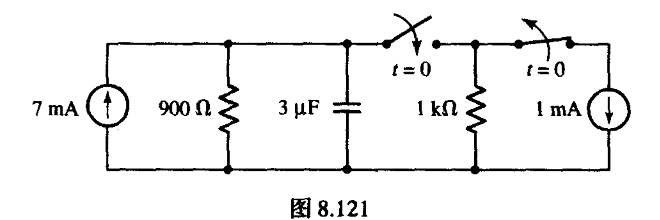


图 8.121

93. 图 8.122 所示电路中的开关已闭合好几天了：(a) 求 $t = 5.45$ ms 时的 v；(b) 求 4.7 kΩ 的电阻在 $t = 1.7$ ms 时所消耗的功率；(c) 求开关打开后在 4.7 kΩ 的电阻上转化为热量的总能量。

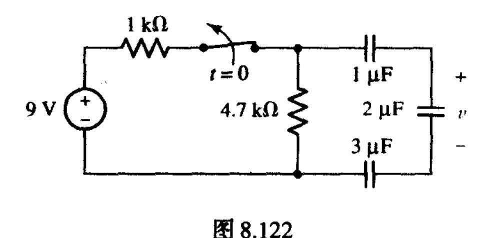


图 8.122

94. 假定图 8.123 所示电路中的运放是理想的，求针对所有时间的 $v_x(t)$。

95. 假定图 8.124 所示电路中的运放是理想的：(a) 求针对所有时间的 $v_o(t)$；(b) 用 PSpice 对结果进行验证。提示：可以在 Probe 中的 Trace Expression 框中键入表达式来画出该函数的曲线。

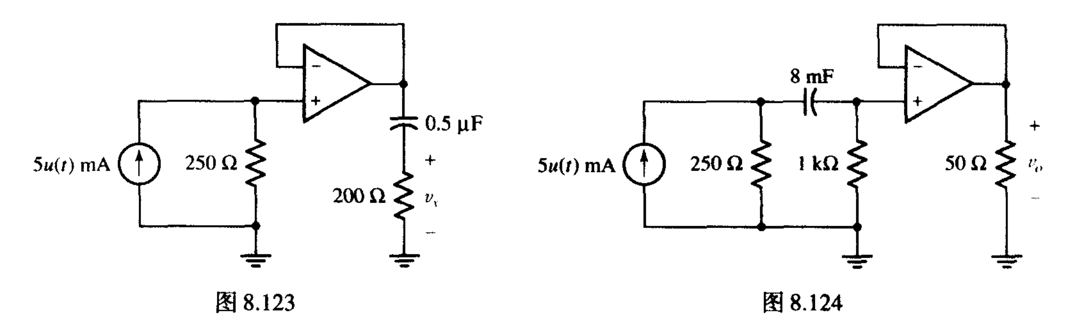


图 8.123　　图 8.124

96. (a) 求出图 8.125 所示的 RL 电路的 $i_L(0)$；(b) 利用(a)中求出的初始值和 PSpice 求出 $t = 50$ ms 时的 i_L。

97. (a) 假定图 8.126 所示电路中的运放是理想的，并且 $v_C(0) = 0$，求针对所有时间的 $v_o(t)$的表达式；(b) 用 PSpice 对结果进行验证。提示：可以在 Probe 中的 Trace Expression 框中键入表达式来画出该函数的曲线。

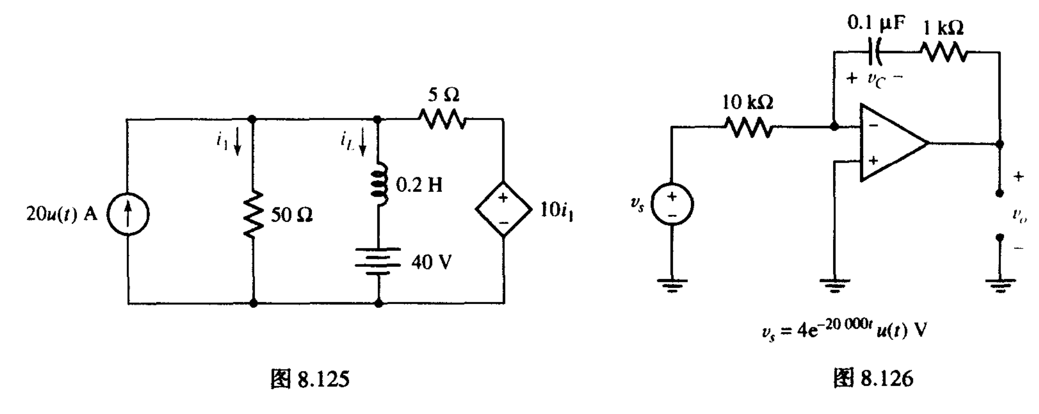


图 8.125　　图 8.126

98. 设计一个电路来控制房间的电灯，使得开关断开后电灯还能够继续亮5秒钟，假定灯泡的功率为 40 W，采用 115 V 的交流电供电。

99. 一个运动检测装置安装在某安全系统中，但它对电力系统的电压波动过于敏感。解决的方法是在传感器和报警电路之间插入延时电路，这样可以减少虚警。假定该运动传感器的戴维南等效电路为2.37 kΩ 的电阻与 1.5 V 电源的串联组合，报警电路的戴维南等效电阻为 1 MΩ。设计一个电路，将其插入到传感器和报警电路之间，报警电路要求传感器信号至少持续 1 s。运动传感器/报警电路按如下方式工作：传感器持续给报警电路提供一个小电流，直到检测到运动为止，此时电流中断。

8.9 连续开关电路的响应预测

100. (a) 在 PSpice 中构建一个脉冲波形来模拟习题 53 中的电压波形 v_B，并利用 Probe 画出波形。（提示：将该电源接到一个电阻上进行仿真）；(b) 在 PSpice 中构建一个脉冲波形来模拟习题 53 中的电流波形 i_C，并利用 Probe 画出波形。

101. (a) 图 8.127 所示的电路由一个脉冲波形 $v_S(t)$激励，$v_S(t)$的最小值为 0 V，最大值为 3 V，脉冲宽度为 2 s，周期为 5 s。画出电阻电压 v_R 在 $0\text{ s} \leqslant t < 20\text{ s}$ 区间内的波形；(b) 执行相应的 PSpice 仿真验证结果。

102. (a) 图 8.128 所示的电路由一个脉冲波形 $v_S(t)$ 激励，$v_S(t)$ 的最小值为 0 V，最大值为 5 V，脉冲宽度为 5 s，周期为 5.5 s。画出电感电流 i_L 在 $0\ \text{s} \leqslant t < 20\ \text{s}$ 区间内的波形；(b) 执行相应的 PSpice 仿真验证结果。

103. 图 8.129 所示电路中的电压源 v_S 是一个脉冲电源，其最小值为 2 V，最大值为 10 V，脉冲宽度为 4 *RC*。画出电容电压的波形，假设 v_S 的两个脉冲之间的间隔为：(a) 0.1 *RC*；(b) *RC*；(c) 10 *RC*。

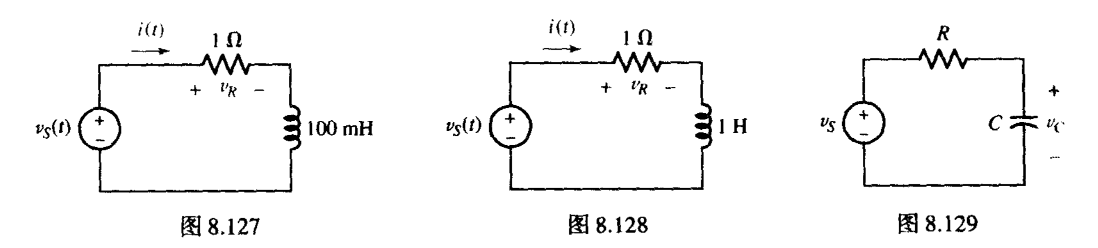
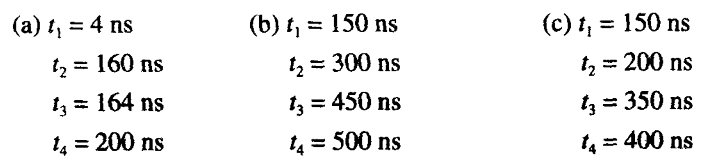


图 8.127　　图 8.128　　图 8.129

104. 参见图 8.130 所示的电路，如果 $i(t)$ 的波形如图 8.131 所示，画出 $0 \leqslant t \leqslant t_4$ 内 $i_L(t)$ 的曲线。



(a)	(b)	(c)
$t_1 = 4$ ns	$t_1 = 150$ ns	$t_1 = 150$ ns
$t_2 = 160$ ns	$t_2 = 300$ ns	$t_2 = 200$ ns
$t_3 = 164$ ns	$t_3 = 450$ ns	$t_3 = 350$ ns
$t_4 = 200$ ns	$t_4 = 500$ ns	$t_4 = 400$ ns

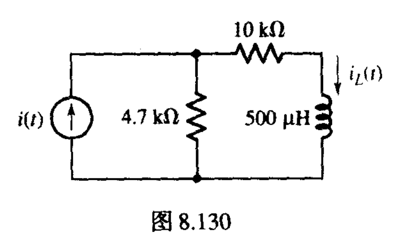


图 8.130

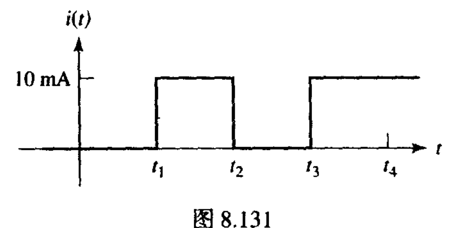


图 8.131



第9章 RLC电路

主要概念

- 串联和并联 *RLC* 电路的谐振频率与阻尼因子
- 过阻尼响应
- 临界阻尼响应
- 欠阻尼响应
- *RLC* 电路的完全响应（自由响应 + 受迫响应）
- 利用运放电路表示微分方程

引言

第8章的讨论完全集中在电阻性电路加电容或电感的电路分析，而没有对同时包含电容和电感的电路进行分析。在一个电路中同时包含电感和电容将至少得到二阶的系统，它的特征是一个包含二阶导数的线性微分方程，或两个联立的一阶线性微分方程。阶数的增加要求必须计算两个待定常数，此外，还必须确定导数的初始条件。读者将会发现，这种电路通常称为 *RLC* 电路，不仅在实际应用中非常常见，而且可以作为很好的其他系统的模型。例如，可以使用 *RLC* 电路来模拟汽车的悬挂系统，以及用来描述控制半导体晶体生长速度的温度控制器的工作特性，甚至可以用来描述飞机中对升降舵和副翼进行控制的响应。

9.1 无源并联电路

第一个任务是确定自由响应，这可以通过讨论无源电路来完成。在电路中加入直流电源、开关或阶跃电源同样可以将总响应表示成自由响应和受迫响应之和。

我们首先讨论由 *R*, *L* 和 *C* 并联构成的简单电路的自由响应。这些理想元件的组合是许多通信网络中某些电路的很好的模型。例如，它可以表示每个收音机中的一些放大器的重要部分，从而使得放大器在一个窄频带内具有很高的电压放大倍数，而在这个窄带以外放大倍数几乎为零。这种频率选择性使得我们可以听到某个电台发送的信号，却听不到其他电台的声音。其他应用包括并联 *RLC* 电路在频率复用和谐波抑制滤波器中的使用。但是，即使是简单讨论这些原理也要求理解至今还没有讨论过的谐波、频率响应、阻抗等术语，因此，可以说对并联 *RLC* 电路的工作特性的理解对于今后学习通信网络、滤波器设计以及其他应用都非常重要。

当一个实际电容与一个电感并联连接并且该电容有一个有限的电阻值时，可以得到图9.1所示的等效电路模型。存在的电阻用来模拟电容中的能量损失。随着时间的推移，所有实际电容即使没有连接在电路中，最后也都会完全放电。实际电感的能量损失同样可以考虑通过加上一个理想电阻来表示（与理想电感串联）。但是为了简化，我们只讨论理想电感与具有电阻的电容相互并联的情况。

图9.1 无源并联 *RLC* 电路

并联 RLC 电路的微分方程

在下面的分析中假定能量最初可能存储在电感和电容中，换句话说，电感电流和电容电压都存在非零初始值。参考图9.1所示的电路，写出如下单节点方程：

$$\frac{v}{R}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'-i(t_0)+C\frac{dv}{dt}=0 \tag{1}$$

注意，负号是因为假定了 i 的方向。求解式[1]必须利用以下初始条件：

$$i(0^+)=I_0 \tag{2}$$

和

$$v(0^+)=V_0 \tag{3}$$

将式[1]两边对时间进行求导，得到线性齐次二阶微分方程为

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0 \tag{4}$$

它的解 $v(t)$就是自由响应。

微分方程的解

有许多方法可以求解式[4]，它们可以在微分方程的教科书中查到，这里只使用最快且最简单的方法。首先假定一个解，然后根据直觉与经验选取出解的一个可能的形式。根据以前处理一阶方程的经验，可以尝试使用指数形式，为此假定：

$$v=Ae^{st} \tag{5}$$

如果需要，可以允许 A 和 s 为复数，从而可以尽可能地使其一般化。将式[5]代入式[4]，可得

$$CAs^2e^{st}+\frac{1}{R}Ase^{st}+\frac{1}{L}Ae^{st}=0$$

或

$$Ae^{st}\left(Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L}\right)=0$$

为了使该方程对任何时间都成立，3个因子中至少有一个为0。如果前面两个因子中的任何一个为0，那么 $v(t)=0$。该结果表明这个假定解不能满足给定的初始条件，因此只能将剩下的因子设为0：

$$Cs^2+\frac{1}{R}s+\frac{1}{L}=0 \tag{6}$$

该方程通常称为辅助方程或特征方程，如同8.1节所述。如果它可以满足，那么假定的解正确。因为式[6]是二次方程，所以它有两个解，设为 s_1 和 s_2：

$$s_1=-\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{7}$$

和

$$s_2=-\frac{1}{2RC}-\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{8}$$

如果假定解中的s为上面两个中的一个，那么该解满足所给的微分方程，于是可得到微分方程的一个有效解。

假定在式[5]中，用s_1替换s，则可以得到

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

同样，

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

前者满足以下微分方程：

$$C\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L}v_1 = 0$$

后者满足

$$C\frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L}v_2 = 0$$

将这两个微分方程相加并合并同类项，可得

$$C\frac{d^2(v_1+v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d(v_1+v_2)}{dt} + \frac{1}{L}(v_1+v_2) = 00$$

可以看出这两个解的和也是解，且满足线性原理，因此得到自由响应的一般形式为

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{9}$$

其中，s_1和s_2由式[7]和式[8]给出；A_1和A_2是两个任意常数，这两个值必须满足两个指定的初始条件。

频率变量的定义

如果画出$v(t)$随时间变化的曲线，则从式[9]给出的自由响应的形式出发并不能得到很多关于该曲线的特性。而A_1和A_2的相对幅度对于确定响应曲线的形状很重要。此外，常数s_1和s_2可以是实数或共轭复数，具体取决于给定网络中R, L和C的值，而且这两种情况会得到完全不同的响应形式，因此，有必要对式[9]进行一些简化。

因为指数$s_1 t$和$s_2 t$是无量纲的，因此s_1和s_2的单位必须为“无量纲量每秒”。因此从式[7]和式[8]可以看到$1/2RC$和$1/\sqrt{LC}$的单位也必须为s^{-1}（即秒$^{-1}$）。这种类型的单位称为频率。

下面定义一个新的变量ω_0：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10}$$

这里将其预留给谐振频率。另一方面，我们将$1/2RC$称为奈培频率或者指数阻尼系数，用符号α表示为

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{11}$$

之所以称α为指数阻尼系数，是因为它表示自由响应衰减到其稳态值或终值（通常为零）的快速程度。s, s_1和s_2称为复频率，它是进行下一步讨论的基础。

应该注意，s_1, s_2, α和ω_0只是用来简化RLC电路讨论的符号，它们没有任何新的特性。例如，说“α”要比说“$2RC$的倒数”来得简单。

利用这些结果可写出并联RLC电路的自由响应为

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad [9]$$

其中

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad [12]$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad [13]$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad [11]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [10]$$

其中，A_1和A_2必须通过初始条件求得。

说明： 控制系统领域的工程师喜欢把α与ω_0的比值用ζ表示，称为阻尼比。

可见，式[12]和式[13]有两种可能的情况，具体取决于α和ω_0的相对大小（由R, L和C确定）。如果$\alpha > \omega_0$，那么s_1和s_2都是实数，得到的响应称为过阻尼响应。相反，如果$\alpha < \omega_0$，那么s_1和s_2都具有非零的虚部，得到的响应称为欠阻尼响应。下面将分别讨论这两种情况以及$\alpha = \omega_0$的特殊情况，这种情况下得到的响应称为临界阻尼响应。另外还应该注意由式[9]~式[13]组成的一般响应不仅能够描述电压，而且能够描述并联*RLC*电路中的所有3个支路电流。当然，每种情况下的常数A_1和A_2各不相同。

例题9.1　考虑一个并联*RLC*电路，电感为10 mH，电容为100 μF。求产生过阻尼响应和欠阻尼响应的电阻值。

解： 首先计算电路的谐振频率：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

如果$\alpha > \omega_0$则产生过阻尼响应，如果$\alpha < \omega_0$则产生欠阻尼响应，因此，

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

所以

$$R < \frac{1}{(2000)(100 \times 10^{-6})}$$

或

$$R < 5\ \Omega$$

这将得到过阻尼响应，$R > 5\ \Omega$将得到欠阻尼响应。

练习

9.1　一个并联*RLC*电路包含一个100 Ω电阻，其他参数包括：$\alpha = 1000\ \text{s}^{-1}$和$\omega_0 = 800$ rad/s。求：(a) C; (b) L; (c) s_1; (d) s_2。

答案： 5 μF；312.5 mH；$-400\ \text{s}^{-1}$；$-1600\ \text{s}^{-1}$。

9.2 过阻尼并联 *RLC* 电路

比较式[10]和式[11]可以看出，如果 $LC > 4R^2C^2$，那么 α 将大于 ω_0。在这种情况下，s_1 和 s_2 中的根号均为实数，s_1 和 s_2 也都为实数。此外，将下列不等式应用到式[12]和式[13]中，可以得到 s_1 和 s_2 都为负实数：

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

因此，响应 $v(t)$ 可以表示成两个衰减指数项的代数和，并且随着时间增大，每项都将趋近于零。事实上，因为 s_2 的绝对值大于 s_1 的绝对值，因此包含 s_2 的项有更大的衰减速度，并且对于较大的时间值，可以写出其极限表达式为

$$v(t) \to A_1 e^{s_1 t} \to 0 \qquad \text{当}\, t \to \infty\, \text{时}$$

接下来确定符合初始条件的常数 A_1 和 A_2。对于该 *RLC* 电路，选择 $R = 6\ \Omega$, $L = 7$ H。为了便于计算，选择 $C = \frac{1}{42}$ F。电路的初始储能由初始电压 $v(0) = 0$ 和初始电感电流 $i(0) = 10$ A 表示，其中 v 和 i 的定义如图 9.2 所示。

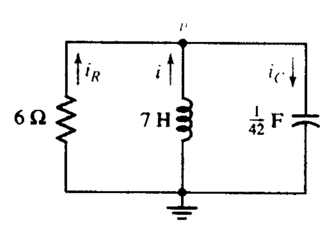


图 9.2 用于数值分析例题的并联 *RLC* 电路，该电路为过阻尼电路

可以很容易确定以下几个参数值：

$$\alpha = 3.5 \qquad \omega_0 = \sqrt{6} \qquad (\text{对于所有的}\ s^{-1})$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -6$$

我们可以立即得到自由响应的一般形式：

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \qquad [14]$$

计算 A_1 和 A_2 的值

现在只需要计算两个常数 A_1 和 A_2 了。如果已知响应 $v(t)$ 在两个不同时刻的值，那么可以将这两个值代入式[14]来求得 A_1 和 A_2。但是我们只知道 $v(t)$ 的一个瞬时值：

$$v(0) = 0$$

因而，

$$0 = A_1 + A_2 \qquad [15]$$

通过对式[14]中的 $v(t)$ 对时间求导，可以得到将 A_1 和 A_2 联系起来的第二个方程，而利用另一个初始条件 $i(0) = 10$ A 就可确定导数 dv/dt 的初始值。最后，令这两个结果相等，就可得到所需的方程。式[14]两边对 t 求导：

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

计算 $t = 0$ 时的导数：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

得到第二个方程。看起来这似乎有助于求解，但是因为不知道导数的初始值，所以并没有真正得到关于两个未知量的两个方程。我们该怎么办呢？注意：表达式 dv/dt 表示的是电容电流，这是因为

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

基尔霍夫电流定理在任何时刻都必须成立，因为它基于电荷守恒定理。因此，可以写出

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

将电容电流代入并除以 C，可得

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0)+i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420\ \text{V/s}$$

因为电阻上的零初始电压要求流过电阻上的初始电流也等于零，因此得到第二个方程：

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad [16]$$

求解式[15]和式[16]得到 $A_1 = 84$，$A_2 = -84$。因此，该电路自由响应的最终数值解为

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})\ \text{V} \qquad [17]$$

说明： 在对 RLC 电路的讨论中，需要注意的是：完全确定响应总是需要两个初始条件。其中的一个条件往往很容易得到，即根据电压或者电流在 $t=0$ 处的值即可得到。在寻找第二个方程时通常要麻烦一些，因为尽管在讨论中已知初始电流和初始电压，但其中的一个需要通过对所假定的解求导来间接得到。

例题 9.2 求图9.3(a)所示电路中 $v_C(t)$ 在 $t>0$ 时的表达式。

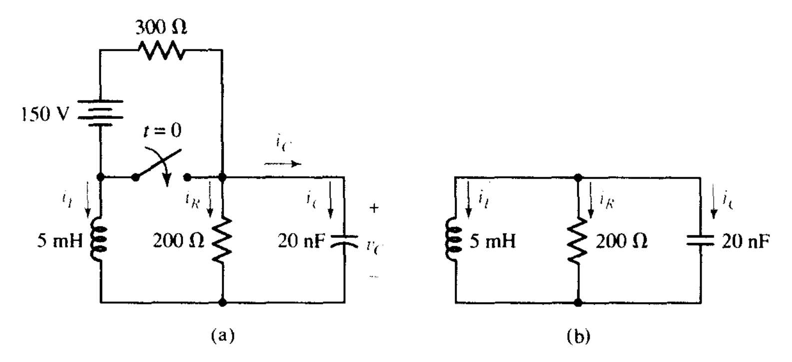


图9.3 (a)一个 RLC 电路，在 $t=0$ 时变为无源电路；(b) $t>0$ 时的电路，其中由于开关的作用，150 V电源和300 Ω电阻被短路，因此不再与 v_C 相关

解： ▶ **明确题目要求**

需要求开关闭合后的电容电压。开关闭合断开了连接到电感或电容上的电源，因此 v_C 将随时间衰减。

▶ **收集已知信息**

开关闭合后，电容与200 Ω电阻和5 mH电感并联［见图9.3(b)］。因此，$\alpha = 1/2RC = 125\,000\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100\,000\ \text{rad/s}$，$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -50\,000\ \text{s}^{-1}$，$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200\,000\ \text{s}^{-1}$。

▶ **设计方案**

因为 $\alpha > \omega_0$，因此该电路为过阻尼电路，电容电压的形式为

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

已知s_1和s_2，需要利用初始条件来确定A_1和A_2。为此，需要分析$t=0^-$时的电路［见图9.4(a)］来求得$i_L(0^-)$和$v_C(0^-)$。假设这些值不发生变化，然后分析$t=0^+$时的电路。

▶ 建立一组合适的方程

在图9.4(a)中，电感短路且电容开路，可以得到

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200+300} = -300\ \text{mA}$$

和

$$v_C(0^-) = 150\frac{200}{200+300} = 60\ \text{V}$$

在图9.4(b)中，画出$t=0^+$时的电路，其中分别用电源表示电感电流和电容电压来简化电路。因为它们这两个量都不能在零时间内发生变化，因此$v_C(0^+)=60$ V。

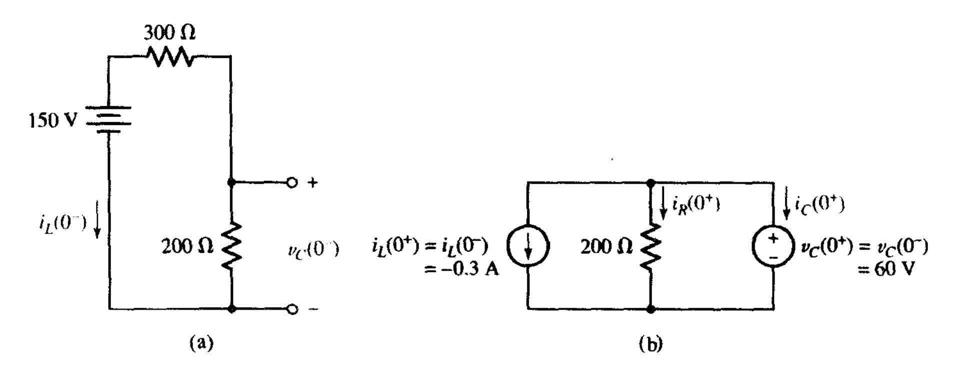


图9.4 (a) $t=0^-$时的等效电路；(b) $t=0^+$时的等效电路，利用理想电源表示初始电感电流和初始电容电压

▶ 确定是否需要其他信息

已经得到电容电压方程：$v_C(t)=A_1e^{-50\,000t}+A_2e^{-200\,000t}$。现在已知$v_C(0)=60$ V，但仍需要第三个方程。对电容电压方程进行微分：

$$\frac{dv_C}{dt} = -50\,000A_1e^{-50\,000t} - 200\,000A_2e^{-200\,000t}$$

可以将它表示成电容电流$i_C=C(dv_C/dt)$。回到图9.4(b)，利用KCL可以得到$i_C(0^+)=-i_L(0^+)-i_R(0^+)=0.3-\{v_C(0^+)/200\}=0$。

▶ 尝试求解

应用第一个初始条件得到：

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

应用第二个初始条件得到：

$$i_C(0) = -20\times10^{-9}(50\,000A_1 + 200\,000A_2) = 0$$

求解可得$A_1=80$ V和$A_2=-20$ V，所以$v_C(t)=80e^{-50\,000t}-20e^{-200\,000t}$ V，$t>0$。

▶ 验证结果是否合理或是否与预计一致

我们至少可以验证$t=0$时的结果。验证得到$v_C(0)=60$ V。求导并乘以20×10^{-9}也可以验证$i_C(0)=0$。

练习

9.2 图9.5所示电路中的开关已经打开很长时间了，在 $t=0$ 时闭合。求：(a) $i_L(0^-)$；(b) $v_C(0^-)$；(c) $i_R(0^+)$；(d) $i_C(0^+)$；(e) $v_C(0.2)$。

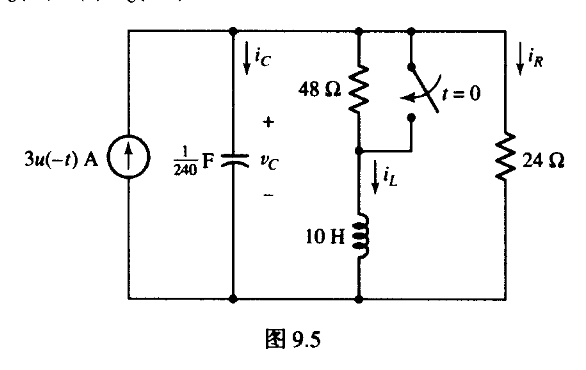
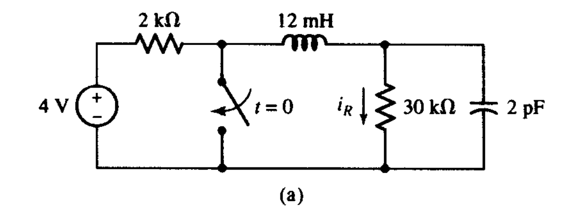


图9.5

答案：1 A；48 V；2 A；−3 A；−17.54 V。

前面已经提到，过阻尼响应的形式可以适用于任何电压和电流量，在下面的例子中可以看到这一结论。

例题9.3 $t=0$ 之后图9.6(a)所示的电路可以简化成一个简单并联 *RLC* 电路。求电阻电流 i_R 对所有时间有效的表达式。



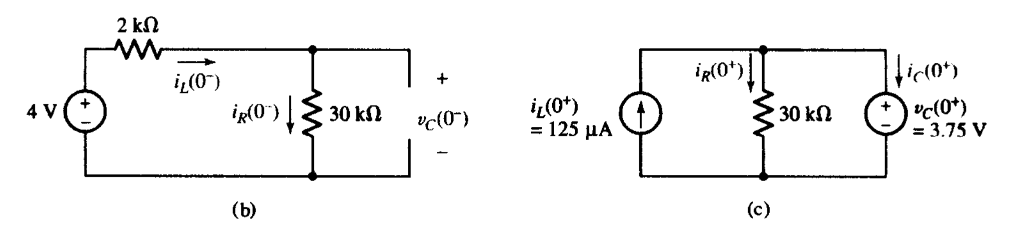


图9.6 (a) 需要求 i_R 的电路；(b) $t=0^-$ 时的等效电路；(c) $t=0^+$ 时的等效电路

解：如果 $t>0$ 之后，该电路为过阻尼电路，则响应为

$$i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \qquad t > 0 \tag{18}$$

当 $t>0$ 时，该并联 *RLC* 电路有 $R=30\ \text{k}\Omega$，$L=12\ \text{mH}$，$C=2\ \text{pF}$。因此，$\alpha=8.333\times10^6\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0=6.455\times10^6\ \text{rad/s}$，从而是一个过阻尼响应且 $s_1=-3.063\times10^6\ \text{s}^{-1}$，$s_2=-13.60\times10^6\ \text{s}^{-1}$。为了确定 A_1 和 A_2 的值，首先分析 $t=0^-$ 时的电路，如图9.6(b)所示，可以看到 $i_L(0^-)=i_R(0^-)=4/32\times10^3=125\ \mu\text{A}$，$v_C(0^-)=4\times30/32=3.75\ \text{V}$。

在 $t=0^+$ 时的电路中［见图9.6(c)］，我们只知道 $i_L(0^+)=125\ \mu\text{A}$，$v_C(0^+)=3.75\ \text{V}$。但是，根据欧姆定律可以计算得到 $i_R(0^+)=3.75/30\times10^3=125\ \mu\text{A}$，这是第一个初始条件。因此，

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \qquad [19]$$

如何得到第二个初始条件呢？如果将式[18]乘以 30×10^3，可以得到 $v_C(t)$的表达式。对它求导并乘以 2 pF 得到 $i_C(t)$的表达式为

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

根据 KCL 可得

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

因此，

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \qquad [20]$$

求解式[19]和式[20]，得到 $A_1 = 161.3\ \mu A, A_2 = -36.34\ \mu A$。因此，

$$i_R = \begin{cases} 125\ \mu A & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063\times 10^6 t} - 36.34e^{-13.6\times 10^6 t}\ \mu A & t > 0 \end{cases}$$

练习

9.3 电路如图 9.7 所示，如果 $i_L(0^-) = 6A$, $v_C(0^+) = 0$ V，$t > 0$，求流过电阻的电流 i_R，电路在 $t = 0$之前的结构未知。

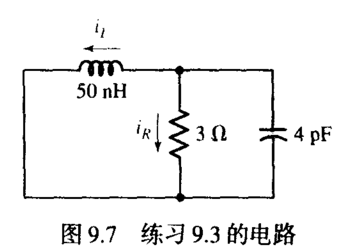


图 9.7 练习 9.3 的电路

答案：$i_R(t) = 6.008(e^{-8.328 \times 10^{10} t} - e^{-6.003 \times 10^7 t})$ A, $t > 0$。

过阻尼响应的图形表示

现在分析式[17]，看看是否可以得到关于该电路的一些额外信息。可以把第一个指数项看成时间常数为 1 s，而另一项的时间常数为 $\frac{1}{6}$ s。两者都从单位大小开始衰减，但后者衰减得更快，并且 $v(t)$始终为正。随着时间趋近无穷大，每项都趋近于零，最终响应消失。因此响应曲线在 $t = 0$时为零，在 $t = \infty$时为零，并且始终为非负。因为该响应不是处处为零，因此必定有一个最大值并且不难计算。对响应进行微分：

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

令导数等于零，求电压取得最大值的时刻 t_m：

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

再运算一次：

$$e^{5t_m} = 6$$

可得

$$t_m = 0.358\ \text{s}$$

和

$$v(t_m) = 48.9\ \text{V}$$

分别画出两个指数项$84e^{-t}$和$84e^{-6t}$的曲线，然后取它们的差值便可以得到响应曲线，如图9.8所示，这两个指数项用浅色曲线表示，它们的差值［即总响应$v(t)$］用彩色曲线画出。该曲线也可以验证前面的预测，对于较大的t，函数$v(t)$的特性主要表现为$84e^{-t}$，即包含s_1和s_2中幅度较小的指数项。

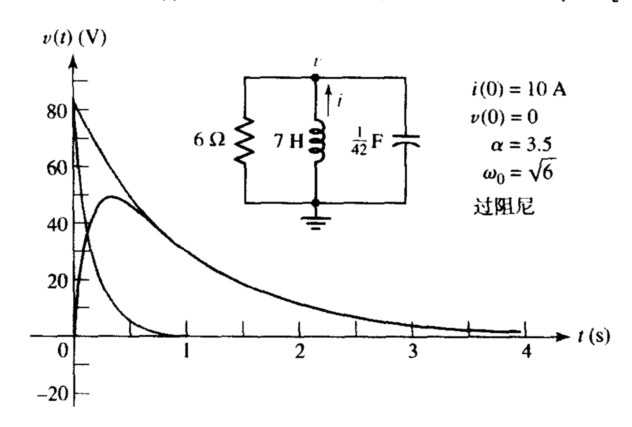


图9.8 图9.2所示网络的响应 $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$

人们经常会问的一个问题是响应的瞬态实际需要多长时间会发生部分消失（或衰减掉）。实际上，希望瞬态响应越快趋近于零越好，就是要求下降时间t_s最小。当然从理论上讲，t_s为无穷大，因此$v(t)$在有限时间内永远不会达到零。但是当$v(t)$的幅度下降到低于最大绝对值$|v_m|$的1%时，该存在的响应可以忽略。下降到这个值所需要的时间定义为下降时间。在本例中，因为$|v_m| = v_m = 48.9$ V，因此下降时间是响应下降到0.489 V时所需要的时间。用该值替代式[17]中的$v(t)$并忽略第二个指数项，可求得下降时间为5.15 s。

例题9.4 当$t > 0$时，某无源并联RLC电路中的电容电流为$i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A。画出0 s < t < 5 s范围内电流的曲线并计算下降时间。

解： 首先画出两个单独项所表示的曲线，如图9.9所示。然后将它们相减得到$i_C(t)$。显然，最大值为$|-2| = 2$ A。因此需要求出$|i_C|$减小到20 mA时所需的时间，或

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [21]$$

可以使用科学计算器的迭代方法求出结果为$t_s = 5.296$ s。如果没有这个计算器，则可以将当$t \geqslant t_s$时的式[21]近似为

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \qquad [22]$$

解得：

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298\ \text{s} \qquad [23]$$

它非常接近于精确解（精度优于0.1%）。

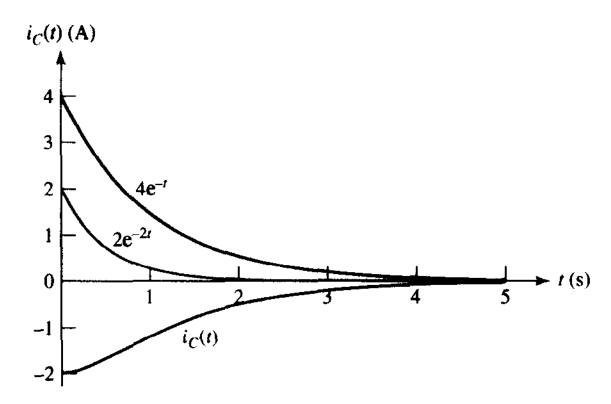


图 9.9 电流响应 $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$ A 及其两个单独项所表示的曲线

练习

9.4 (a) 画出电压 $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$ V 在 0 s < t < 5 s 范围内的曲线；(b) 估计下降时间；(c) 计算最大正值以及出现该值的时间。

答案：(a) 参见图 9.10；(b) 4.605 s；(c) 544 mV，896 ms。

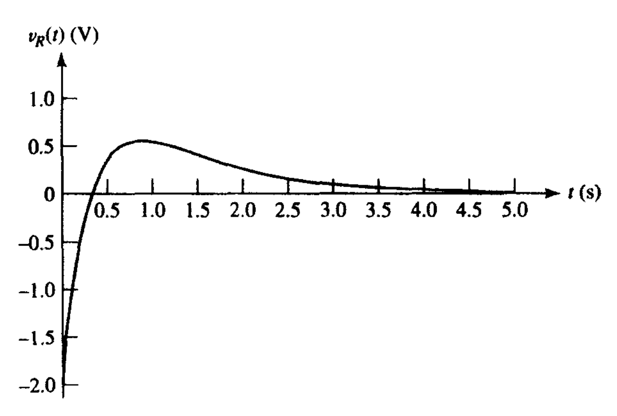


图 9.10 练习 9.4(a)的响应曲线

9.3 临界阻尼响应

过阻尼情况的特征是

$$\alpha > \omega_0$$

或

$$LC > 4R^2C^2$$

这使得 s_1 和 s_2 都是负实数，响应被表示成两个负指数的代数和。

现在调整元件值使得 α 和 ω_0 相等。这是一种非常特殊的情况，称为临界阻尼。如果试着构造一个属于临界阻尼的并联 RLC 电路，那么可能是在做一件不可能的事情，因为不能够使 α 和 ω_0 完全相等。但是考虑到完整性，我们将讨论临界阻尼电路，因为它是过阻尼和欠阻尼之间的一个过渡。

说明：所谓“不可能”是一种很强的语气，这么说是因为在实际中很难使元件的实际值在 1% 范围以内接近其标称值，因此得到精确等于 $4R^2C$ 的 L 只有理论上的可能性。即使为了找到正确的参数而愿意测量大量的元件，也不太可能实现。

当满足下式时得到临界阻尼：

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C\end{aligned}\right\}\text{临界阻尼}$$

在9.1节最后讨论的例子中，通过改变3个元件中任何一个的值可以达到临界阻尼。我们来改变R：增大R的值直至达到临界阻尼，这时ω_0保持不变。得到R等于$7\sqrt{6}/2\ \Omega$；L仍为7 H，C保持1/42 F不变，因此求得

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

指定的初始条件为$v(0) = 0, i(0) = 10$ A。

临界阻尼响应的形式

假定响应是两个指数的和：

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

可以写成

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

此时，可能会感觉失去了求解的方向。得到的响应只包含一个常数，但却有两个初始条件：$v(0) = 0$和$i(0) = 10$ A。这个唯一的常数必须满足这两个条件。如果设$A_3 = 0$，那么$v(t) = 0$，这与初始电容电压一致。但是，尽管在$t = 0^+$时刻电容中没有能量，然而在电感中却储存了350 J的初始能量，这将导致瞬态电流流出电感，使得所有3个元件两端都有非零电压。这与我们提出的结果相矛盾。

以上的数学推导和电路分析过程都很严密，因此如果以上的推导并没有错误却造成了现在的困境，那必然是由于从一个并不正确的假定开始所导致。而前面只做了一个假定，即假定微分方程的解具有上面的形式。现在看来，对于临界阻尼这种特殊情形，这个假定并不正确。当$\alpha = \omega_0$时，微分方程式[4]变为

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

该方程的解并不难求得，但我们在这里不求解该方程，因为任何一本微分方程教科书中都可以找到这种标准类型的方程。方程的解为

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \qquad [24]$$

必须注意该解仍然可以表示成两项之和，其中一项是熟悉的负指数，另一项是一个负指数的t倍。还应该注意方程的解包含两个待定常数。

求 A_1 和 A_2

现在来完成上面的数值例子。将α的已知值代入式[24]，得到

$$v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

首先，利用 $v(t)$本身的初始条件 $v(0)=0$ 来确定 A_1 和 A_2 的值，得到 $A_2=0$。得到这个简单结果是因为已选取了响应 $v(t)$的初始值为零，而对于一般情形，通常需要联立求解两个方程来解出 A_1 和 A_2。与阻尼情形一样，第二个初始条件必须在导数 dv/dt 中使用。因此，我们对 v 进行求导，并记住已得到了 $A_2=0$，这时：

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

计算 $t=0$ 时的值：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

用初始电容电流来表示该导数：

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

其中，i_C, i_R 和 i 的参考方向如图 9.2 所示，因此，

$$A_1 = 420\ \text{V}$$

所以响应为

$$v(t) = 420t\,e^{-2.45t}\ \text{V} \qquad [25]$$

临界阻尼响应的图形表示

在详细画出该响应之前，先通过定性分析确定它的形状。指定的初始值为零，并且满足式[25]。显然不能马上得到响应随着 t 变为无穷大而趋近于零，因为 $te^{-2.45t}$ 是一个不确定的形式。但是很容易利用罗比塔（L'Hôspital）法则来解决该难题，从而可以得到

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

再一次可以看到该响应从零开始，以零终止，并且始终为正值。在 t_m 时刻有一个最大值 v_m。对于本例：

$$t_m = 0.408\ \text{s} \qquad 和 \qquad v_m = 63.1\ \text{V}$$

该最大值大于过阻尼情况下得到的最大值，这是因为电阻越大，损失越小。出现最大值的时间比过阻尼情况下要晚。求解下式可以确定下降时间 t_s：

$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

则 t_s 为（利用试探法或者计算器的 SOLVE 程序）

$$t_s = 3.12\ \text{s}$$

这比过阻尼情况中得到的值（5.15 s）要小得多。实际上，可以证明，在 L 和 C 给定的情况下，选取 R 值使得电路达到临界阻尼时，其下降时间比选取任何其他 R 值使电路过阻尼时的下降时间都要小。不过，将电阻再增大一些还可以得到更好（即更小）的下降时间。轻微欠阻尼的响应将在它消失之前与时间轴相交，从而得到最短的下降时间。

临界阻尼响应曲线如图 9.11 所示，它与过阻尼（以及欠阻尼）情形的比较可参考图 9.16。

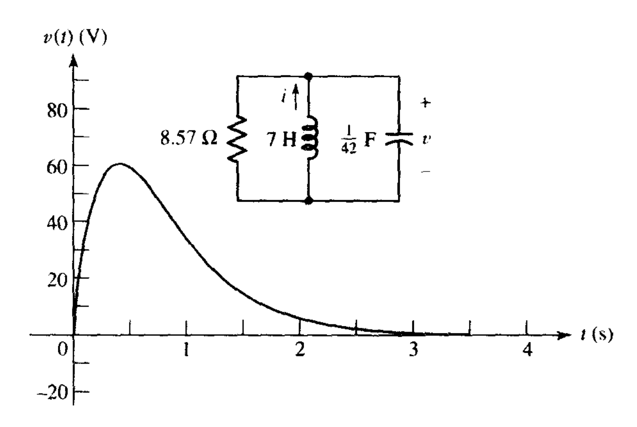


图9.11 通过改变图9.2所示网络中的电阻R得到的临界阻尼响应，$v(t) = 420te^{-2.45t}$

例题9.5 选择R_1的值使图9.12所示电路在$t>0$时具有临界阻尼响应的特性，选择R_2的值使$v(0) = 2$ V。

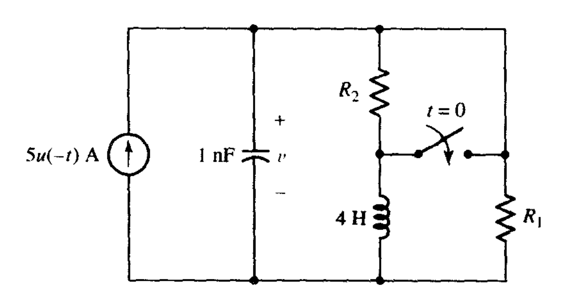


图9.12 给定电路，在开关闭合后简化成一个并联RLC电路

解：我们注意到在$t = 0^-$时，电流源工作，电感短路，因此R_2两端的电压$v(0^-)$为

$$v(0^-) = 5R_2$$

选择R_2的值等于400 mΩ，得到$v(0) = 2$ V。

开关闭合后，电流源关闭，R_2被短路。则电路变为并联RLC电路，它包含R_1、一个4 H电感以及一个1 nF电容。

通过计算可得（对于$t>0$）

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times10^{-9}R_1}$$

和

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4\times10^{-9}}} = 15\ 810 \text{ rad/s}$$

因此，为了使电路在$t>0$时具有临界阻尼响应，需要选择$R_1 = 31.63$ kΩ。（注意：尽管把结果舍入成4位有效位，但这仍然不是精确的临界阻尼响应。）

练习

9.5 (a) 电路如图9.13所示，选取R_1的值使得$t=0$之后的响应为临界阻尼响应；(b) 选取R_2的值使得$v(0)=100$ V；(c) 求出$t=1$ ms时的$v(t)$。

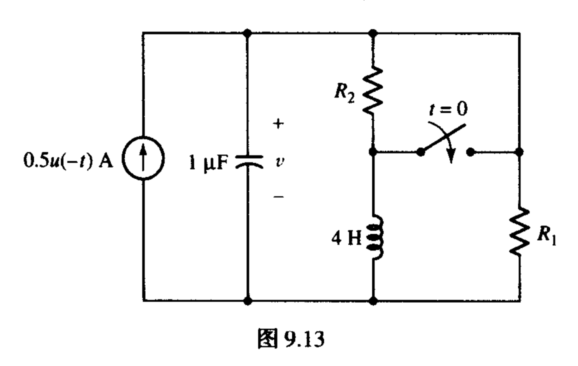


图9.13

答案：1 kΩ；250 Ω；−212 V。

9.4 欠阻尼并联*RLC*电路

继续9.3节的分析，即再度增大R，我们将得到称为欠阻尼响应的情形。因此，阻尼系数α减小，而ω_0保持不变，α^2将小于ω_0^2，s_1和s_2公式中根号里面的表达式将为负数，这使得此时的响应呈现出与以前不同的特性，不过这时并不需要回到基本微分方程进行求解。利用复数可以将指数形式的响应表示为衰减的正弦响应。该响应完全由实量组成，这里的复量只用于推导①。

欠阻尼响应的形式

从指数形式开始：

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

其中

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

然后设

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

其中，$j \equiv \sqrt{-1}$。

说明：在电子工程中，使用"j"替换"i"来表示$\sqrt{-1}$，以避免与电流相混淆。

现在采用新的平方根，对于欠阻尼情况，它是实数，我们称它为本征谐振频率ω_d：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

现在响应可以写成

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \qquad [26]$$

① 关于复数的复习，请参见附录5。

或写成比较长的等效形式：

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left\{(A_1+A_2)\left[\frac{\mathrm{e}^{j\omega_d t}+\mathrm{e}^{-j\omega_d t}}{2}\right]+j(A_1-A_2)\left[\frac{\mathrm{e}^{j\omega_d t}-\mathrm{e}^{-j\omega_d t}}{j2}\right]\right\}$$

应用附录5中的恒等式，上面方程中第一个方括号内的表达式等于$\cos\omega_d t$，第二个方括号内的表达式等于$\sin\omega_d t$，因此，

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[(A_1+A_2)\cos\omega_d t+j(A_1-A_2)\sin\omega_d t\right]$$

用新的符号表示乘积因子：

$$v(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t) \qquad [27]$$

其中，式[26]和式[27]相等。

奇怪的一点是最初表达式中有复数，但现在完全是实数。应该记住，最初允许A_1, A_2, s_1和s_2为复数。不管怎样，如果处理的是欠阻尼情形，现在已经得到了与复数无关的表达式，因此不必再考虑复数了。因为α，ω_d和t均为实量，所以$v(t)$也必然是一个实量（它可以显示在示波器和电压计上，或者画在图纸上）。式[27]是所求的欠阻尼响应的函数形式，可以通过将它直接代入原来的微分方程来验证其正确性，这项工作就留给那些心有疑虑的读者。同样，必须选取两个实常量B_1和B_2，以满足给定的初始条件。

回到图9.2所示的简单并联RLC电路，其中$R=6\ \Omega$, $C=1/42$ F, $L=7$ H，现在将电阻进一步增大到10.5 Ω，因此，

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=2\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{6}\ \mathrm{s}^{-1}$$

和

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=\sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}$$

除了常数未知，已经求得的响应为

$$v(t)=\mathrm{e}^{-2t}(B_1\cos\sqrt{2}t+B_2\sin\sqrt{2}t)$$

B_1和B_2的值

确定这两个常数的过程同前面一样。如果仍然假定$v(0)=0$, $i(0)=10$，那么B_1必定为0。因此，

$$v(t)=B_2\mathrm{e}^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

其导数为

$$\frac{dv}{dt}=\sqrt{2}B_2\mathrm{e}^{-2t}\cos\sqrt{2}t-2B_2\mathrm{e}^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

在$t=0$时刻为

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=\sqrt{2}B_2=\frac{i_C(0)}{C}=420$$

其中，i_C 如图 9.2 定义，因此，

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

欠阻尼响应的图形表示

同前面一样，因为加入了初始电压条件的缘故，所以这个响应函数的初始值为零，同时因为当 t 较大时指数项消失，因此该响应的终值为零。随着 t 从零增大到某个小的正值时，$v(t)$将以 $210\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ 的规律增大，因为此时指数项仍近似为 1。但在某个时刻 t_m，指数项开始快速衰减，其衰减速度比增长速度更快，$\sin\sqrt{2}t$ 于是在 $v(t)$达到某个最大值 v_m后开始减小。需要指出的是，t_m 并不是达到最大值时的 t 值，但它必定在达到最大值 $\sin\sqrt{2}t$ 之前。

当 $t = \pi/\sqrt{2}$ 时，$v(t)$等于零，因此，在 $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ 区间内响应为负，在 $t = \sqrt{2}\pi$ 时响应又变为零。因此，$v(t)$是一个时间的振荡函数，在无限多个时刻（即 $t = n\pi/\sqrt{2}$ 处）与时间轴相交，其中 n 为正整数。不过，在本例中，电路的响应只是轻微欠阻尼，指数项使得该函数快速地衰减，因此在该图中并不能看到更多的交点。

随着 α 的增大，响应的振荡特性越来越明显。如果 α 为零，即电阻取无穷大，那么 $v(t)$是一个无阻尼正弦波，以恒定幅度振荡。这时，不存在 $v(t)$下降并保持在其最大值的 1% 以下的时刻，所以下降时间为无限大。不过在实际中振荡过程不可能永远持续。这里之所以得到无阻尼正弦波是因为假定了电路中具有一个初始能量，但并没有给出任何消耗该能量的方式，于是能量最初位于电感，然后转到电容，接着又回到电感，如此反复，以至无穷。

有限电阻的作用

阻值有限的电阻 R 在并联 RLC 电路中充当能量的某种转移媒介，每当能量从 L 转移到 C 或者从 C 转移到 L 时，电阻就会消耗一部分能量，不久，它就会消耗完所有的能量，以至 L 和 C 上均没有能量，也没有电压和电流。不过，实际的并联 RLC 电路可以将 R 取得足够大，使得自然无阻尼振荡可以持续几年而无需额外补充能量。

回到本例，通过求导确定 $v(t)$的第一个最大值：

$$v_{m_1} = 71.8\ \text{V} \qquad t_{m_1} = 0.435\ \text{s}$$

以及后续的最小值

$$v_{m_2} = -0.845\ \text{V} \qquad t_{m_2} = 2.66\ \text{s}$$

依次类推。响应曲线如图 9.14 所示。图 9.15 中画出了几种欠阻尼电路的响应曲线。

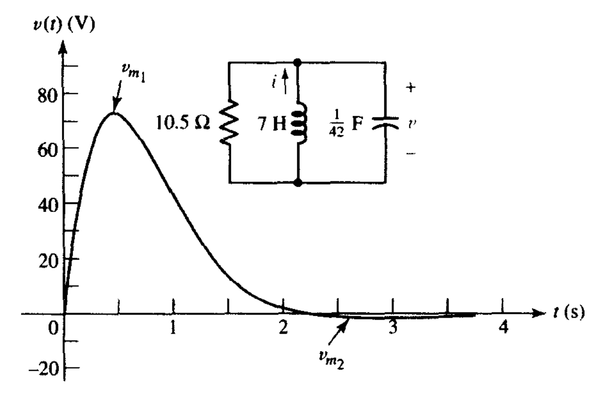


图 9.14　图 9.2 所示电路中增大 R 产生的欠阻尼响应

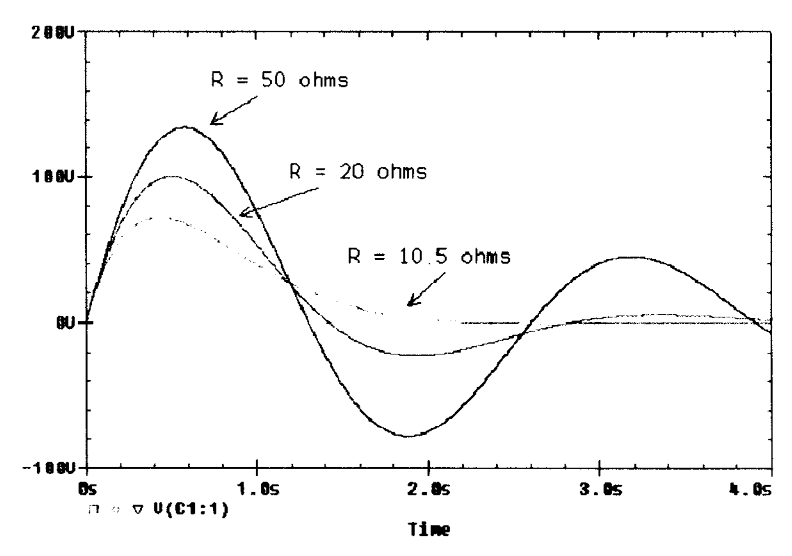


图9.15 该网络对3个不同的电阻值进行仿真得到的欠阻尼电压响应。从图中可以看出，随着R的增大，振荡的特性变得越发明显

通过试探法可以求得下降时间，对于$R = 10.5\ \Omega$，下降时间为2.92 s，它比临界阻尼时要小。注意，t_s比t_{m_2}要大，这是因为v_{m_2}的幅度比v_{m_1}幅度的1%要大。这表明稍微减小R可以减小负峰的幅度，并使得t_s小于t_{m_2}。

该网络的过阻尼、临界阻尼和欠阻尼响应的PSpice仿真结果如图9.16所示，对它们进行比较可以得到以下的一般结论：

- 当通过增加并联电阻来改变阻尼时，响应的最大幅度将增大，阻尼将减小。
- 当处于欠阻尼时，响应开始振荡，轻微欠阻尼时的响应具有最小的下降时间。

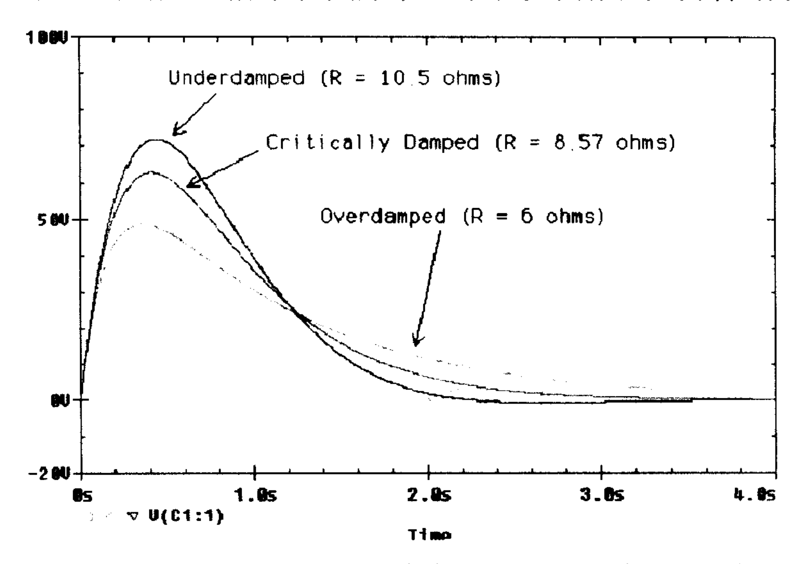


图9.16 通过改变并联电阻对例题中的网络进行仿真得到的过阻尼、临界阻尼和欠阻尼电压响应

例题 9.6 对于图 9.17(a)所示电路，求 $i_L(t)$并画出波形。

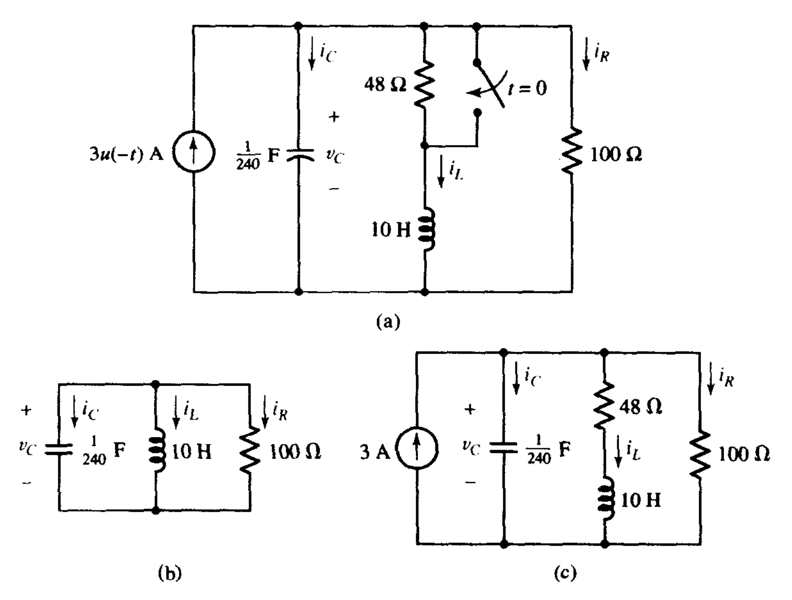


图 9.17 (a) 并联 *RLC* 电路，需要求电流 $i_L(t)$；(b) $t \geq 0$ 时的电路；(c) 确定初始条件的电路

解：在 $t=0$ 时，3 A 电源和 48 Ω 电阻都被移走，得到如图 9.17(b)所示的电路。因此，$\alpha = 1.2\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0 = 4.899$ rad/s。因为 $\alpha < \omega_0$，所以电路为欠阻尼电路，因此响应形式为

$$i_L(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \qquad [28]$$

其中，$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750$ rad/s。接下来求解 B_1 和 B_2。

图 9.17(c)所示的是 $t = 0^-$ 时的电路。将电感短路，电容开路，得到的结果是 $v_C(0^-) = 97.30$ V, $i_L(0^-) = 2.027$ A。因为这两个量都不能在零时间间隔内变化，因此 $v_C(0^+) = 97.30$ V, $i_L(0^+) = 2.027$ A。

将 $i_L(0) = 2.027$ 代入式[28]，得到 $B_1 = 2.027$ A。为了确定另一个常数，首先对式[28]进行微分：

$$\begin{aligned}\frac{di_L}{dt} = {} & e^{-\alpha t}(-B_1\omega_d \sin \omega_d t + B_2\omega_d \cos \omega_d t) \\ & -\alpha e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)\end{aligned} \qquad [29]$$

注意，$v_L(t) = L(di_L/dt)$。参考图 9.17(b)所示电路，可以看到 $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3$ V。因此，将式[29]乘以 $L = 10$ H，并设 $t = 0$，求得

$$v_L(0) = 10(B_2\omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

求解可得 $B_2 = 2.561$ A，以及

$$i_L = e^{-1.2t}(2.027 \cos 4.75t + 2.561 \sin 4.75t)\ \text{A}$$

其波形如图 9.18 所示。

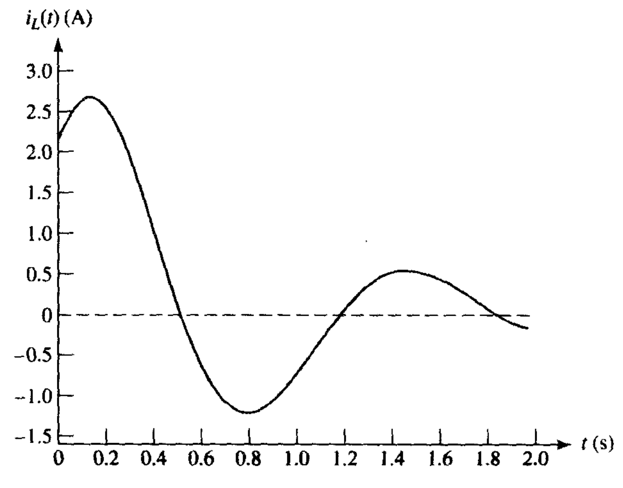


图 9.18 $i_L(t)$的波形，具有明显的欠阻尼响应的特点

练习

9.6 图 9.19 所示电路中的开关处于左边位置已有很长时间了，在 $t = 0$ 时移向右边。求：(a) $t = 0^+$ 时的 dv/dt; (b) $t = 1$ ms 时的 v; (c) 使 $v = 0$ 且大于零的首个时间值 t_0。

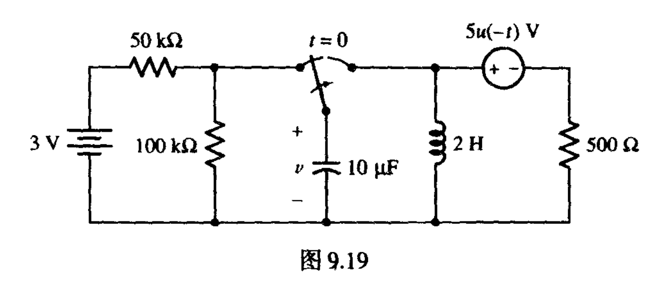


图 9.19

答案：−1400 V/s；0.695 V；1.609 ms。

计算机辅助分析

Probe的一个很有用的特性就是能够对仿真得到的电压和电流进行数学运算。本例将利用这个特性来证明并联 *RLC* 电路中的能量传输，该能量从初始储存有指定能量（1.25 μJ）的电容传输给没有初始储存能量的电感。

选择 100 nF 电容和 7 μH 电感，计算得到 $\omega_0 = 1.195 \times 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$。为了考虑过阻尼、临界阻尼和欠阻尼的情况，需要分别选取合适的并联电阻值，使得 $\alpha > \omega_0$（过阻尼），$\alpha = \omega_0$（临界阻尼）和 $\alpha < \omega_0$（欠阻尼）。从前面分析已经知道，对于并联 *RLC* 电路，$\alpha = (2RC)^{-1}$。选取 $R = 4.1833\ \Omega$，使得电路接近于临界阻尼的情况，要使得 α 精确等于 ω_0 是不可能的。如果增大电阻，则储存在其他两个元件中的能量将损耗得更慢，从而会得到欠阻尼响应，选取 $R = 100\ \Omega$ 使得电路处于这种情况。选取 $R = 1\ \Omega$（一个非常小的电阻）以得到过阻尼响应。

因此要进行 3 个仿真，仿真过程中分别取上面选定的电阻值。电容初始储存的 1.25 μJ 能量相当于初始电容电压为 5 V，据此来设定电容的初始条件。



一旦启动Probe，在Trace菜单中选择Add。我们希望画出储存在电感和电容上的能量随时间变化的曲线。对于电容，$\omega = 1/2C\,v^2$，所以单击Trace Expression窗口，键入“0.5*100E-9*”（不包括引号），然后单击V(C1:1)，返回到Trace Expression窗口，键入“*”，再次单击V(C1:1)，然后单击Ok按钮。重复以上的步骤，用7E-6替换100E-9，然后单击I(L1:1)而不是V(C1:1)以得到储存在电感上的能量。

图9.20是Probe输出的3个仿真结果的图形。在图9.20(a)中，可以看到电路中剩余的能量不断在电容和电感之间传输，直到能量被电阻完全（最终）消耗。将电阻值减小到4.1833 Ω可得到临界阻尼电路，能量输出如图9.20(b)所示。在电容和电感之间的能量传输的振荡性大大减小。可以看到大约在0.8 μs时传输给电感的能量达到峰值，然后下降到0。过阻尼响应如图9.20(c)所示。注意，在过阻尼情况下能量消耗得更快，并且传输给电感的能量非常少，因为大多数能量被电阻快速消耗。

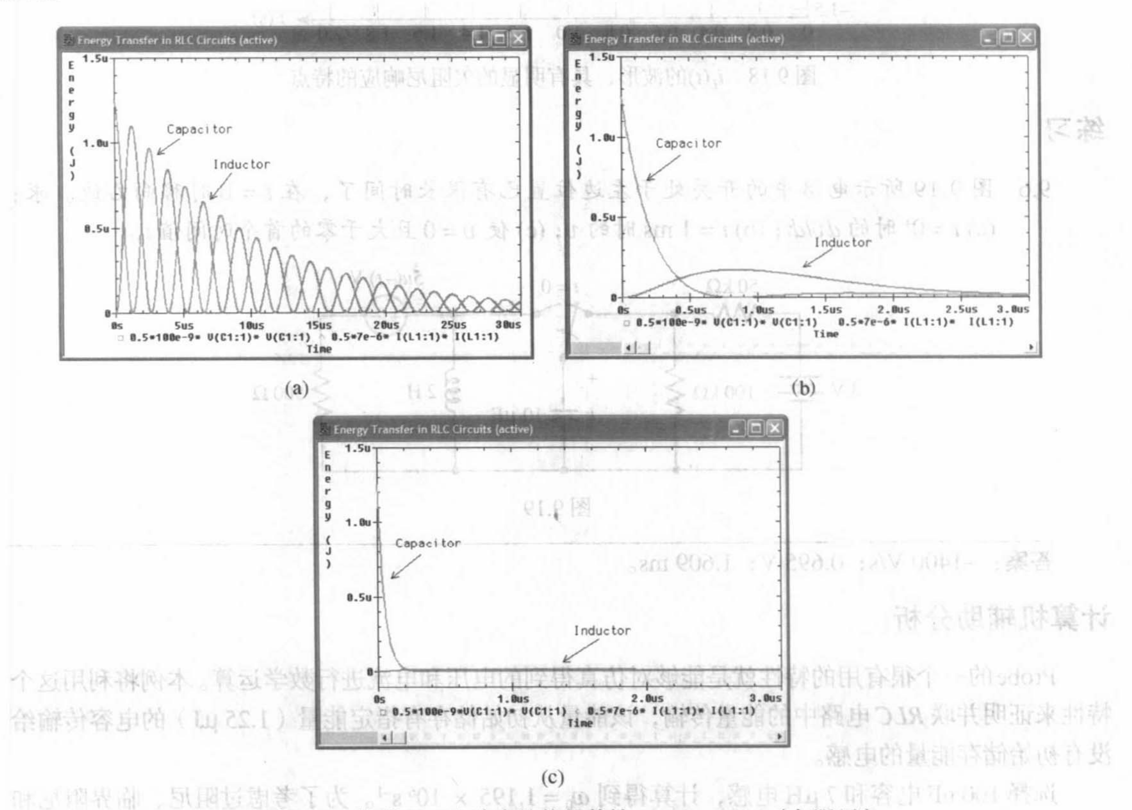


图9.20　并联*RLC*电路中的能量传输：(a) $R = 100\ \Omega$（欠阻尼）；(b) $R = 4.1833\ \Omega$（临界阻尼）；(c) $R = 1\ \Omega$（过阻尼）

9.5　无源串联*RLC*电路

现在来确定由一个理想电阻、一个理想电感和一个理想电容串联而成的电路模型的自由响应。理想电阻可以表示连接到串联*LC*或*RLC*电路的物理电阻，它可以表示电感中的欧姆损耗与铁磁损耗，也可以表示所有其他损耗能量的器件。

串联*RLC*电路是并联*RLC*电路的对偶，这个事实使得该电路的分析非常简单。图9.21(a)所示的是串联*RLC*电路，其基本微积分方程为

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt'-v_C(t_0)=0$$

可以将其与下面的并联RLC电路的方程进行比较，并将并联RLC电路重新画出，如图9.21(b)所示。

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{1}{R}v+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,dt'-i_L(t_0)=0$$

对这两个方程进行微分得到的两个二阶方程仍是对偶的：

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \qquad [30]$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{L}v=0 \qquad [31]$$

对并联RLC电路的完整讨论直接适用于串联RLC电路，电容电压和电感电流的初始条件等效于电感电流和电容电压的初始条件，电压响应变为电流响应。因此可以采用对偶语言重新描述前面4节的内容，从而得到关于串联RLC电路的完整描述。但是这个过程实际上并不需要。

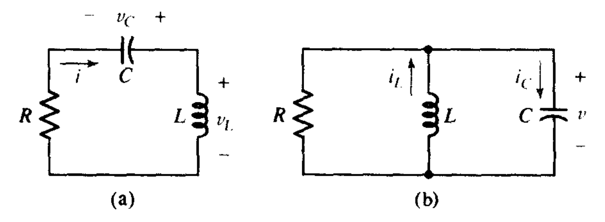


图9.21 (a) 串联RLC电路(b) 并联RLC电路。(a)是(b)的对偶电路，当然元件值不相同

串联电路响应的简单总结

下面对串联电路响应进行一个简单的总结。电路如图9.21(a)所示，过阻尼响应为

$$i(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

其中，

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

因此，

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

临界阻尼响应的形式为

$$i(t)=e^{-\alpha t}(A_1t+A_2)$$

欠阻尼响应为

$$i(t)=e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)$$

其中，

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

显然，如果以参数 α，ω_0 和 ω_d 来表示，那么对偶情形下响应的数学形式完全相同。无论在串联电路还是并联电路中，增大 α 的值而保持 ω_0 不变，电路将趋于过阻尼响应。需要指出的唯一需要注意的一点是：在计算 α 时，对于并联电路等于 $1/2RC$，而对于串联电路等于 $R/(2L)$。因此，增大 α 可以通过增大串联电路中的电阻或者减小并联电路中的电阻而实现。并联和串联 *RLC* 电路的关键方程在表 9.1 中给出。

表 9.1 无源 *RLC* 电路相关方程的总结

类型	条件	判据	α	ω_0	响应
并联 串联	过阻尼	$\alpha > \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$ $\frac{R}{2L}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ 其中，$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$
并联 串联	临界阻尼	$\alpha = \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$ $\frac{R}{2L}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$
并联 并联	欠阻尼	$\alpha < \omega_0$	$\frac{1}{2RC}$ $\frac{R}{2L}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$ 其中，$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

例题9.7 给定图9.22所示的串联*RLC*电路，其中 $L = 1$ H, $R = 2$ kΩ, $C = 1/401$ μF, $i(0) = 2$ mA, $v_C(0) = 2$ V，求 $t > 0$ 时的 $i(t)$，并画出波形。

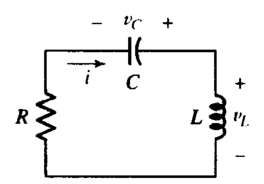


图9.22 一个简单无源 *RLC* 电路，其中 $t = 0$ 时电感和电容中都储存着能量

解： 求得 $\alpha = R/2L = 1000\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20\,025$ rad/s，从而表明这是一个欠阻尼响应，计算出 ω_d 的值等于 20 000 rad/s。除了两个任意常量尚未求出外，响应的形式是已知的，即

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1 \cos 20\,000t + B_2 \sin 20\,000t)$$

因为已知 $i(0) = 2$ mA，将该值代入上式可得

$$B_1 = 0.002\ \text{A}$$

因此，

$$i(t) = e^{-1000t}(0.002 \cos 20\,000t + B_2 \sin 20\,000t) \qquad \text{A}$$

剩下的初始条件必须应用于导数中，对响应求导：

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t}(-40 \sin 20\,000t + 20\,000 B_2 \cos 20\,000t$$
$$- 2 \cos 20\,000t - 1000 B_2 \sin 20\,000t)$$

和

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 20\,000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L}$$

$$= \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L}$$

$$= \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2 \text{ A/s}$$

可得

$$B_2 = 0$$

则响应为

$$i(t) = 2e^{-1000t}\cos 20\,000t \qquad \text{mA}$$

首先画出两个指数包络 $2e^{-1000t}$ 和 $-2e^{-1000t}$，如图9.23中的虚线所示。正弦波的1/4周期点的位置为 $20\,000t = 0$，$\pi/2$，π 等，即 $t = 0.078\,54k$ ms，$k = 0$，1，2，…，把这些点标注在时间轴上，从而可以快速地画出该振荡曲线。

利用上面的包络很容易求出下降时间。令 $2e^{-1000t_s}$ mA 等于其最大值的1%，即2 mA，则有 $e^{-1000t_s} = 0.01$，因此 $t_s = 4.61$ ms 是一个经常使用的近似值。

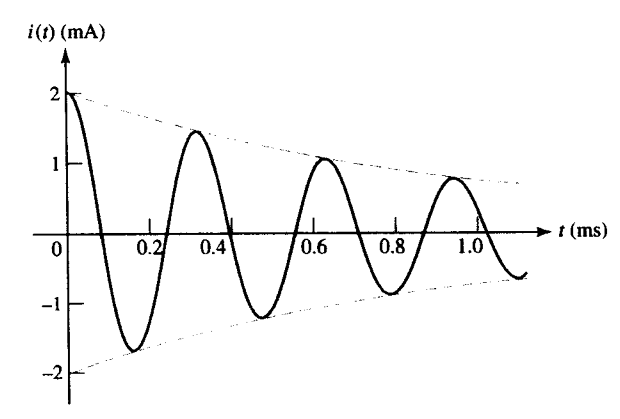


图9.23 欠阻尼串联 *RLC* 电路的电流响应，其中 $\alpha = 1000\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0 = 20\,000\ \text{s}^{-1}$，$i(0) = 2$ mA 和 $v_C(0) = 2$ V。画出曲线的包络，以此来简化曲线的绘制，包络用虚线表示

练习

9.7 参考图9.24所示的电路，求：(a) α; (b) ω_0; (c) $i(0^+)$; (d) $di/dt|_{t=0^+}$; (e) $i(12\text{ ms})$。

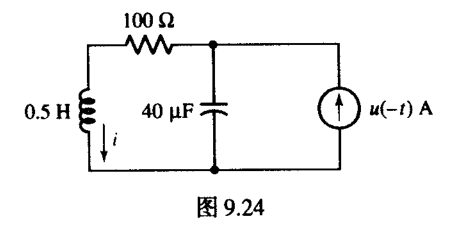


图9.24

答案：$100\ \text{s}^{-1}$；224 rad/s；1 A；0；−0.1204 A。

作为最后一个例子，考虑电路中包含受控源的情况。如果受控源的控制电流或电压不是我们关心的量，则可以简单求得连接到电感或电容两端的戴维南等效电路，否则必须写出合适的微积分方程并进行求导运算，然后对得到的微分方程进行求解。

例题 9.8 电路如图 9.25(a)所示，求 $t>0$ 时 $v_C(t)$的表达式。

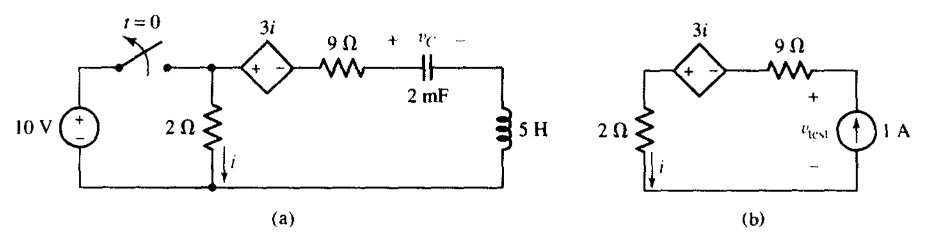


图 9.25 (a) 一个包含受控源的 *RLC* 电路；(b) 求 R_{eq} 的电路

解： 因为只对 $v_C(t)$感兴趣，因此首先可以求得 $t=0^+$ 时刻与电感和电容串联的戴维南等效电阻。通过将一个 1 A 电源接入电路来求解该电阻，如图 9.25(b)所示。从该电路可以得出

$$v_{test} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8\ \text{V}$$

因此，$R_{eq} = 8\ \Omega$，从而 $\alpha = R/2L = 0.8\ \text{s}^{-1}$，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10$ rad/s，这意味着是一个欠阻尼响应，$\omega_d = 9.968$ rad/s，响应形式为

$$v_C(t) = e^{-0.8t}(B_1 \cos 9.968t + B_2 \sin 9.968t) \qquad [32]$$

考虑 $t=0^-$ 时的电路。我们注意到由于存在电容，所以 $i_L(0^-)=0$。根据欧姆定律，$i(0^-)=5$ A，因此，

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5\ \text{V}$$

将上面的条件代入式[32]，可得 $B_1 = -5$ V。对式[32]求导并计算 $t=0$ 的值：

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \qquad [33]$$

从图 9.25(a)可以得到

$$i = -C\frac{dv_C}{dt}$$

因此，在式[33]中使用 $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$，可得到 $B_2 = -0.4013$ V，由此写出

$$v_C(t) = -e^{-0.8t}(5\cos 9.968t + 0.4013 \sin 9.968t)\ \text{V}, \quad t > 0$$

该电路的 PSpice 仿真结果如图 9.26 所示，符合分析的结果。

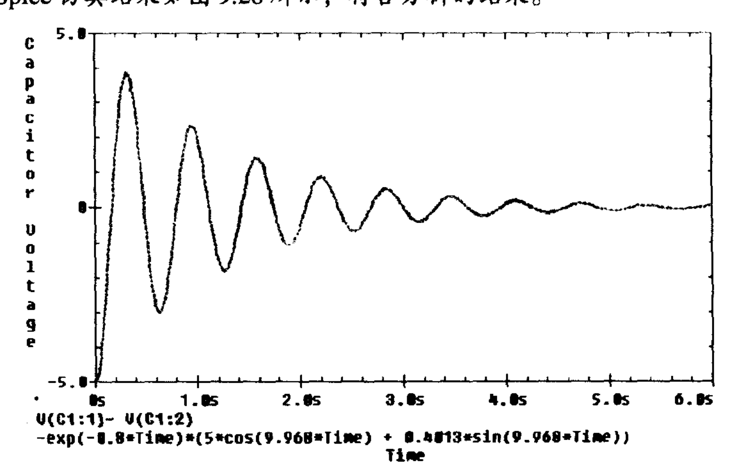


图 9.26 图 9.25(a)所示电路的 PSpice 仿真结果。分析结果用虚线画出

练习

9.8 电路如图9.27所示，如果 $v_C(0^-) = 10$ V, $i_L(0^-) = 0$，求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。注意，尽管在本练习中戴维南方法没有用处，但是受控源将 v_C 和 i_L 关联起来，从而使电路方程成为一阶线性微分方程。

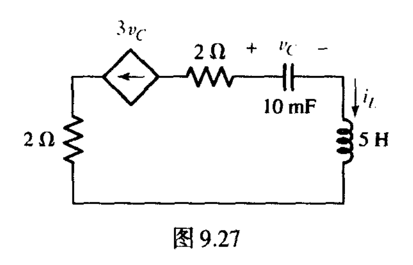


图9.27

答案：$i_L(t) = -30e^{-300t}$ A, $t > 0$。

9.6 *RLC*电路的完全响应

现在考虑接有直流电源的*RLC*电路，该电源会在电路中产生不随时间变为无穷大而消失的受迫响应。按照与*RL*和*RC*电路相同的求解过程可以求得一般解：完全确定受迫响应；自由响应为包含几个合适的待定常量的函数形式；完全响应为受迫响应与自由响应之和。然后确定初始条件，并利用初始条件确定待定常数。对学生而言，最后一步经常会出现问题。对于包含直流电源的电路，其初始条件的确定与前面讨论过的无源电路初始条件的确定基本相同，但是在接下来的例题中还要再强调这个问题。

在确定和应用初始条件时产生的困惑主要是由于没有一套可以遵循的明确规则。对每个特定的问题进行分析时，都会发觉这个问题或多或少包含一些独特之处，这也是产生困难的常见原因。

容易求得的部分响应

一个二阶系统的完全响应（假定为电压响应）包含一个受迫响应，对于直流激励来说它是常量：

$$v_f(t) = V_f$$

此外还包含一个自由响应：

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

因此，

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

假定已经通过电路和激励函数得到 s_1, s_2 和 V_f，只有 A 和 B 需要待定。最后一个方程给出了 A, B，v 和 t 的函数依赖关系，代入 $t = 0^+$ 时的已知 v 值可以得到一个关于 A 和 B 的方程：$v(0^+) = V_f + A + B$，这就是完全响应中容易求出的部分。

其他部分的响应

我们还需要另一个 A 和 B 之间的关系，遗憾的是，这通常需要对响应求导并将 $t = 0^+$ 时已知的 dv/dt 值代入才能求得：

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 A e^{s_1 t} + s_2 B e^{s_2 t}$$

这样就有了两个关于A和B关系的方程，这两个常数可以求得。

剩下的唯一问题是确定$t = 0^+$时v和dv/dt的值。假设v为电容电压v_C，因此$i_C = C\,dv_C/dt$，可以看到，dv/dt的初始值与某个电容电流的初始值有关。如果可以得到电容的初始电流值，那么就可以得到dv/dt的值。$v(0^+)$通常很容易得到，但求解dv/dt的初始值往往困难一些。如果选择电感电流i_L为响应，那么di_L/dt的初始值与某些电感电压的初始值相关。除了电容电压和电感电流以外的变量外，可以通过将它们的初始值及其导数的初始值用相应的v_C和i_L表示来得到。

我们通过对图9.28所示电路的详细分析来解释这个过程以及求得所有这些数值。为了简化分析，这里使用了一个非实际的大电容。

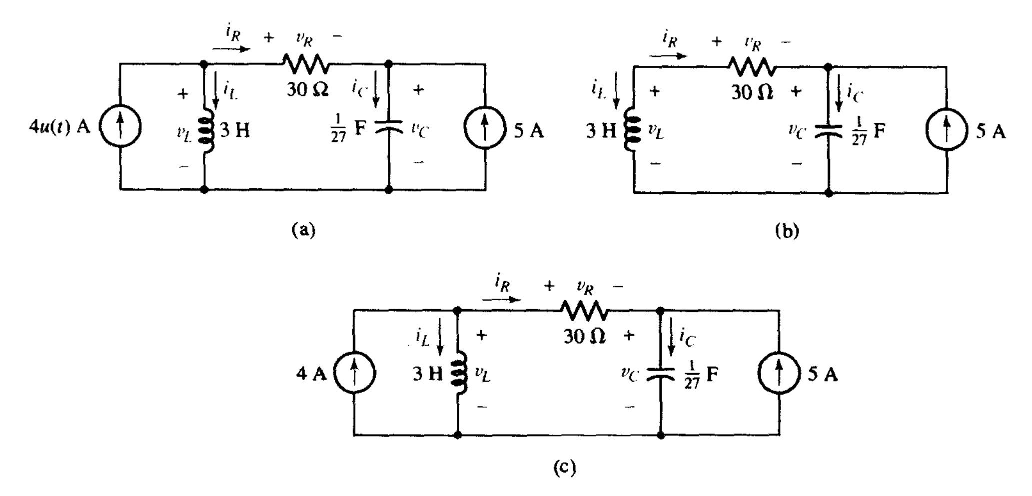


图9.28 (a) 一个RLC电路，用来解释求解初始条件的几个过程，所要求的响应为$v_C(t)$；(b) $t = 0^-$；(c) $t > 0$

例题9.9 在图9.28(a)所示电路中有3个无源元件，每个元件都定义了其上的电压和电流。求$t = 0^-$和$t = 0^+$时这6个量。

解： 我们的目标是求$t = 0^-$和$t = 0^+$时刻每个元件上的电压和电流值。一旦这些量已知，就可以很容易求得导数的初始值。首先，采用简单的循序渐进的方法来求解本题。

1. $t = 0^-$ 在$t = 0^-$时刻，只有右边的电流源工作，如图9.28(b)所示。假定电路处于这个状态已经很长时间了，因此所有的电流和电压都为常数，所以当电感流过直流电流时，其两端的电压为零：

$$v_L(0^-) = 0$$

当电容两端为直流电压$(-v_R)$时，流过的电流为零：

$$i_C(0^-) = 0$$

接下来对右边节点采用基尔霍夫电流定律，可得

$$i_R(0^-) = -5\ \text{A}$$

同样可以得到

$$v_R(0^-) = -150\ \text{V}$$

现在对左边网络采用基尔霍夫电压定律，可以求得

$$v_C(0^-) = 150\ \text{V}$$

利用 KCL 求得电感电流为

$$i_L(0^-) = 5\ \text{A}$$

2. $t=0^+$　在$t=0^-$到$t=0^+$的时间间隔内，左边的电流源变为有效，在$t=0^-$时刻的许多电压和电流将发生突变。相应的电路如图 9.28(c)所示。接下来的分析必须从那些不能发生变化的量（即电感电流和电容电压）开始。在开关变化期间，这些量都必须保持不变，因此，

$$i_L(0^+) = 5\ \text{A} \quad \text{和} \quad v_C(0^+) = 150\ \text{V}$$

因为已知左边节点的两个电流，可以得到

$$i_R(0^+) = -1\ \text{A} \quad \text{和} \quad v_R(0^+) = -30\ \text{V}$$

因此，

$$i_C(0^+) = 4\ \text{A} \quad \text{和} \quad v_L(0^+) = 120\ \text{V}$$

现在求出了$t=0^-$时刻的 6 个初始值和$t=0^+$时刻的 6 个量。在后面的 6 个值中，只有电感电流和电容电压与$t=0^-$时刻的值相同。

我们也可以采用略微不同的方法来求解$t=0^-$和$t=0^+$时刻的电压和电流值。在开关操作之前，电路中只存在直流电流和电压，因此电感短路，电容开路。据此重画电路图 9.28(a)，如图 9.29(a)所示。只有右边的电流源有效，其 5 A 的电流流过电阻和电感，因此$i_R(0^-)=-5$ A，$v_R(0^-)=-150$ V 和$i_L(0^-)=5$ A，$v_L(0^-)=0$以及$i_C(0^-)=0$，$v_C(0^-)=150$ V，可见与前面得到的结果一致。

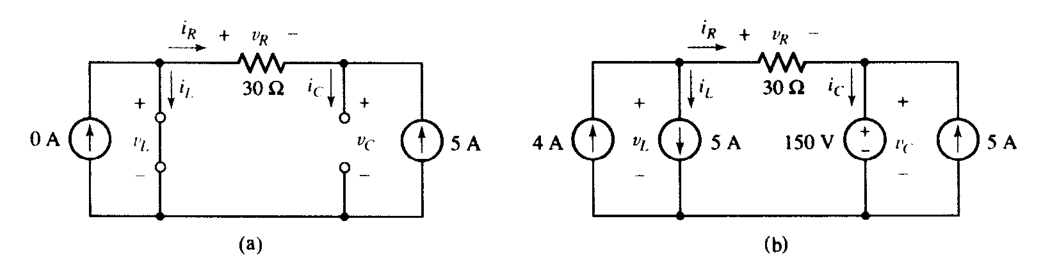


图 9.29　(a) 等效于图 9.28(a)在$t=0^-$时刻的电路；(b) $t=0^+$时刻的等效电路

现在通过画出$t=0^+$时刻的等效电路来求解电压和电流。在开关变换期间，每个电感电流和电容电压必须保持不变，因此用电流源替代电感，用电压源替代电容。在不连续处，用这些电源来维持电容电压和电感电流不变，于是得到如图 9.29(b)所示的等效电路。注意，图 9.29(b)所示电路只在0^-和0^+的时间间隔内有效。

分析该直流电路可得到$t=0^+$时刻的电流和电压。求解过程并不困难，但由于这个网络中存在的电源比较多，所以看起来比较复杂。不过，第 3 章已经讨论了这类问题的求解方法，这里并没有介绍任何新的内容。首先求电流，从左上端的节点开始，可以看到$i_R(0^+)=4-5=-1$ A；然后考虑右上端的节点，可以得到$i_C(0^+)=-1+5=4$ A。因此，可以得到$i_L(0^+)=5$ A。

接下来计算电压，利用欧姆定律可得$v_R(0^+)=30(-1)=-30$ V。对于电感，根据 KVL 可得$v_L(0^+)=-30+150=120$ V。最后，根据已知的$v_C(0^+)=150$ V，即可得到所有在$t=0^+$时的值。

练习

9.9　电路如图 9.30 所示，设 $i_s = 10u(-t) - 20u(t)$ A，求：(a) $i_L(0^-)$；(b) $v_C(0^+)$；(c) $v_R(0^+)$；(d) $i_L(\infty)$；(e) $i_L(0.1\ \text{ms})$。

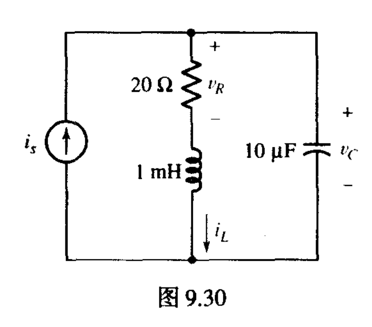


图 9.30

答案：10 A；200 V；200 V；−20 A；2.07 A。

例题 9.10　电路如图 9.31 所示，通过求出 $t = 0^+$ 时 3 个电压和 3 个电流的一阶导数可完成其初始条件的计算，最终确定图 9.28 所示电路的初始条件。

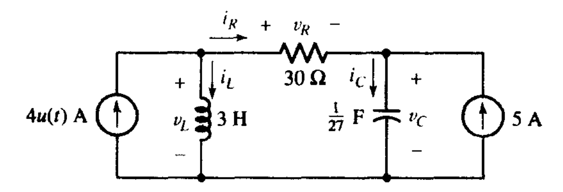


图 9.31　图 9.28 的电路，重复用于例题 9.10

解：从两个储能元件开始求解。对于电感：

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

特别是

$$v_L(0^+) = L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+}$$

因此，

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40\ \text{A/s}$$

同样，

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108\ \text{V/s}$$

对于导数，KCL 和 KVL 仍然适用，因此可以求出其他 4 个导数。例如，在图 9.31 所示电路的左边节点：

$$4 - i_L - i_R = 0, \qquad t > 0$$

因此，

$$0-\frac{di_L}{dt}-\frac{di_R}{dt}=0, \qquad t>0$$

因此，

$$\left.\frac{di_R}{dt}\right|_{t=0^+}=-40\ \text{A/s}$$

剩余的 3 个导数初始值为

$$\left.\frac{dv_R}{dt}\right|_{t=0^+}=-1200\ \text{V/s}$$

$$\left.\frac{dv_L}{dt}\right|_{t=0^+}=-1092\ \text{V/s}$$

和

$$\left.\frac{di_C}{dt}\right|_{t=0^+}=-40\ \text{A/s}$$

在结束确定初始值的讨论之前，必须指出前面至少省略了一种求解有效方法，即通过首先对初始电路列出一般的节点或者回路方程，然后代入在 $t=0^-$ 时已知为零的电感电压和电容电流的值，之后就可以得到 $t=0^-$ 时的其他几个电压或电流值，并容易求出剩余的量。对 $t=0^+$ 可以进行类似的分析。这是一种很重要的分析方法，尤其是对于那些不能采用前面简单的循序渐进的方法来分析的复杂电路，必须采用这种方法。

下面求解图 9.31 所示电路的响应 $v_C(t)$。当两个电源均不起作用时，电路表现为一个串联 *RLC* 电路，容易求出 s_1 和 s_2 分别为 -1 和 -9。仅通过观察就可以得到受迫响应；如果有必要，也可以通过画出电路的直流等效来求出受迫响应，这时的等效电路与图 9.29(a)所示类似，只是多了一个 4 A 的电流源。求出的受迫响应为 150 V，因此，

$$v_C(t)=150+Ae^{-t}+Be^{-9t}$$

和

$$v_C(0^+)=150=150+A+B$$

或

$$A+B=0$$

然后，

$$\frac{dv_C}{dt}=-Ae^{-t}-9Be^{-9t}$$

和

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}=108=-A-9B$$

最后求得

$$A=13.5 \qquad B=-13.5$$

和

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})\ \text{V}$$

求解过程总结

当希望确定一个简单三元件 *RLC* 电路的瞬态特性时，其求解过程可以总结如下：首先必须确定要分析的是串联电路还是并联电路，以便于使用正确的 α 表达式。这两个方程分别为

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (\text{并联}\ RLC)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (\text{串联}\ RLC)$$

然后比较 α 和 ω_0。对于两种电路，ω_0 均为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

如果 $\alpha > \omega_0$，电路为过阻尼，自由响应具有以下形式：

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

其中，

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

如果 $\alpha = \omega_0$，电路为临界阻尼，其响应形式为

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

最后，如果 $\alpha < \omega_0$，得到的是欠阻尼响应：

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

其中，

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

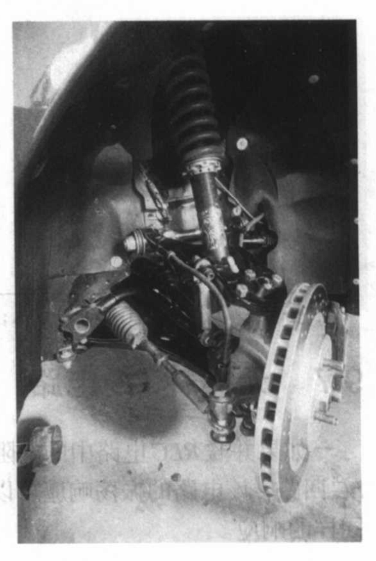
最后判断电路是无源电路还是有源电路。如果在开关切换或不连续过程结束后，独立源在电路中不起作用，那么电路为无源电路，自由响应即为完全响应；如果存在独立源，则为有源电路，因此必须确定受迫响应，这时的完全响应为上面两个响应之和：

$$f(t) = f_f(t) + f_n(t)$$

这可以应用于电路中的任何电流或电压。最后一步是利用给定的初始条件来求解未知的常数。

实际应用——汽车悬挂系统模型

我们在本章引言中提到，可以将本章中的一些概念扩展到电路分析之外。事实上，前面分析过的微分方程的一般形式可以在很多其他领域看到——只不过是被“翻译”成新的参数名词。例如，考虑图9.32所示的简单的汽车悬挂系统。活塞不是附在汽缸上，而是同时附在弹簧和车轮上，因此运动的部分是弹簧、活塞和车轮。


图9.32 汽车悬挂系统

对该物理系统建立模型。定义位置函数$p(t)$，它描述活塞在汽缸中的位置，然后将作用在弹簧上的力写成F_S：

$$F_S = Kp(t)$$

其中，K称为倔强系数，单位为lb/ft。作用在车轮上的力F_W等于车轮的质量乘以其加速度，即

$$F_W = m\frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

其中，m的单位是lb·s²/ft。最后一个是作用在活塞上的摩擦力F_f:

$$F_f = \mu_f \frac{dp(t)}{dt}$$

其中，μ_f为摩擦系数，单位为lb·s/ft。

从基本物理课程可知作用在系统中的所有力之和必须为零，因此，

$$m\frac{d^2p(t)}{dt^2} + \mu_f\frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \qquad [34]$$

求解这类方程似乎是场噩梦，不过现在是该结束的时候了。因为将式[32]与式[30]和式[31]比较，立即可以看到它们至少在形式上有明显的相似之处。对于式[30]，该微分方程描述了串联*RLC*电路的电流响应，可以得到下面的对应关系：

质量	m	→	电感	L
摩擦系数	μ_f	→	电阻	R
倔强系数	K	→	电容的倒数	C^{-1}
位置量	$p(t)$	→	电流量	$i(t)$

所以，如果讨论的是英寸而不是安培，是lb·s²/ft而不是H，是ft/lb而不是F，是1b·s/ft而不是Ω，那么可以将*RLC*电路中新学到建模方法应用到对汽车减震器的估算中。

假定汽车车轮的典型重量为70 lb，将它除以地球重力加速度(32.17 ft/s²)，得到车轮的质量为$m = 2.176$ lb·s²/ft。汽车的总重量为1985 lb，弹簧静态（在没有乘客时）位移为4英寸（in.）。将各减震器承受的重量除以弹簧的静态位移量得到倔强系数，所以$K = (1/4)\times(1985)\times(3\ \text{ft}^{-1}) = 1489$ lb/ft。若已知活塞和汽缸之间的摩擦系数为65 lb·s/ft，则可以将这个减震器用一个*RLC*电路来建模，其中，$R = 65\ \Omega$，$L = 2.176$ H，$C = K^{-1} = 671.6\ \mu\text{F}$。

减震器的谐振频率为$\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16$ rad/s，阻尼系数为$\alpha = R/2L = 14.94\ \text{s}^{-1}$。因为$\alpha < \omega_0$，所以这个减震系统为欠阻尼系统，这意味着当驾驶汽车经过路上的一个坑洼时，司机将感受到几次反冲。当汽车以很高的速度行驶时，需要减小震动（即需要更大的摩擦系数，或者更大的电路模型电阻），这时对应于过阻尼响应。不过，如果驾驶在未铺平的道路上，轻微欠阻尼的响应更为合适。

练习

9.10 电路如图9.33所示，设$v_s = 10 + 20u(t)$ V，求：(a) $i_L(0)$; (b) $v_C(0)$; (c) $i_{L,f}$; (d) $i_L(0.1\ \text{s})$。

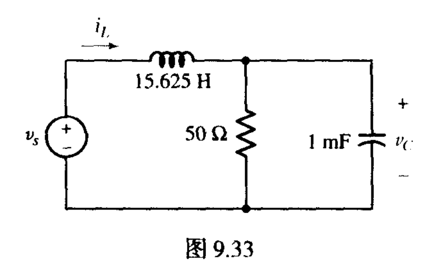


图 9.33

答案：0.2 A；10 V；0.6 A；0.319 A。

9.7 无损耗 *LC* 电路

如果并联 *RLC* 电路中的电阻无穷大，或串联 *RLC* 电路中的电阻为零，那么将得到一个简单的 *LC* 回路，该电路的振荡响应可以永久保持。首先来看一个例子，然后讨论若不使用电感如何得到同样的响应。

图 9.34 无损耗电路，如果 $v(0) = 0$，$i(0) = -1/6$ A，它输出无阻尼的正弦振荡响应 $v = 2\sin 3t$ V

考虑图 9.34 所示的无源电路，其中 $L = 4$ H, $C = 1/36$ F，选取该值是为了计算方便。设 $i(0) = -1/6$ A 和 $v(0) = 0$，求得 $\alpha = 0$ 和 $\omega_0^2 = 9\ \text{s}^{-2}$，所以 $\omega_d = 3$ rad/s。如果忽略指数衰减项，则电压 v 为

$$v = A\cos 3t + B\sin 3t$$

因为 $v(0) = 0$，可以看到 $A = 0$。接下来有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

但是 $i(0) = -1/6$ A，因此在 $t = 0$ 时，$dv/dt = 6$ V/s。所以，$B = 2$ V，而且

$$v = 2\sin 3t\ \text{V}$$

这是一个无阻尼正弦响应，换句话说，该电压响应不会衰减。

现在讨论不利用 *LC* 电路时如何得到该电压。我们希望写出 v 符合的微分方程，然后用运放构建能够产生该微分方程的解的电路结构。尽管是对一个特定例子的讨论，但这是一种通用方法，可以用来解决任何线性齐次微分方程。

对于图 9.34 所示的 *LC* 电路，把 v 作为我们讨论的变量，并将向下的电感和电容电流之和设为零：

$$\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} v\,dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\frac{dv}{dt} = 0$$

进行微分可得

$$\frac{1}{4}v + \frac{1}{36}\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

或

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

为了求解这个方程，可以利用运放来构建积分器。假定此处的最高阶导数d^2v/dt^2可以在运放结构中的点 A 得到。现在使用7.5节中讨论的积分器结构，令其中的$RC = 1$。输入为d^2v/dt^2，则输出必定为$-dv/dt$，其中符号的变化是因为使用了反相组态的积分器。dv/dt的初始值等于6 V/s，在第一次对此电路进行分析时便已求出，因此，积分器的初始值等于-6 V。现在，负的一阶导数作为第二级积分器的输入，因此输出为$v(t)$，并且初始值为$v(0) = 0$。现在，只需将v乘以-9就可以得到A点对应的二阶导数。采用反相组态的运算放大器很容易实现9倍的放大，并且会改变符号。

图9.35所示的电路是一个反相放大器。对于理想运放，输入电流和输入电压都为零，因此向右流过R_1的电流为v_s/R_1，而向左流过R_f的电流为v_o/R_f。因为它们的和等于零，所以，

$$\frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_f}{R_1}$$

因此可以得到增益为-9的放大器，例如，设置$R_f = 90\ \text{k}\Omega$，$R_1 = 10\ \text{k}\Omega$。

如果设每个积分器中的R为1 MΩ，C为1 μF，那么对于两个积分器：

$$v_o = -\int_0^t v_s\,dt' + v_o(0)$$

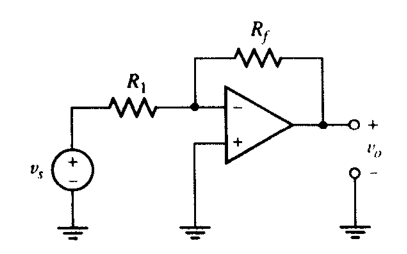


图 9.35　反相运算放大器，增益$v_o/v_s = -R_f/R_1$，运放是理想的

现在，反相放大器的输出组成了A点的假定输入，得到的运放电路结构如图9.36所示。如果左边开关在$t = 0$时关闭，而控制两个初始条件的开关同时打开，那么第二个积分器的输出将是无阻尼正弦波$v = 2\sin 3t$ V。

注意，图9.34所示的LC电路和9.36所示的运放电路有相同的输出，但是运放电路不包含电感。然而它工作起来好像包含电感，其输出端与地之间的电压即为所需的正弦电压。这在电路设计中有非常大的好处，因为电感与电容相比通常会比较笨重和昂贵，其损耗也很大（因而和"理想"模型有相当的差距）。

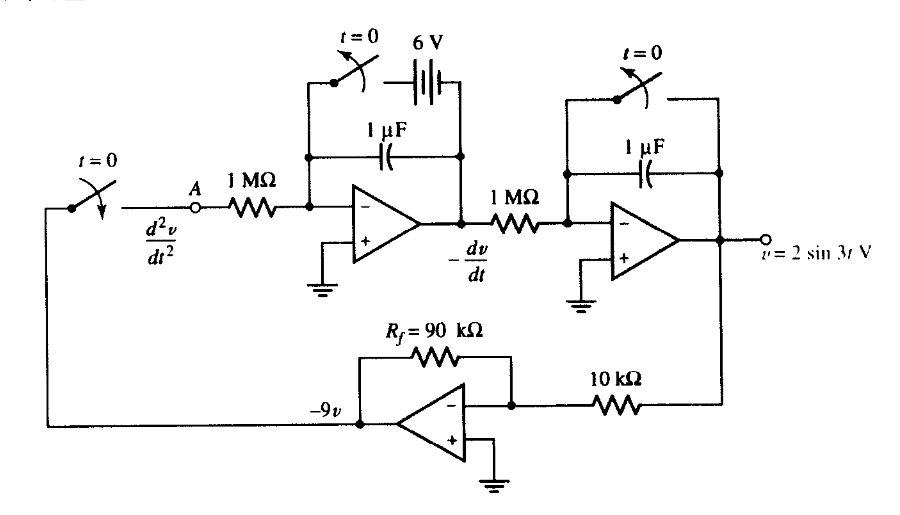


图 9.36　两个积分器和一个反相放大器连接在一起给出微分方程$d^2v/dt^2 = -9$ V的解

练习

9.11 电路如图9.36所示，如果输出为图9.37所示电路中的电压 $v(t)$，确定 R_f 的值以及两个初始电压。

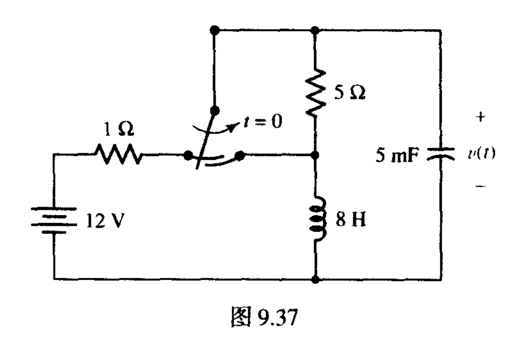


图9.37

答案：250 kΩ；400 V；10V。

总结和复习

- 包含两个储能元件且不能用串联/并联组合合并的电路可以用一个二阶微分方程描述。
- 根据 R, L 和 C 的相对数值，串联和并联 RLC 电路属于下面三种情况之一：
  过阻尼（$\alpha > \omega_0$）
  临界阻尼（$\alpha = \omega_0$）
  欠阻尼（$\alpha < \omega_0$）
- 对于串联 RLC 电路，$\alpha = R/2L$，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。
- 对于并联 RLC 电路，$\alpha = 1/2RC$，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。
- 过阻尼响应的典型形式为两个指数项之和，其中一个比另一个衰减得更快：例如 $A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$。
- 临界阻尼响应的典型形式为 $e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$。
- 欠阻尼响应的典型形式为一个以指数衰减的正弦波：$e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t)$。
- 在 RLC 电路的瞬态响应期间，能量在储能元件与电路的电阻性器件之间传递。电阻性器件充当消耗初始储存能量的角色。
- 完全响应是受迫响应与自由响应之和。在这种情况下，总响应必须在求解常数之前确定。

深入阅读

讨论应用 PSpice 建立汽车悬挂系统模型的书籍：

R. W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows*, vol. I, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1998。

可以在下面这本书的第3章中找到关于模拟网络的详细描述：

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*. New York: Wiley, 1954。

习题

9.1 无源并联电路

1. 某电路由4个元件并联组成：一个4 Ω电阻，一个10 Ω电阻，一个1 μF电容，以及一个2 mH电感。(a) 计算 α; (b) 计算 ω_0; (c) 判断该电路是欠阻尼、临界阻尼，还是过阻尼？解释原因。
2. 一个并联 *RLC* 电路包含一个2 H电感和一个1 pF电容。问应该并联上多大的电阻才能使该电路产生以下两种响应：(a) 欠阻尼响应？(b) 临界阻尼响应？
3. 一个无源 *RLC* 电路的 $R = 1\ \Omega$, $C = 1\text{nF}$, $L = 1\ \text{pH}$。(a) 计算 α 和 ω_0; (b) 计算 s_1 和 s_2; (c) 写出 $t > 0$ 时电感电流响应的形式。
4. 一个22 aF电容与一个1 fH电感并联连接。请问并联上多大的电阻可以得到：(a) 欠阻尼响应？(b) 临界阻尼响应？(c) 过阻尼响应？
5. 一个无源并联 *RLC* 电路包含一个使得 $\omega_0 L$ 的乘积等于10 Ω的电感。如果 $s_1 = -6\ \text{s}^{-1}$，$s_2 = -8\ \text{s}^{-1}$，求 R，L 和 C 的值。
6. 电路如图9.38所示，其中电容电流为 $i_C = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$ mA。如果 $C = 1$ mF，$v(0) = -0.5$ V，求：(a) $v(t)$；(b) $i_R(t)$；(c) $i(t)$。
7. 某并联 *RLC* 电路的固有谐振频率为 $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}$ rad/s，并且已知电感 $L = 2$ pH。(a) 计算 C; (b) 确定电阻 R 的值，使得指数阻尼系数等于5 Gs^{-1}; (c) 确定电路的奈培频率；(d) 计算 s_1 和 s_2; (e) 计算电路的阻尼系数。

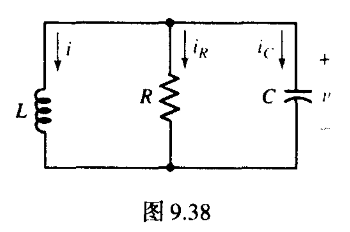


图9.38

8. 如果 $L = 4R^2C$，证明方程 $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$ 是式[4]的解。如果 $v(0) = 16$ V，$dv/dt|_{t=0} = 4$，求 A_1 和 A_2。
9. 用一根长5 m的18 AWG实芯铜导线代替练习9.1中的电阻。(a) 计算新电路的谐振频率；(b)计算新电路的奈培频率；(c) 计算阻尼系数改变的百分比。

9.2 过阻尼并联 *RLC* 电路

10. 在图9.39所示的电路中，设 $L = 5$ H，$R = 8\ \Omega$，$C = 12.5$ mF，$v(0^+) = 40$ V。(a) 如果 $i(0^+) = 8$ A，求 $v(t)$；(b) 如果 $i_C(0^+) = 8$ A，求 $i(t)$。
11. 在图9.39所示的电路中，$L = 1$ mH, $C = 100$ μF。(a) 选择 $R = 0.1\ R_C$，其中 R_C 是使电路为临界阻尼的值；(b) 如果 $i(0^-) = 4$ A，$v(0^-) = 10$ V，求 $t > 0$ 时的 $i(t)$。

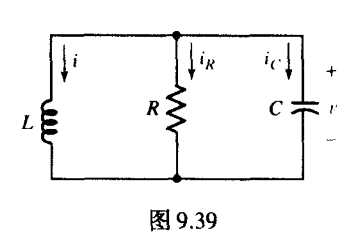


图9.39

12. 在图9.39所示的电路中，$R = 20$ mΩ, $C = 50$ mF, $L = 2$ mH。(a) 如果 $v(0^+) = 0$ V，$i(0^-) = 2$ mA，求 $t > 0$ 时 $i_R(t)$ 的表达式；(b) 画出在 $0\ \text{ms} < t < 500\ \text{ms}$ 范围内的波形；(c) 用PSpice对该电路进行仿真。提交一份正确标注的原理图。仿真结果是否与分析结果一致？
13. 参见图9.39所示的电路，设 $i(0) = 40$ A，$v(0) = 40$ V。如果 $L = 12.5$ mH, $R = 0.1\ \Omega$, $C = 0.2$ F，(a) 求 $v(t)$；(b) 画出在 $0\ \text{s} < t < 0.3\ \text{s}$ 范围内 i 的曲线。
14. 在图9.39所示的电路中，$R = 15$ μΩ, $C = 50$ μF, $L = 2$ μH。(a) 如果 $v(0^+) = 2$, $i(0^-) = 0$，求 $t > 0$ 时 $i_C(t)$ 的表达式；(b) 画出在 $0\ \text{ns} < t < 5\ \text{ns}$ 范围内的曲线；(c) 利用PSpice对该电路进行仿真。提交一份正确标注的原理图以及输出曲线。仿真结果是否与分析结果一致？

15. 对于图 9.39 所示的电路，$R = 1\ \Omega, C = 4\ \text{F}, L = 20\ \text{H}$，初始条件为 $i(0) = 8$ A，$v(0) = 0$。(a) 求 $t > 0$ 时 $v(t)$的表达式；(b) 确定峰值以及达到峰值的时刻；(c) 用 PSpice 仿真对分析结果进行验证。提交一份正确标注的原理图以及输出曲线。
16. 电路如图 9.40 所示，求对所有 t 有效的 $i_L(t)$的表达式。
17. 求图 9.41 所示电路中 $v \geqslant 0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

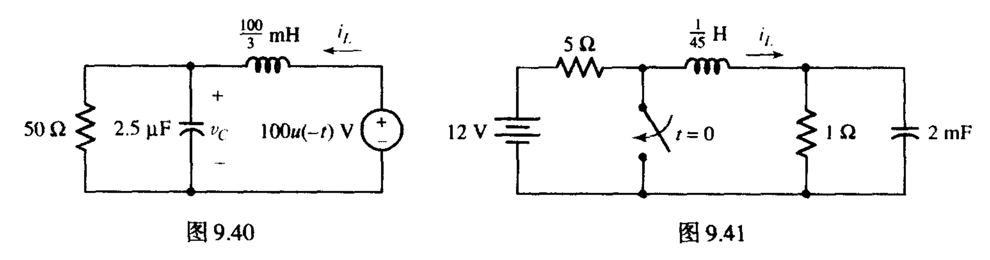


图 9.40　　图 9.41

18. 图 9.42 所示电路处在该状态已有很长时间了，在 $t = 0$ 开关闭合后，求：(a) $v(t)$；(b) $i(t)$；(c) $v(t)$的下降时间。
19. 电路如图 9.42 所示，电感值等于 1250 mH，如果已知电容初始储能为 390 J，电感初始储能为零，求 $v(t)$。
20. 电路如图 9.43 所示：(a) L 为多大时，电路的瞬态响应形式为 $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$？(b) 如果 $i_R(0^+) = 10$ A 和 $i_C(0^+) = 15$ A，求 A 和 B。

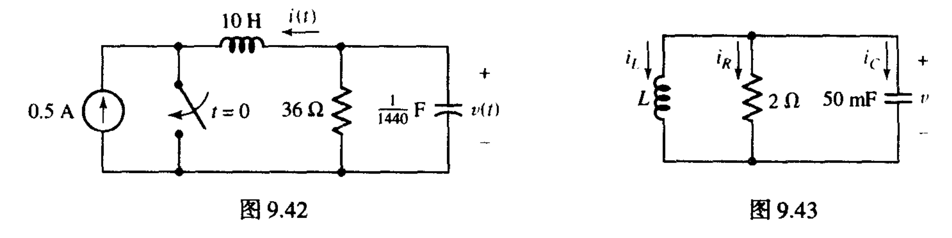


图 9.42　　图 9.43

21. 图 9.44 所示电路中的开关已打开很长时间了，求：(a) $v_C(0^+)$；(b) $i_C(0^+)$；(c) $v_C(t)$；(d) 画出 $v_C(t)$的图形；(e) 确定使 $v_C(t) = 0$ 的时刻 t；(f) 求电路的下降时间。
22. 图 9.45 所示电路中的开关在 $t = 0$ 前已闭合很长时间了，求：(a) $i_A(0^-)$；(b) $i_A(0^+)$；(c) $v_C(0^-)$；(d) $t > 0$ 时与 L 和 C 并联的等效电阻；(e) $i_A(t)$。

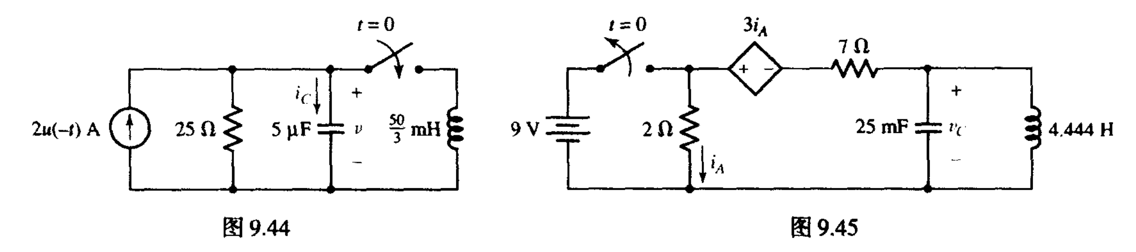


图 9.44　　图 9.45

23. 两个一角硬币用温度为 80 K 的 1 mm 厚的冰层隔开。具有电感为 4 μH 的一个钇钡氧化铜超导线圈（电阻为零）从实验室工作台上被风吹落，其两端恰好分别与两枚硬币相触。这里的冰层含有杂质离子，所以能够导电。问需要多大的电阻才能使这个奇特结构的电路表现为一个过阻尼的并联 RLC 电路？

9.3 临界阻尼响应

24. 一个并联*RLC*电路中，$L = 1$ mH, $C = 12$ μF。(a) 选择*R*使得电路成为临界阻尼响应；(b) 如果 $v_C(0^-) = 12$ V, $i_L(0^-) = 0$, 求 $t > 0$ 时 $v_C(t)$的表达式。
25. 利用一个10 nH电感和一个1 mF电容构成并联*RLC*电路。(a) 选择*R*使得电路成为临界阻尼响应；(b) 如果 $v_C(0^-) = 0$ V，$i_L(0^-) = 10$ V，求 $t > 0$ 时 $i_L(t)$的表达式；(c) 画出曲线，用PSpice仿真对结果进行验证。提交一份正确标注的原理图以及输出曲线。这两个结果是否一致？
26. 解释为什么实际中不可能碰到具有临界阻尼响应的电路。
27. 改变图9.41所示电路中的电感值，直到电路变为临界阻尼。(a) 求新的电感值；(b) 求 $t = 5$ ms时的 i_L 值；(c) 求下降时间。
28. (a) 图9.40所示电路需要用什么样的新电阻值才能达到临界阻尼？(b) 使用这个新电阻值求 $t > 0$ 时 $v_C(t)$的表达式。
29. 在习题23描述的情况中，冰层必须具有多大的电阻才可以得到一个临界阻尼的电路？
30. 在图9.39所示的电路中，设 $v(0) = -400$ V，$i(0) = 0.1$ A。如果 $L = 5$ mH，$C = 10$ nF，电路处于临界阻尼状态：(a) 求*R*；(b) 求 $|i|_{max}$；(c) 求 i_{max}。
31. 某并联*RLC*电路的 $\alpha = 1\ \text{ms}^{-1}$，$R = 1$ MΩ，已知其处于临界阻尼状态。假定电感的值可以用表达式 $L = \mu N^2 A/s$ 计算，其中，$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，*N*为线圈的匝数，*A*为线圈的横截面积，*s*为整个线圈的轴向长度。电感的横截面积为1 cm²，每厘米的线圈匝数为50，线圈由一种新发现的元素gluonium构成，该元素直到100°F时仍可保持超导状态。问该线圈有多长？

9.4 欠阻尼并联 *RLC* 电路

32. 电路如图9.46所示，求：(a) $i_L(0^+)$；(b) $v_C(0^+)$；(c) $di_L/dt|_{t=0^+}$；(d) $dv_C/dt|_{t=0^-}$；(e) $v_C(t)$；(f) 画出 $-0.1\ \text{s} < t < 2$ s时 $v_C(t)$的波形。
33. 电路如图9.47所示，求 $t > 0$ 时 $i_C(t)$的表达式。

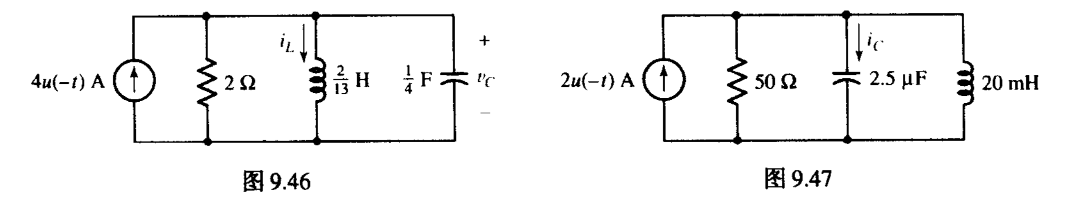


图9.46　　图9.47

34. 设图9.48所示电路中的 $\omega_d = 6$ rad/s。(a) 求*L*；(b) 求对所有*t*有效的 $i_L(t)$的表达式；(c) 画出 $-0.1\ \text{s} < t < 0.6$ s时 $i_L(t)$的曲线。
35. 电路如图9.49所示，其中的开关已打开了很长时间，在 $t = 0$ 时开关闭合。当 $t > 0$ 时，求：(a) $v_C(t)$；(b) $i_{SW}(t)$。

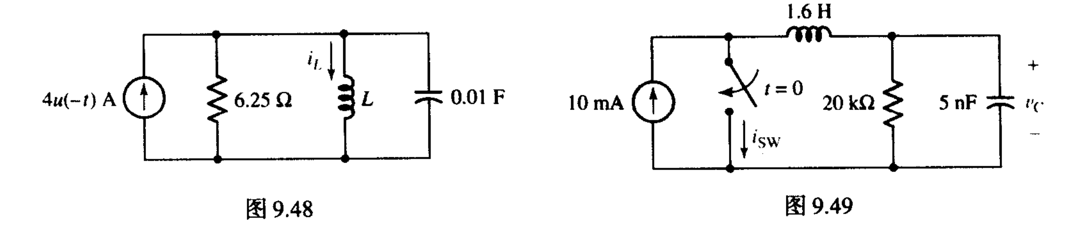


图9.48　　图9.49

36. (a) 对于图 9.50 所示的电路，求 $t>0$ 时 $v(t)$的表达式；(b) 快速画出在 $0<t<0.1$ s 内 $v(t)$的波形。

37. 对于图 9.51 所示的电路，求 $t>0$ 时 $i_1(t)$的表达式。

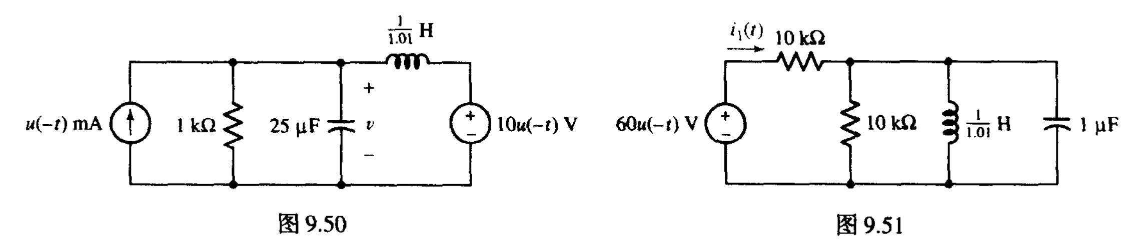


图 9.50　　图 9.51

38. 如果需要 $v(t)$为欠阻尼响应，那么需要以多大的电阻来替代图 9.44 所示电路中的 25 Ω 电阻？将求出的电阻乘以 1000，再画出响应波形。用 PSpice 确定下降时间，并给出正确标注的原理图以及输出曲线。

39. 已知图 9.14 所示电路［$L=7$ H，$C=1/42$ F，$i(0)=10$ A，$v(0)=0$］处于欠阻尼状态，确定 R 的值使得下降时间 t_s 为最小，并计算此时的 t_s。

40. (a) 将图 9.46 所示电路中的 2 Ω 电阻替换为 5 Ω 电阻，求 $i_L(t)$的表达式并求出 $t=2.5$ s 时的解；(b) 将图 9.46 所示电路中的 2 Ω 电阻替换为 0.5 Ω 电阻，给出 $i_L(t)$的表达式，并求出 $t=250$ ms 时的解；(c) 仿真(a)和(b)中的电路，并在同一张图中画出每个电路中的电感电流。同时提交一份标注好的原理图。

41. (a) 用 PSpice 对图 9.46 所示的电路建立模型，移去 $4u(-t)$ A 电流源，并通过设定合适的电感和电容初始条件得到一个等效的无源电路，提交一个正确标注好的原理图；(b) 用 Probe 画出电流 $i_L(t)$，并与手工计算得到的解进行比较。用 Probe 求出下降时间。

9.5 无源串联 *RLC* 电路

42. 电路如图 9.52 所示，求 $t=40$ ms 时 v_C，v_R 和 v_L 的值。

43. 电路如图 9.53 所示，求 $t>0$ 时 $i_L(t)$的表达式。

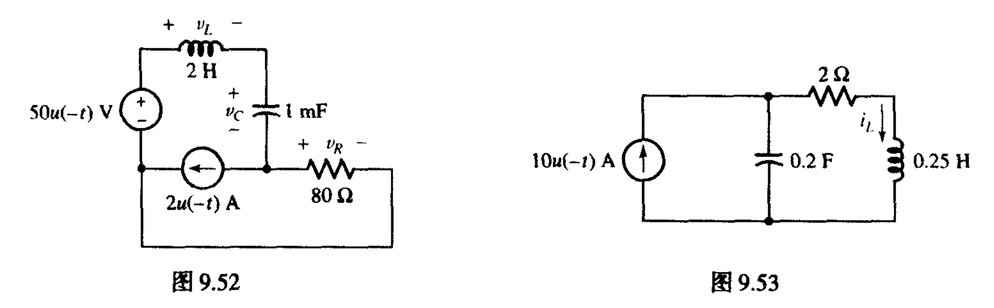


图 9.52　　图 9.53

44. 在图 9.21(a)所示的电路中，设 $R=300$ Ω 和 $C=1$ μF，电路处于临界阻尼状态。如果 $v_C(0)=-10$ V；$i(0)=-150$ mA，求：(a) $v_C(t)$；(b) $|v_C|_{max}$；(c) $v_{C,max}$。

45. 写出习题 16 的对偶问题，包括图 9.40 所示电路的对偶电路，并求解该对偶问题。

46. (a) 电路如图 9.54 所示，求 $t>0$ 时 $i_L(t)$的表达式；(b)求 $|i_L|_{max}$ 和 $i_{L,max}$。

47. 电路如图 9.55 所示，当 $t>0$ 时，求：(a) $i_L(t)$；(b) $v_C(t)$。

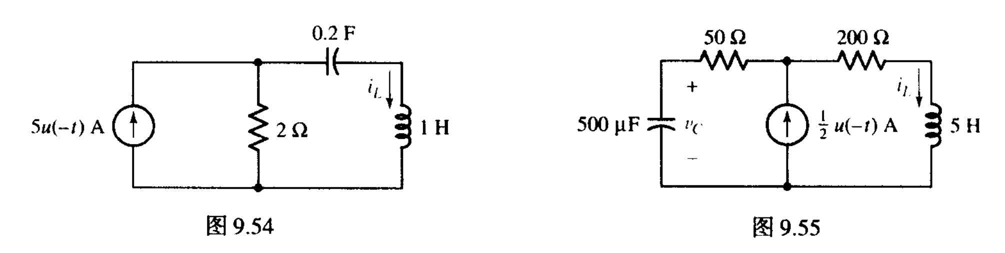


图 9.54　　图 9.55

48. 电路如图 9.56 所示，求 $t = 2$ s 时储存在电感上的能量，并用 PSpice 对答案进行验证。

49. 图 9.57 所示电路中的开关已闭合了很长的时间，$t = 0$ 时开关打开，求在 500 mH 电感上产生的电压的最大幅度，并用 PSpice 对答案进行验证。

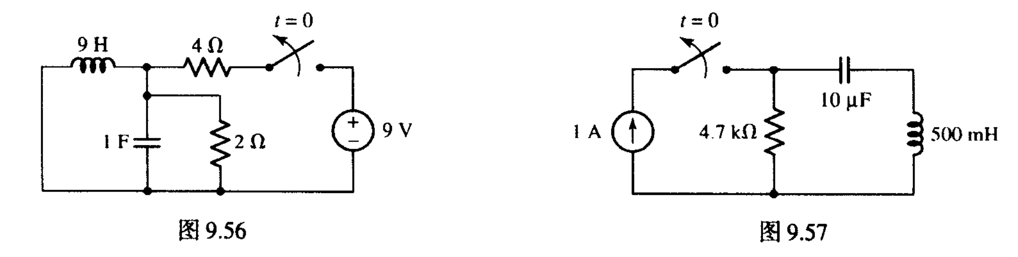


图 9.56　　图 9.57

50. 一个制作精良的电容器被连接到一个12 V的电池上，电池被放回雪地汽车前已经充足了电，电容被放在位于加拿大北部的一个无线电收发室的地板上。在一次轻微地震中，一个旧的电话机软线从书架上跌落到地板上，其中的一端恰与电容的一端接触。该电话机软线具有 14 mΩ 的电阻和 5 μH 的电感，电容初始储能为 144 mJ。(a)在地震开始前的瞬间电容电压为多大？(b) 在电话机软线掉到汽车地板上与电容接触1 s后电容电压为多大？(c) 一只浸了水的北极熊为寻找食物而闯进这个收发室，碰巧将一只手掌放在电话器软线的未连接的一端，而另一只手掌放在电容未连接的一端，北极熊的肌肉抽搐了18 μs，然后怒吼着跑出了房间。如果需要 100 mA 的电流才能使熊抽搐得这么厉害，那么浸湿的熊皮电阻为多大？
51. 电路如图 9.56 所示，需要将电路中的 2 Ω 电阻替换成多大的电阻才能够使电路达到临界阻尼状态？计算 $t = 100$ ms 时储存在电感中的能量。
52. 电路如图 9.58 所示，求 $t > 0$ 时 i_L 的表达式。
53. 电路如图 9.58 所示，求 $t > 0$ 时 v_C 的表达式。
54. 参考图 9.59 所示电路，如果 $C = 1$F，求对所有 t 有效的 i_1 的表达式。
55. 参考图 9.59 所示电路，如果 $C = 1$ mF，求 v_C 的表达式。

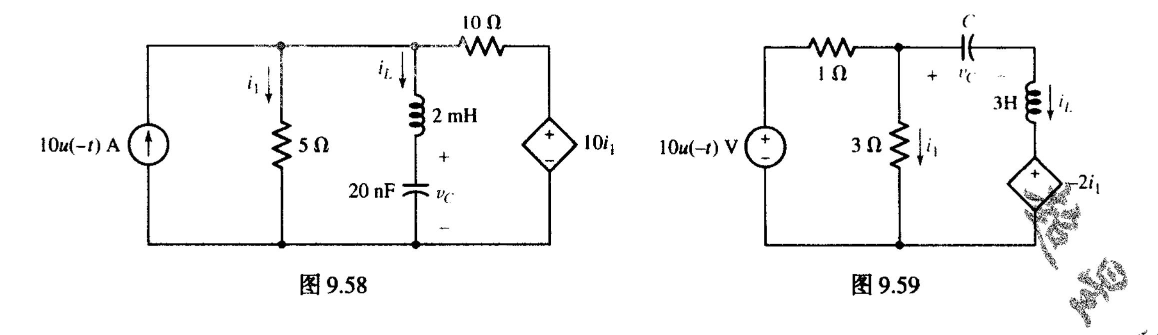


图 9.58　　图 9.59

9.6 *RLC* 电路的完全响应

56. (a) 求图 9.60 所示电路中 $i_L(t)$的表达式；(b) $t = 0$ 之后，在什么时刻 $i_L(t) = 0$?
57. 将图 9.53 所示电路中的电源替换成 $10u(t)$ A，求 $i_L(t)$。
58. 将图 9.55 所示电路中的电源替换成 $i_s = 0.5[1 - 2u(t)]$ A，求 $i_L(t)$。
59. 将图 9.47 所示电路中的电源替换成 $i_s = 2[1 + u(t)]$ A，求 $t > 0$ 时 $i_C(t)$的表达式。
60. (a) 电路如图 9.61 所示，求 $t > 0$ 时 $v_C(t)$的表达式；(b) 画出 -0.1 ms $< t < 2$ ms 内 $v_C(t)$随 t 变化的曲线。

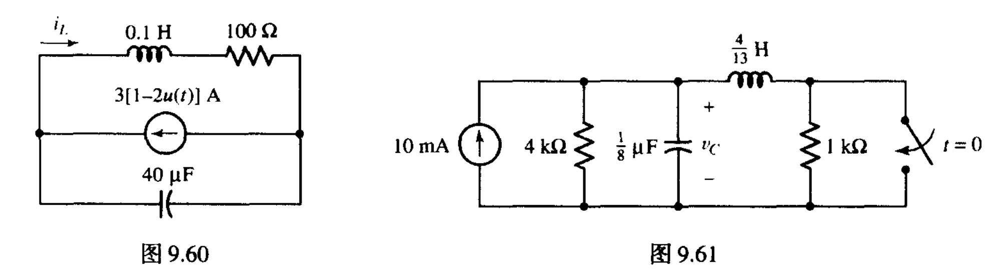


图 9.60　　　　图 9.61

61. 图 9.62 所示电路中的开关已闭合很长时间了，在 $t = 0$ 时刻打开。求 $t > 0$ 时 $v_C(t)$的表达式。
62. 电路如图 9.63 所示，如果 $v_s(t)$等于：(a) $10u(-t)$ V；(b) $10u(t)$ V，求 $t > 0$ 时 $i_R(t)$的表达式。

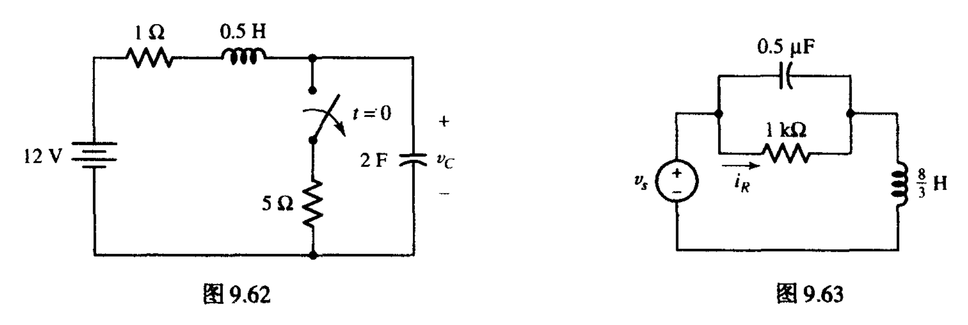


图 9.62　　　　图 9.63

63. 电路如图 9.64 所示，如果 $v_s(t)$分别等于：(a) $10u(-t)$ V；(b) $10u(t)$ V，求 $t > 0$ 时 $i_s(t)$的表达式。
64. 图 9.65 所示电路中的 2 Ω 电阻被替换为 3 H 电感，如果在 $t = 0$ 时刻电流源从 15 A 增大到 22 A，确定 $t = 200$ ms 时储存在电容上的能量。用 PSpice 对结果进行验证。

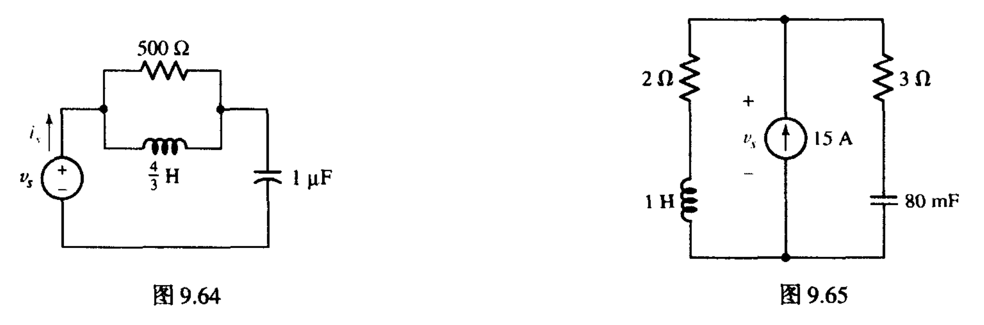


图 9.64　　　　图 9.65

65. 电路如图 9.65 所示，电流源在 $t = 0$ 时刻突然从 15 A 增大到 22 A，求以下时刻的电压 v_s：(a) $t = 0^-$；(b) $t = 0^+$；(c) $t = \infty$；(d) $t = 3.4$ s，并用合适的 PSpice 仿真对结果进行验证。
66. 电路如图 9.65 所示，电流源在 $t = 0$ 时突然从 15 A 掉到 0 A，然后在 $t = 1$ s 时增加到 3 A。画出 $v_s(t)$的曲线。用 PSpice 仿真对结果进行验证。

67. 5 mH 电感与 25 μF 电容、20 Ω 电阻以及电压源 $v_x(t)$串联。该电压源在 $t = 0$ 之前为零，在 $t = 0$ 时刻跳变到 75 V，然后在 $t = 1$ ms 又变为零，又在 $t = 2$ ms 跳变到 75 V，随后周期性地重复该过程。求在下面时刻的电源电流：(a) $t = 0^-$；(b) $t = 0^+$；(c) $t = 1$ ms；(d) $t = 2$ ms。

68. 设计一个电路产生衰减的正弦脉冲，峰值电压为 5 V，并且至少有另外 3 个电压幅度大于 1 V 的峰值。用 PSpice 仿真对设计进行验证。

69. 一个 12 V 的电池放在位于太平洋的某个荒岛的小屋中，其正极连接到一个 314.2 pF 电容的一端，而该电容与一个 869.1 μH 的电感串联。在日本 Bonin 岛上的地震触发了一次海啸，海啸冲入小屋，海水落到一块布上，将电感 - 电容组合的另一端与电池的负极连接起来，构成了一个串联 *RLC* 电路。由此产生的振荡被附近一艘船上正在监测 290.5 kHz(1.825 Mrad/s) 频率无线电导航信号的设备接收到。问湿布的等效电阻是多大？

70. 求图 9.66 所示电路中 $t = 1$ ms 时电容两端的电压 $v_C(t)$。用 PSpice 仿真对结果进行验证。

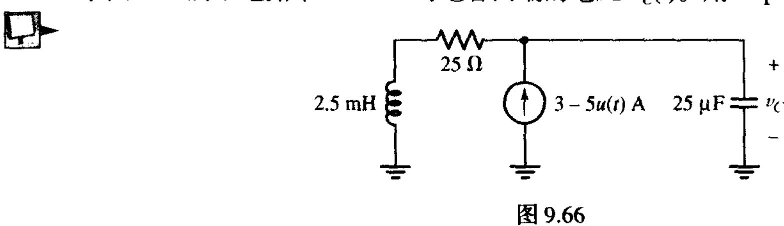


图 9.66

9.7 无损耗 *LC* 电路

71. 设计一个运放电路对图 9.67 所示的 *LC* 电路的电压响应建模。运放采用 LF411 设计，对该电路和图 9.67 所示的电路进行仿真并验证设计结果。假设 $v(0) = 0$, $i(0) = 1$ mA。



72. 参见图 9.68 所示的电路设计一个运放电路，使该电路的输出在 $t > 0$ 时等于 $i(t)$。

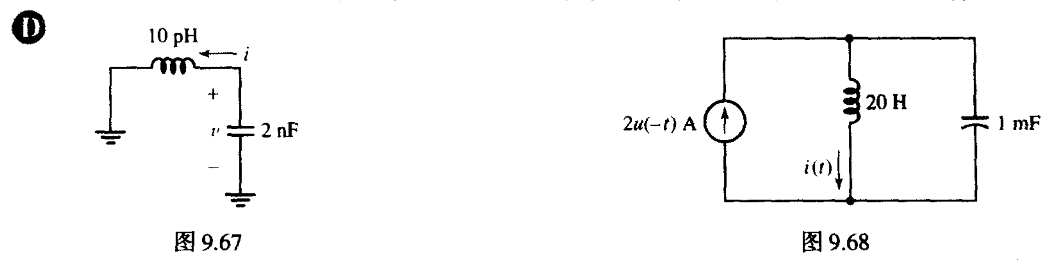


图 9.67　　　　图 9.68

73. 某无源电路由一个 1 kΩ 电阻和一个 3.3 mF 电容组成，其中电容两端的初始电压为 1.2 V。(a) 列出 $t > 0$ 时电容两端电压 v 的微分方程；(b) 设计一个运放电路，其输出为 $v(t)$。

74. 将图 9.67 所示电路中的电容替换为 20 H 电感与 5 μF 电容的并联组合。设计一个运放电路，使其输出在 $t > 0$ 时为 $i(t)$。在 PSpice 中，对使用 LM111 运放设计的电路和电容 - 电感电路进行仿真，从而验证设计结果。

75. 一个无源 *RL* 电路由一个 20 Ω 电阻和一个 5 H 电感组成，如果电感的初始电流为 2 A：(a) 列出 $t > 0$ 时 i 的微分方程；(b) 设计一个运放积分器使其输出为 $i(t)$，取 $R_1 = 1$ MΩ，$C_f = 1$ μF。

第10章　正弦稳态分析

主要概念

- 正弦函数的特性
- 正弦波的相量表示
- 时域和频域的转换
- 阻抗和导纳
- 电抗和电纳
- 频域的并联和串联组合
- 利用相量确定受迫响应
- 电路分析技术在频域内的应用

引言

线性电路的完全响应包含两部分：自由响应和受迫响应。自由响应是电路条件的突然变化引起的短暂的瞬态响应，受迫响应是对电路存在的任何独立源作用下的长期的稳态响应。到目前为止，我们考虑的唯一受迫响应是由直流电源引起的。另一个非常常见的激励函数是正弦波。该函数可以描述市电电压，以及连接到家庭居住区及工业区的电力线上的高压电压。

本章不关注瞬态响应，而是讨论正弦电压和电流激励下的电路（电视机，烤面包机，电力配电网络，等等）的稳态响应。我们利用一个非常有效的方法来分析这种电路，这种方法可以将微积分方程转换成代数方程。

10.1　正弦波特性

考虑一个以正弦形式变化的电压：

$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

其波形如图10.1(a)和(b)所示。正弦波的幅度为V_m，幅角为ωt，弧度频率或角频率为ω。在图10.1(a)中，画出的$V_m \sin \omega t$是幅角ωt的函数。显然，正弦波具有周期性。该函数每2π弧度重复一次，因此周期为2π弧度。在图10.1(b)中，$V_m \sin \omega t$被表示成随时间t变化的曲线，显然该曲线也具有周期性。周期为T的正弦曲线必然每秒重复$1/T$次，即它的频率f为$1/T$赫兹（Hertz），简写为Hz。因此，

$$f = \frac{1}{T}$$

由于

$$\omega T = 2\pi$$

因此可以得到频率和角频率之间的一般关系为

$$\omega = 2\pi f$$

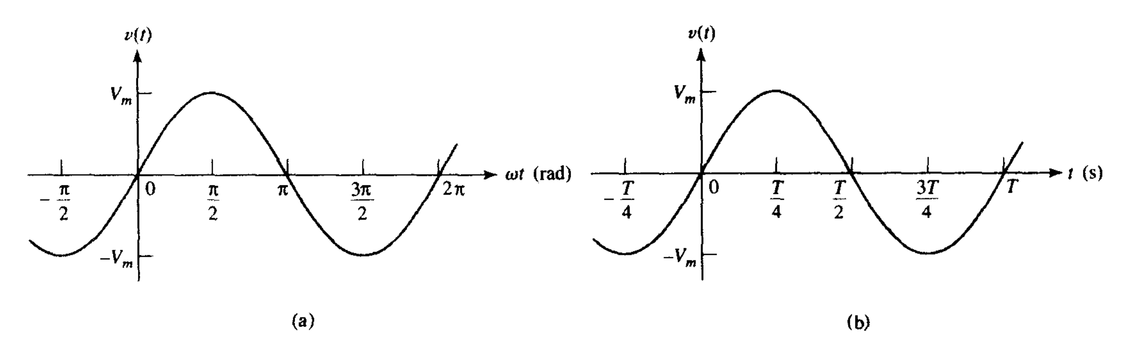


图 10.1　正弦函数 $v(t) = V_m \sin \omega t$: (a) 随 ωt 变化的曲线; (b) 随 t 变化的曲线

滞后和超前

正弦函数的一个更通用的形式是

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{1}$$

这种形式的函数在幅角中包括一个相角 θ。图 10.2 画出了式[1]随 ωt 变化的曲线，其中相角表示从初始的正弦曲线（图中以绿色所示）往左移动的弧度，或者说在时间上超前。因为曲线 $V_m \sin(\omega t + \theta)$ 上的点比曲线 $V_m \sin \omega t$ 上相应的点早发生 θ 弧度，或早 θ/ω 秒，所以称 $V_m \sin(\omega t + \theta)$比 $V_m \sin \omega t$ 超前 θ 弧度。因此，也可以说，$\sin \omega t$ 比 $\sin(\omega t + \theta)$ 滞后 θ 弧度，比 $\sin(\omega t + \theta)$超前 $-\theta$ 弧度，或比 $\sin(\omega t - \theta)$超前 θ 弧度。

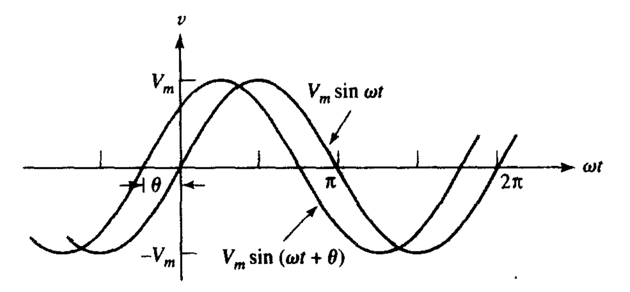


图 10.2　正弦波 $V_m \sin(\omega t + \theta)$比 $V_m \sin \omega t$ 超前 θ 弧度

说明：将弧度转换成角度，只需将相角乘以 180/π 即可。

超前和滞后两种情况下，这两条正弦曲线均称为不同相；反之，如果相角相等，则称两个正弦曲线同相。

在电气工程中，相角通常用度表示，而不用弧度表示。为了避免混淆，应该使用度的符号。因此，需要将下面的形式

$$v = 100 \sin\left(2\pi 1000t - \frac{\pi}{6}\right)$$

改写成

$$v = 100 \sin(2\pi 1000t - 30^\circ)$$

计算该表达式在特定时刻的值，如 $t = 10^{-4}$ s，则应先计算 $2\pi\ 1000t$ 等于 0.2π rad，然后必须将其表示为 36°，才能用它减去 30°。千万不要将弧度和角度相混淆。

需要对相位进行比较的两个正弦波必须具备以下条件：

1. 都写成正弦形式，或都写成余弦形式。
2. 都写成正幅度的形式。
3. 两个函数具有相同的频率。

正弦到余弦的转换

正弦和余弦在本质上是相同的函数，但却有 90° 的相位差。因此，$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90°)$。任何正弦函数在幅角上加上或减去 360° 的倍数均不会改变函数值，因此可以说

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m_1}\cos(5t + 10°) \\ &= V_{m_1}\sin(5t + 90° + 10°) \\ &= V_{m_1}\sin(5t + 100°) \end{aligned}$$

超前

$$v_2 = V_{m_2}\sin(5t - 30°)$$

130°。也可以说，v_1 滞后 v_2 230°，因为 v_1 也可以写成

$$v_1 = V_{m_1}\sin(5t - 260°)$$

假定 V_{m_1} 和 V_{m_2} 都是正值。图 10.3 给出了一种图形表示形式，我们注意到两个正弦函数的频率必须相同（本例中为 5 rad/s），否则这种比较就会失去意义。通常，两个正弦函数的相位差用小于等于 180° 的角度来表示。

注意：$-\sin\omega t = \sin(\omega t \pm 180°)$；$-\cos\omega t = \cos(\omega t \pm 180°)$；$\pm\sin\omega t = \cos(\omega t \pm 90°)$；$\pm\cos\omega t = \sin(\omega t \pm 90°)$。

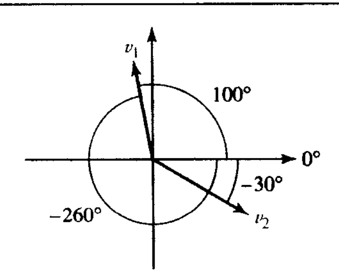


图 10.3　两个正弦波 v_1 和 v_2 的图形表示。每个正弦函数的幅度用相应箭头的长度表示，相角用相对于正 x 轴方向的夹角表示。在该图中，v_1 比 v_2 超前 100° + 30° = 130°，但也可以说 v_2 比 v_1 超前 230°。通常用小于等于 180° 的角度来表示相位差

两个正弦波之间超前和滞后的概念被广泛使用，可以同时从数学上和图形上来理解它们的关系。

练习

10.1　求 i_1 滞后于 v_1 的角度，设 $v_1 = 120\cos(120\pi t - 40°)$ V，i_1 等于：(a) $2.5\cos(120\pi t + 20°)$ A；(b) $1.4\sin(120\pi t - 70°)$ A；(c) $-0.8\cos(120\pi t - 110°)$ A。

10.2　如果 $40\cos(100t - 40°) - 20\sin(100t + 170°) = A\cos 100t + B\sin 100t = C\cos(100t + \phi)$，求 A，B，C 和 ϕ。

答案：10.1：-60°；120°；-110°。10.2：27.2；45.4；52.9；-59.1°。

10.2　正弦函数激励下的受迫响应

由于已经熟悉了正弦函数的数学特性，下面将一个正弦激励函数应用于一个简单电路来求解受迫响应。首先写出给定电路的微分方程，该方程的完全响应包含两部分：通解（自由响应）和特解（受迫响应）。本章假定不关心电路暂时存在的响应（即自由响应），而只关心那些长期存在的响应（即“稳态”响应）。

稳态响应

稳态响应与受迫响应是同义的，通常将要分析的电路称为处于正弦稳态。遗憾的是，很多人错误地认为稳态就是“不随时间变化”。对于直流激励函数产生的响应，这是正确的；但是对于正弦稳态响应，它显然是随时间变化的。所以，这里的稳态仅仅指暂态或者说自由响应消失后所达到的状态。

受迫响应的数学形式为激励函数加上它的各阶导数和一次积分，从而可以得到一种求解受迫响应的方法，即假定它的解由一些函数的和组成，这些函数均含有待定的幅度，通过直接代入微分方程可以确定这些未知幅度。不过下面将要讲到，这将是一个冗长的过程，所以需要寻找另一种更简单的求解方法。

考虑图 10.4 所示的串联 RL 电路。正弦电源电压 $v_s = V_m \cos \omega t$ 已经接入电路很长时间了，电路的自由响应也已经完全消失。我们来寻求受迫响应（稳态响应），它必须满足下面的微分方程：

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

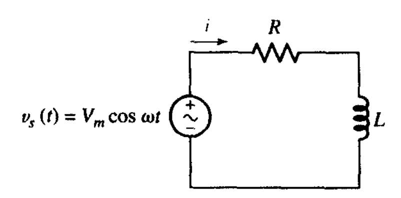


图 10.4　一个用于求解受迫响应的串联 RL 电路

该方程是通过对上述简单回路应用 KVL 得到的。在导数等于 0 的时刻，可以看到该电流必然具有 $i \propto \cos \omega t$ 的形式。同样，在电流等于 0 时，其导数必定正比于 $\cos \omega t$，这表明电流具有 $\sin \omega t$ 的形式。因此假设受迫响应具有下面的一般形式：

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

其中，I_1 和 I_2 是实常数，它们的值取决于 V_m, R, L 和 ω。该响应不存在常数项和指数项。将该假设解代入微分方程可以得到

$$L(-I_1\omega \sin \omega t + I_2\omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

如果合并 sin 和 cos 项，可以得到

$$(-L\,I_1\omega + RI_2) \sin \omega t + (L\,I_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

该方程必须对所有的时间 t 都成立，而这只有当 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 前的乘积因子均为零时才可能做到，因此，

$$-\omega L\,I_1 + RI_2 = 0 \qquad \text{和} \qquad \omega L\,I_2 + RI_1 - V_m = 0$$

从而得到 I_1 和 I_2 的解为

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad I_2 = \frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

得到受迫响应为

$$i(t)=\frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t+\frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t \quad [2]$$

一个更简洁的直观形式

上面得到的受迫响应的表达式有些复杂，可以将响应表示成包含相角的单个正弦函数或者余弦函数的形式，这样更直观一些。这里将其表示成余弦函数：

$$i(t)=A\cos(\omega t-\theta) \quad [3]$$

至少有两种求 A 和 θ 的方法。一种是将式[3]直接代入原始微分方程，另一种是令式[2]和式[3]相等。这里选择后一种方法，将函数 $\cos(\omega t-\theta)$展开如下：

$$A\cos\theta\cos\omega t+A\sin\theta\sin\omega t=\frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t+\frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t$$

接下来，提取出 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 的系数，可以得到

$$A\cos\theta=\frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2} \qquad 和 \qquad A\sin\theta=\frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

为了确定 A 和 θ，等式两边分别相除：

$$\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta}=\tan\theta=\frac{\omega L}{R}$$

此外将两个方程分别取平方并将结果相加：

$$A^2\cos^2\theta+A^2\sin^2\theta=A^2=\frac{R^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}+\frac{\omega^2L^2V_m^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}$$

$$=\frac{V_m^2}{R^2+\omega^2L^2}$$

因此，

$$\theta=\arctan\frac{\omega L}{R}$$

和

$$A=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

因此受迫响应的另一种形式为

$$i(t)=\frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\arctan\frac{\omega L}{R}\right) \quad [4]$$

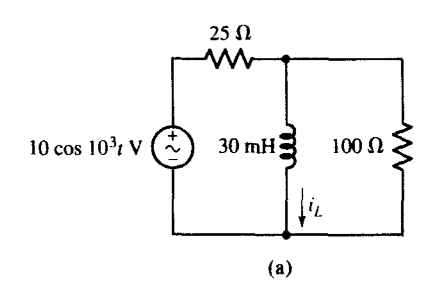
可见，响应的幅度与激励函数的幅度成正比，否则将不满足线性性质。随着 R, L 或 ω 的增大，该响应的幅度将减小，但不是成比例减小。此外，电流滞后于所加电压 $\arctan(\omega L/R)$的角度，它在0和90°之间。当 $\omega=0$ 或 $L=0$ 时，电流必定与电压同相，因为前者对应于直流电压的情形，而后者对应于电阻电路的情形，这个结果和前面得到的结果一致。如果 $R=0$，电流将滞后电压90°。对

于电感来说，如果遵循无源符号规则，则电流确实恰好滞后电压 90°。同样可以证明：流过电容的电流将比其两端的电压超前 90°。

电流与电压的相位差取决于 ωL 与 R 的比值。称 ωL 为电感的感抗，单位为欧姆（Ω），它代表电感对流过的正弦电流的抵抗能力。

下面讨论如何将该一般分析结果应用到非简单的串联回路的电路中。注意，我们实际上已经忽略了瞬态响应，从而只关心电路的稳态或受迫响应，即假设所有的瞬态都已经完全消失。

例题 10.1　求图 10.5(a)所示电路中的电流 i_L。



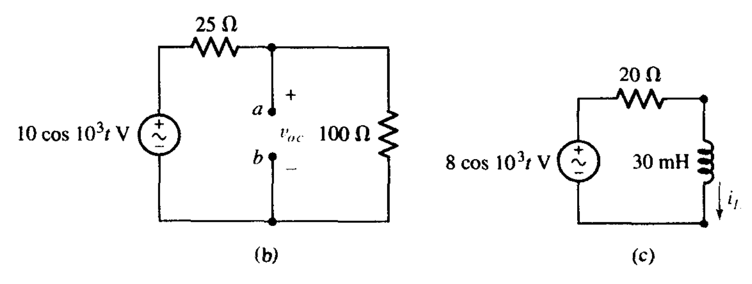


图 10.5　(a) 例题 10.1 的电路，需要求解电流 i_L；(b) 求 a 和 b 两端的戴维南等效；(c) 简化的电路

解： 尽管电路有一个正弦电源和一个电感，但还包含两个电阻，而且不是一个单回路电路。为了应用前面分析的结果，需要求出图 10.5(b)中从 a 和 b 两端看进去的戴维南等效电路。

开路电压 v_{oc} 为

$$v_{oc} = (10\cos 10^3 t)\frac{100}{100+25} = 8\cos 10^3 t \qquad \text{V}$$

因为没有受控源，所以可以通过将独立源置零并计算无源网络的电阻来求得 R_{th}，得到 $R_{th} = (25 \times 100)/(25 + 100) = 20\ \Omega$。

因此得到一个串联 RL 电路，$L = 30$ mH，$R_{th} = 20\ \Omega$，电源电压为 $8\cos 10^3 t$ V，如图 10.5(c)所示。根据从一般 RL 串联电路中得到的式[4]，可得

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}}\cos\left(10^3 t - \arctan\frac{30}{20}\right) \\ &= 222\cos(10^3 t - 56.3°)\ \text{mA} \end{aligned}$$

电压和电流波形如图 10.6 所示。

注意，电流和电压波形的相位差不等于 90°，这是因为没有画出电感电压的缘故，这里留给读者作为练习。

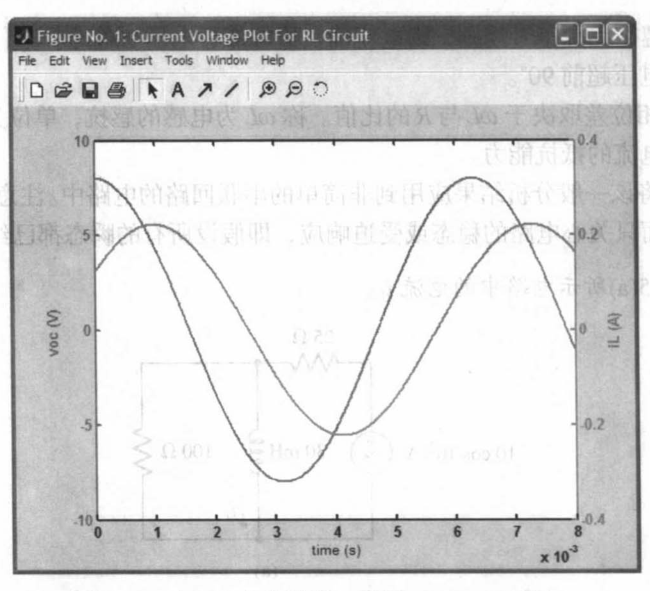


图 10.6 电压和电流波形，利用 MATLAB 画出：

```
EDU>> t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU>> v = 8*cos(1000*t);
EDU>> i = 0.222*cos(1000*t - 56.3*pi/180);
EDU>> plotyy(t,v,t,i);
EDU>> xlabel('time(s)');
```

练习

10.3 电路如图 10.7 所示，设 $v_s = 40\cos 8000t$ V。利用戴维南定理求 $t=0$ 时的参数值：(a) i_L；(b) v_L；(c) i_R；(d) i_s。

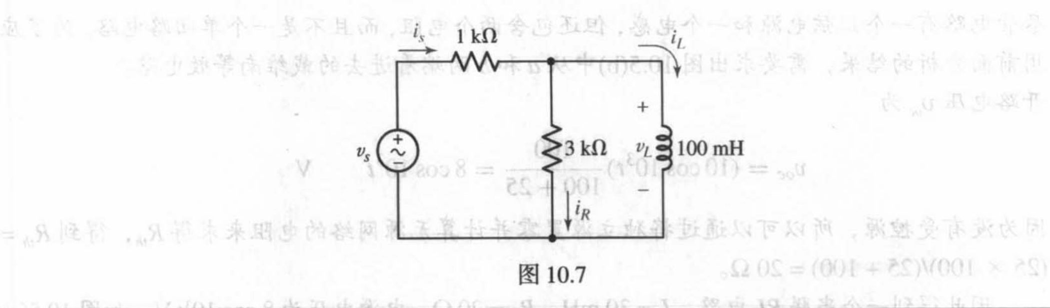


图 10.7

答案：18.71 mA；15.97 V；5.32 mA；24.0 mA。

10.3 复激励函数

求一般串联 *RL* 电路正弦稳态响应的方法不是无足轻重的问题。如果两个无源元件都是电阻，那么即使存在正弦激励函数，根据欧姆定律得到的简单电压－电流关系也会使电路分析非常简单。但是电感的存在导致电路分析变得复杂起来，因为电感的伏安关系并不简单，原本是求解代数方程，但在电感电路中将变成求解非齐次微分方程，所以例题中所描述的方法不适于分析每个电路，因此需要简化的分析方法。其结果是采用这种简化方法将得到电容、电感以及电阻各自的正弦电流和正

弦电压之间的一种代数关系，即对于任意复杂的电路，均可以列出一组代数方程，但是方程组中的常量和变量均为复数而不是实数，从而使任意电路的正弦稳态分析变得几乎与熟知的电阻电路分析一样简单。

下面考虑将复激励函数（即激励函数同时具有实部和虚部）接入到一个网络中。初看起来像是一个令人奇怪的想法，但后面将讲到，在正弦稳态分析中，采用复变量来进行分析要比采用实变量简单得多。可以想象复激励函数会产生一个复响应，复响应的实部由激励函数的实部产生，复响应的虚部由激励函数的虚部产生。这是合理的，因为很难想象一个实电压会产生一个虚响应，反之亦然。

在图 10.8 中，将下面的正弦电压接入一个一般网络：

$$V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{5}$$

为了避免使用叠加定理，假设该网络只包含无源元件（即非独立源），需要确定网络的某些支路上的电流响应，式[5]中的参数都为实数。

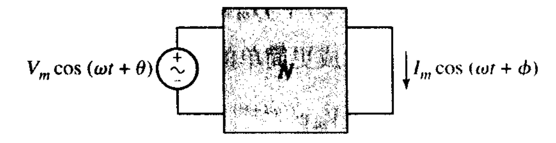


图 10.8　正弦激励函数 $V_m \cos(\omega t + \theta)$，产生正弦稳态响应 $I_m \cos(\omega t + \phi)$

已经证明可以将响应表示成下面的一般余弦函数：

$$I_m \cos(\omega t + \phi) \tag{6}$$

在线性电路中，一个正弦激励函数总是会产生一个具有相同频率的正弦受迫响应。

现在将激励函数的相角移位 90°，或者说改变定义 $t = 0$ 的时刻。因此，激励函数变为

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90°) = V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{7}$$

把它加到同一个网络上，则产生相应的响应：

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90°) = I_m \sin(\omega t + \phi) \tag{8}$$

下面加入一个虚激励函数，虽然不能在实验室中做到这一点，但在数学上可以实现。

虚电源产生虚响应

构造一个简单的虚电源，只需将式[7]乘以虚数运算符即可。将下面的电源接入网络：

$$j V_m \sin(\omega t + \theta) \tag{9}$$

响应是什么呢？如果将电源增大为原来的两倍，根据线性原理，响应也应该变为原来的两倍；激励函数乘以常数 k 将使响应乘以相同的常数 k。因此，如果取这个常量为 $\sqrt{-1}$，那么该关系同样成立，因此式[9]的虚电源产生的响应为

$$j I_m \sin(\omega t + \phi) \tag{10}$$

该虚电源和响应如图 10.9 所示。

说明：在电子工程中，采用“j”而不是“i”来表示 $\sqrt{-1}$ 可以避免与电流符号相混淆。

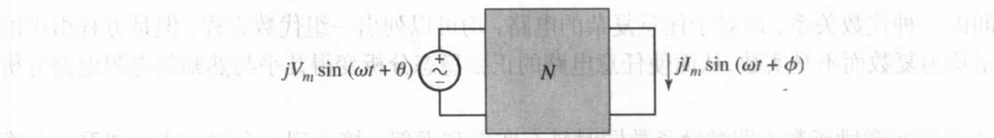


图 10.9 图 10.8 所示的网络中，虚正弦激励函数 $jV_m \sin(\omega t + \theta)$产生虚正弦响应 $jI_m \sin(\omega t + \phi)$

应用复激励函数

一个实电源将产生一个实响应，同样，一个虚电源将产生一个虚响应。因为处理的是线性电路，所以可以使用叠加定理求得复激励函数（实激励函数与虚激励函数之和）作用下产生的响应。因此式[5]和式[9]的激励函数之和

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \tag{11}$$

必定会产生式[6]与式[10]之和组成的响应：

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \tag{12}$$

利用欧拉公式，可以将复电源和复响应表示成更简单的形式。即式[11]的电源可以写成

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} \tag{13}$$

式[12]的响应可以写成

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)} \tag{14}$$

图 10.10 所示的是复电源和复响应。

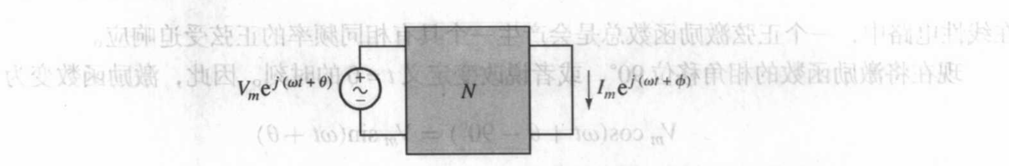


图 10.10 图 10.8 所示的网络中，复激励函数产生复响应

说明： 附录 5 给出了复数和与复数相关的一些参量的定义，并回顾了复数的运算，导出了欧拉公式，以及指数形式与极坐标形式之间的关系。

一个实数、虚数或复激励函数将分别产生一个实数、虚数或复响应。此外，通过欧拉公式和叠加定理，一个复激励函数可以认为是一个实数和虚数激励函数之和；复响应的实部由复激励函数的实部产生，而响应的虚部由复激励函数的虚部产生。

我们的任务并不是将一个实激励函数加到电路中来求其产生的实响应，而是用一个复激励函数替代给定的实激励函数，然后求得复响应，使得复响应的实部等于给定实激励的实响应。该分析过程的好处是将描述电路稳态响应的微积分方程变为简单的代数方程。

将微分方程转化为代数方程

现在以图 10.11 所示的简单 *RL* 串联电路为例来解释。接入的实电源为 $V_m \cos \omega t$，需要求出实响应 $i(t)$。因为

$$\cos \omega t = \text{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

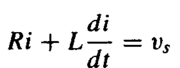
则复电源必须为

$$V_m e^{j\omega t}$$

将复响应表示为幅度 I_m 和 ϕ 相角待定的形式：

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

写出该电路的微分方程：



$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$

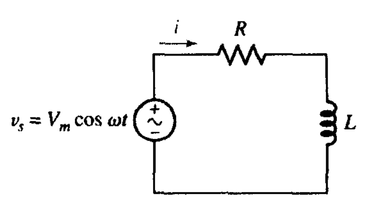


图 10.11　一个处于正弦稳态的简单电路，采用复激励函数对其进行分析

代入 v_s 和 i 的复数表达式，得到

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + L\frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t+\phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

求出式中的导数，可得

$$RI_m e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

这样便得到了一个代数方程。为了确定 I_m 和 ϕ，方程两边除以相同的因子，得到

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega L I_m e^{j\phi} = V_m$$

对左边提取公因子：

$$I_m e^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

重新整理，得到

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

再将等式右边表示成指数或者极坐标形式，从而可以求出 I_m 和 ϕ：

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\arctan(\omega L/R))} \qquad [15]$$

因此，

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

和

$$\phi = -\arctan\frac{\omega L}{R}$$

采用极坐标表示形式，可以写成

$$I_m \underline{/\phi}$$

或

$$V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\ \underline{/-\arctan \omega L/R}$$

式[15]为复响应。因为已经得到 I_m 和 ϕ，因此可以立即写出 $i(t)$ 的表达式。但是，可以采用另一种更为严格的方法来求解，即通过在式[15]两边同时乘以因子 $e^{j\omega t}$，然后取实部得到实响应 $i(t)$。采用上面任意一种方法均可以得到

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{\omega L}{R}\right)$$

它与式[4]中得到的响应一致。

例题 10.2 一个500 Ω电阻和一个95 mH电感串联连接，如果这两个元件上流过$8e^{j3000t}$ mA的复电流，求这两个元件两端的复电压。

解：未知复电压有两个待定系数：幅度V_m和相角ϕ。但该电压与电流必须具有相同的频率（3000 rad/s），因此可以将电压表示为

$$V_m e^{j(3000t+\phi)}$$

令其等于电阻电压与电感电压之和：

$$V_m e^{j(3000t+\phi)} = (500)0.008e^{j3000t} + (0.095)\frac{d(0.008e^{j3000t})}{dt}$$

求出式中的导数，可得

$$V_m e^{j(3000t+\phi)} = 4e^{j3000t} + j2.28e^{j3000t}$$

消去指数项e^{j3000t}，得到

$$V_m e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

将右边表示成极坐标形式：

$$4 + j2.28 = 4.60e^{j29.7^\circ}$$

从中可以得出$V_m = 4.60$ V，$\phi = 29.7^\circ$，因此所求电压为

$$4.60e^{j(3000t+29.7^\circ)} \text{ V}$$

如果想求出实响应，那么只需取该复响应的实部即可：

$$\text{Re}\{4.60e^{j(3000t+29.7^\circ)}\} = 4.60\cos(3000t + 29.7^\circ) \quad \text{V}$$

因此，可以不求解微分方程而得到一个包含储能元件电路的受迫响应。

说明：如果在求解这些问题中遇到困难，请参见附录5。

练习

10.4 计算下列表达式，并将结果表示成直角坐标形式：(a) $[(2\angle 30^\circ) \times (5\angle -110^\circ)](1 + j2)$；(b) $(5\angle -200^\circ) + 4\angle 20^\circ$；计算下面的表达式并将它们表示成极坐标的形式：(c) $(2 - j7)/(3 - j)$；(d) $8 - j4 + [(5\angle 80^\circ)/(2\angle 20^\circ)]$。

10.5 如果采用无源符号规则：(a) 将复电流$4e^{j800t}$ A接入1 mF电容与2 Ω电阻的串联组合，求组合两端的复电压；(b) 将复电压$100e^{j2000t}$ V接入10 mH电感和50 Ω电阻的串联组合，求产生的复电流。

答案：10.4：$21.4 - j6.38$；$-0.940 + j3.08$；$2.30\angle -55.6^\circ$；$9.43\angle -11.22^\circ$。
10.5：$9.43e^{j(800t - 32.0^\circ)}$ V; $5.39e^{j(2000t - 68.2^\circ)}$ A。

10.4　相量

给定频率的正弦电流或电压可以只用两个参数来表示——幅度和相角。电压和电流的复数表示也可以利用这两个参数。例如，假定一个正弦电流响应为

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

其中，与该电流响应相应的复数形式为

$$I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

一旦指定I_m和ϕ，电流即完全确定。对于任何在某个频率ω下处于正弦稳态的线性电路，其中的任何电流或电压均可以用幅度和相角完整地描述。此外，每个电流和电压的表达式均含有同一个因子$e^{j\omega t}$，因为对于任何量都是如此，因此该因子不包含有用信息。当然，通过该因子可以确定频率的大小，但只需要在电路图中将该值注明一次即可。在求解过程中，没有必要考虑这个多余的信息，从而可以简化求解过程。因此，可以将例题10.1的电压和电流响应表示为

$$V_m \quad 或 \quad V_m e^{j0°}$$

和

$$I_m e^{j\phi}$$

说明：$e^{j0} = \cos 0 + j\sin 0 = 1$。

通常将该复数量写成极坐标形式而不是指数形式，这样是为了节省时间和精力。因此，源电压为

$$v(t) = V_m \cos \omega t = V_m \cos(\omega t + 0°)$$

现在将其表示成复数形式：

$$V_m \angle 0°$$

电流响应为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

或

$$I_m \angle \phi$$

这种复数的缩减表示称为相量（phasor）[①]。

说明：记住，我们讨论的稳态电路的响应一定是在激励源的频率上产生的，所以频率ω一定是已知的。

下面回顾一下将一个实正弦电压或电流变换成相量的过程，然后将给出更有意义的相量定义及其符号。

一个实正弦电流为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

利用欧拉公式将其表示成一个复变量的实部：

$$i(t) = \text{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

然后，去掉符号Re{}，用复量来表示这个电流，从而给电流添加了虚部，但是没有改变原来的实部。再去掉因子$e^{j\omega t}$，进一步简化为

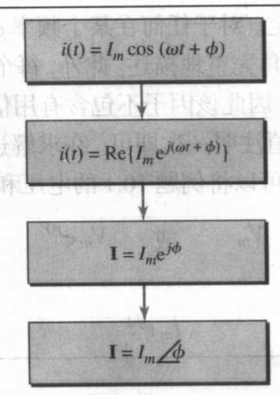
① 不要将它与移相器混淆，移相器是电视机中一个有趣的器件。

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\phi}$$

将结果表示成极坐标形式：

$$\mathbf{I} = I_m \underline{/\phi}$$

这个复数表示就是相量表示。相量是一个复量，因此用粗体表示。在相量表示中采用大写字母是因为相量不是关于时间的函数，它只包含幅度和相角信息。为了表示这种差别，将 $i(t)$称为时域表示，而将相量**I**称为频域表示。需要指出的是：频域表示并不显式地包含频率，但是可以认为频率是频域的基本量，因此可以略去。



将 $i(t)$ 变成 **I** 的过程称为从时域到频域的相量变换。

例题 10.3 将时域电压 $v(t) = 100\cos(400t - 30°)$ V 变换成频域电压。

解： 时域表达式是包含相角的余弦形式，因此去掉 $\omega = 400$ rad/s 可得

$$\mathbf{V} = 100 \underline{/-30°}\ \text{V}$$

注意，我们跳过了几个步骤而直接写出这个表示式。这也是读者有时会感到困惑的地方，因为他们容易忘记相量形式不等于时域电压。事实上，相量形式只是将相应的虚部加上时域函数 $v(t)$而得到的复量的简洁形式。

练习

10.6 将下面关于时间的函数转化为相量形式：(a) $-5\sin(580t - 110°)$；(b) $3\cos 600t - 5\sin(600t + 110°)$；(c) $8\cos(4t - 30°) + 4\sin(4t - 100°)$。提示：首先将函数表示成带有正幅度的单个余弦函数。

答案： $5\underline{/-20°}$；$2.41\underline{/-134.8°}$；$4.46\underline{/-47.9°}$。

从频域变换到时域的过程是以上过程的逆过程。因此，给定相量电压

$$\mathbf{V} = 115 \underline{/-45°}\ \text{V}$$

已知 $\omega = 500$ rad/s，可以直接写出等效的时域表示：

$$v(t) = 115\cos(500t - 45°)\ \text{V}$$

如果希望是正弦波形，那么 $v(t)$可以写成

$$v(t) = 115\sin(500t + 45°)\ \text{V}$$

练习

10.7　已知 $\omega = 2000$ rad/s 和 $t = 1$ ms，求下面以相量形式给出的各电流的瞬时值：(a) $j10$ A；(b) $20 + j10$ A；(c) $20 + j(10\angle 20^\circ)$ A。

答案：−9.09 A；−17.42 A；−15.44 A。

10.5　*R*, *L* 和 *C* 的相量关系

基于相量的分析方法的作用在于它可以把电感和电容的电压与电流之间的关系表示成代数关系，如同电阻一样。既然可以在时域和频域之间互相转换，那么通过分别对3种无源元件建立相量电压与相量电流的关系，可以进一步简化正弦稳态的分析过程。

电阻

电阻是最简单的情况。在时域中，如图 10.12(a)所示，定义方程为

$$v(t) = Ri(t)$$

应用复数电压：

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t+\theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \tag{16}$$

假定复数电流响应为

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \tag{17}$$

因此，

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)} = Ri(t) = RI_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

除以 $e^{j\omega t}$ 得到

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

或表示成极坐标形式：

$$V_m \angle \theta = RI_m \angle \phi$$

这里的 $V_m\angle\theta$ 和 $I_m\angle\phi$ 表示一般形式的相量电压 **V** 和相量电流 **I**，因此，

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{18}$$

电阻上相量形式的电压-电流关系与电阻在时域的电流与电压的关系具有相同的形式。图 10.12(b) 解释了相量形式的方程。因为其和相等，因此电阻上的电流和电压总是同相。

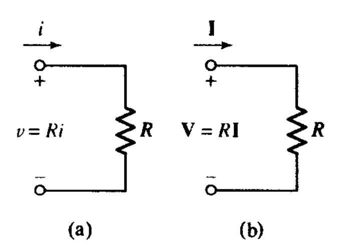


图 10.12　电阻上的相关电压和电流关系：(a) 时域，$v = Ri$；(b) 频域，$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$

说明：欧姆定律对于时域和频域均正确，换句话说，电阻两端的电压总是等于电阻乘以流过它的电流。

作为应用时域和频域关系式的例子，假设一个 4 Ω 电阻两端的电压为 8 cos(100t − 50°) V。在时域上，求得的电流必须为

$$i(t)=\frac{v(t)}{R}=2\cos(100t-50^\circ)\qquad \text{A}$$

该电压的相量形式为 $8\underline{/-50^\circ}$ V，因此，

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{R}=2\underline{/-50^\circ}\quad \text{A}$$

如果将它转化到时域，显然可以得到相同的表达式。但可以得出这样的结论：在频域上分析电阻电路并不能节省时间和精力。

电感

下面讨论电感。时域表示如图 10.13(a)所示，时域表达式方程为

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt} \tag{19}$$

将复电压方程式[16]和复电流方程式[17]代入上式：

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)}=L\frac{d}{dt}I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

求出式中的导数：

$$V_m e^{j(\omega t+\theta)}=j\omega L I_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

两边同时除以 $e^{j\omega t}$，得到

$$V_m e^{j\theta}=j\omega L I_m e^{j\phi}$$

则相量关系为

$$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I} \tag{20}$$

式[19]的时域微分方程变成了式[20]的频域代数方程。图 10.13(b)给出了相量关系。注意，因子 $j\omega L$ 的相角为 +90°，于是电感上的相量电流 **I** 比相量电压 **V** 滞后 90°。

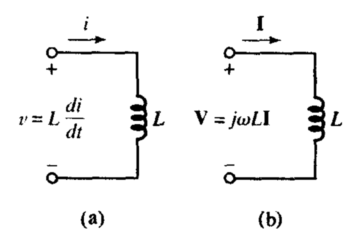


图 10.13 电感上的相关电压和电流关系：(a) 时域，$v=L\,di/dt$；(b) 频域，$\mathbf{V}=j\omega L\mathbf{I}$

例题 10.4 已知 ω = 100 rad/s，将电压 $8\underline{/-50^\circ}$ V 加到 4 H 电感的两端，求电感上流过的相量电流和时域电流。

解：利用刚才得到的表达式：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}}{j\omega L}=\frac{8\underline{/-50^\circ}}{j100(4)}=-j0.02\underline{/-50^\circ}=(1\underline{/-90^\circ})(0.02\underline{/-50^\circ})$$

或

$$\mathbf{I}=0.02\underline{/-140^\circ}\ \text{A}$$

将该电流表示成时域形式：

$$i(t) = 0.02\cos(100t - 140^\circ)\ \text{A} = 20\cos(100t - 140^\circ)\ \text{mA}$$

电容

最后一个元件是电容。时域电流 - 电压关系为

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

与前面类似，首先将 $v(t)$和 $i(t)$替换为式[16]和式[17]所表示的复量，求出式中的导数，然后去掉因子，即可得到电容上的相量电压 **V** 和相量电流 **I** 的关系：

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \qquad [21]$$

由上式可知，电容上的电流 **I** 比电压 **V** 超前 90°。然而需要注意的是：这并不是指电流响应比产生它的电压早 1/4 周期出现！现在分析的是稳态响应，指的是不断增大的电压引起的电流最大值比电压最大值早出现 90°。

图 10.14(a)和(b)所示是时域和频域表示方式的比较。现在已经得到了 3 个无源元件的 **V-I** 关系。其结果总结在表 10.1 中，其中 3 个元件的时域 v-i 表达式和频域 **V-I** 表达式分别放在了相邻的两栏中。所有的相量方程均为代数方程，而且是线性的。电感和电容的方程与电阻的欧姆定律很相似，事实上，我们是在像使用欧姆定律那样使用它们。

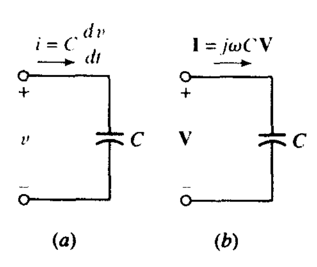


图 10.14　电容上的电压和电流的关系：(a) 时域；(b) 频域

表 10.1　时域伏安表达式和频域伏安表达式的比较

时域		频域	
电阻 R（i, +v−）	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$	电阻 R（**I**, +**V**−）
电感 L（i, +v−）	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$	电感 $j\omega L$（**I**, +**V**−）
电容 C（i, +v−）	$v = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$	电容 $1/j\omega C$（**I**, +**V**−）

基尔霍夫定律的相量形式

基尔霍夫电压定律在时域中可以写为

$$v_1(t) + v_2(t) + \cdots + v_N(t) = 0$$

现在，运用欧拉公式将每个实电压 v_i 均替换成 $e^{j\omega t}$ 实部等于这个实电压的复电压，然后去掉因子，从而得到

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_N = 0$$

因此，可以看出基尔霍夫电压定律不仅适用于相量电压形式，并且与时域形式相同。同样可以证明基尔霍夫电流定律也适用于相量电流，而且形式相同。

现在分析之前已经讨论过多次的串联 RL 电路。电路如图 10.15 所示，图中给出了相量电流和一些相量电压。首先求得相量电流，然后得到时域的电流。根据基尔霍夫电压定律：

$$\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$$

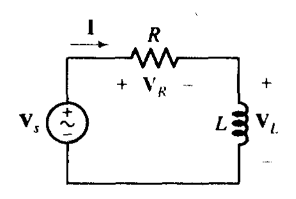


图 10.15 具有相量电压的串联 RL 电路

根据最新得到的元件的 V-I 关系，可得

$$R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

然后求得用源电压 $\mathbf{V}_s$ 表示的相量电流：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L}$$

设源电压幅度为 V_m，相角为 0°，因此，

$$\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

首先将它写成极坐标形式：

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle(-\arctan(\omega L/R))$$

然后采用相应步骤求出其时域表达式，同样的表达式在本章开始时费了很大功夫才得到。

练习

10.8 在图 10.16 所示电路中，设 $\omega = 1200$ rad/s，已知 $\mathbf{I}_C = 1.2\angle 28^\circ$ A，$\mathbf{I}_L = 3\angle 53^\circ$ A。求：(a) $\mathbf{I}_s$；(b) $\mathbf{V}_s$；(c) $i_R(t)$。

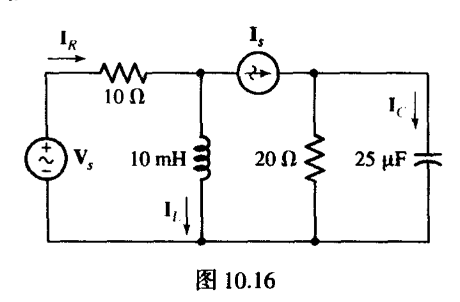


图 10.16

答案：$2.33\angle -31.0^\circ$ A；$34.9\angle 74.5^\circ$ V；$3.99\cos(1200t + 17.42^\circ)$ A。

10.6 阻抗

3 个无源元件在频域上的电流－电压关系如下（假定符合无源符号规则）：

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

将这些方程写成相量电压和相量电流之比：

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L \qquad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

可以发现这些比值取决于元件值（对于电感和电容还取决于频率）。除了是复量从而其运算必须符合复数的运算规则外，处理这些比值采用的方法与处理电阻时相同。

定义相量电压与相量电流的比值为阻抗，用字母**Z**表示。阻抗是一个复数，单位为欧姆（Ω）。阻抗不是相量，不能够通过乘以 $e^{j\omega t}$ 并取实部把它转换到时域中。对于电感，它在时域中的大小用 L 表示，而在频域中用阻抗 $j\omega L$ 表示。一个电容在时域中的电容值为 C，而在频域中阻抗大小为 $1/j\omega C$。阻抗是频域量，不是时域变量。

注意：$\mathbf{Z}_R = R$，$\mathbf{Z}_L = j\omega L$，$\mathbf{Z}_C = 1/j\omega C$。

阻抗串联组合

在频域中，利用两个基尔霍夫定律可实现阻抗的串联和并联组合，其规则与电阻相同。例如，在 $\omega = 10 \times 10^3$ rad/s 时，5 mH 电感与 100 μF 电容的串联组合可以被替换为单个阻抗，其值等于电感与电容的阻抗之和。因为电感阻抗为

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j50\ \Omega$$

电容阻抗为

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1\ \Omega$$

因此串联组合阻抗为

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = j50 - j1 = j49\ \Omega$$

电感和电容的阻抗是频率的函数，因此该等效阻抗只能适用于给定的频率。对于本例，$\omega =$ 10 000 rad/s。如果改变频率，例如取 $\omega = 5000$ rad/s，则 $\mathbf{Z}_{eq} = j23\ \Omega$。

说明：$1/j = -j$。

阻抗并联组合

计算 $\omega = 10\,000$ rad/s 时 5 mH 电感与 100 μF 电容的并联组合的阻抗与计算并联电阻的方法完全相同：

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020\ \Omega$$

当 $\omega = 5000$ rad/s 时，并联组合的等效阻抗为 $-j2.17\ \Omega$。

表示阻抗的复数或复变量既可以用极坐标也可以用直角坐标表示。例如，对于阻抗 $50 - j86.6\ \Omega$，可以说它具有 50 Ω 的电阻和 −86.6 Ω 的电抗。即阻抗的实部为电阻，阻抗的虚部是电抗，它包括符号，但不包括虚数运算符 j，通常用符号 X 表示。两者的单位都为欧姆（Ω）。在直角坐标中，$\mathbf{Z} = R + jX$；在极坐标中，$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}|\underline{/\theta}$。因此，电阻具有零电抗，而电容和电感（理想的）具有零电阻。这也可以直接从阻抗的极坐标表达式中看出。我们还是考虑 $\mathbf{Z} = 50 - j86.6\ \Omega$，它可以写成 $100\underline{/-60^\circ}\ \Omega$。因为相角不为0，所以在频率为 ω 时该阻抗并不是一个纯电阻。因为其相角不是+90°，所以也不是纯电感。同样，它也不是纯电容，因为相角不为−90°。那么对于包含电容和电感的串联或并联组合是否可以有0电抗呢？答案是肯定的。这里考虑简单的情况，$\omega = 1$ rad/s, $L = 1$ H, $C = 1$ F 与 $R = 1\ \Omega$ 串联连接，该网络的等效阻抗为 $\mathbf{Z} = 1 + j(1)(1) - j/(1)(1) = 1\ \Omega$，就像只存在一个 1 Ω 电阻一样。



例题 10.5 求图 10.17(a)所示网络的等效阻抗，工作频率为 5 rad/s。

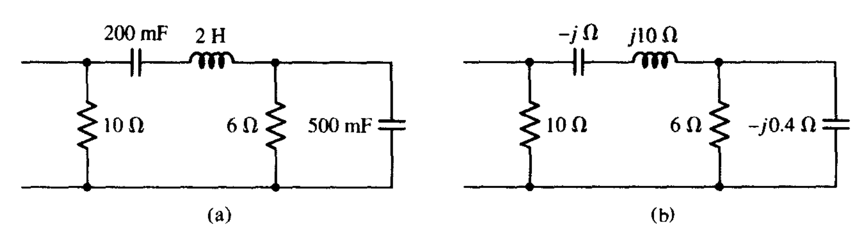


图 10.17 (a) 将要被与之等效的单个阻抗替代的网络；(b) 各元件被替换为工作在 $\omega = 5$ rad/s 的阻抗

解： 首先将电阻、电容和电感转换成图 10.17(b)所示的相应阻抗。

观察网络，可以看到 6 Ω 阻抗与 $-j0.4$ Ω 阻抗并联，其组合的等效阻抗为

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6-j0.4} = 0.026\,55 - j0.3982\ \Omega$$

然后它又与 $-j\Omega$ 和 $j10$ Ω 阻抗串联，因此，

$$0.0265 - j0.3982 - j + j10 = 0.026\,55 + j8.602\ \Omega$$

这个新阻抗又与 10 Ω 电阻并联，因此该网络的等效阻抗为

$$10 \parallel (0.026\,55 + j8.602) = \frac{10(0.026\,55 + j8.602)}{10 + 0.026\,55 + j8.602}$$
$$= 4.255 + j4.929\ \Omega$$

也可以将该阻抗表示成极坐标形式—— $6.511\,\underline{/49.20^\circ}$ Ω。

练习

10.9 参见图 10.18 所示网络，求位于各段点之间的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$: (a) a 和 g; (b) b 和 g; (c) a 和 b。

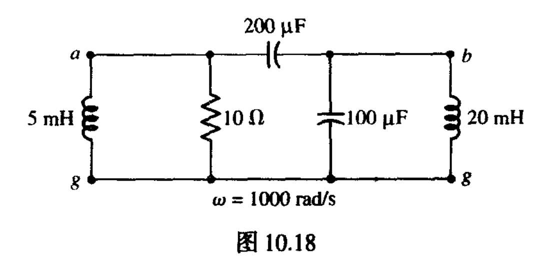


图 10.18

答案： $2.81 + j4.49$ Ω; $1.798 - j1.124$ Ω; $0.1124 - j3.82$ Ω。

必须注意阻抗中的电阻部分未必等于网络中出现的电阻的阻值。例如，10 Ω 电阻与 5 H 电感在 $\omega = 4$ rad/s 时的串联等效阻抗为 $\mathbf{Z} = 10 + j20$ Ω，或者表示成极坐标的形式为 $22.4\,\underline{/63.4^\circ}$ Ω。这时，阻抗的电阻部分确实等于网络中电阻的阻值，这是因为该网络是一个简单的串联网络，如果将这两个元件换成并联连接，则其等效阻抗为 $10 \times (j20)/(10 + j20)$Ω，即 $8 + j4$ Ω，这时阻抗的电阻部分为 8 Ω，不等于网络中电阻的阻值。

例题 10.6　求图 10.19(a)所示电路中的电流 $i(t)$。

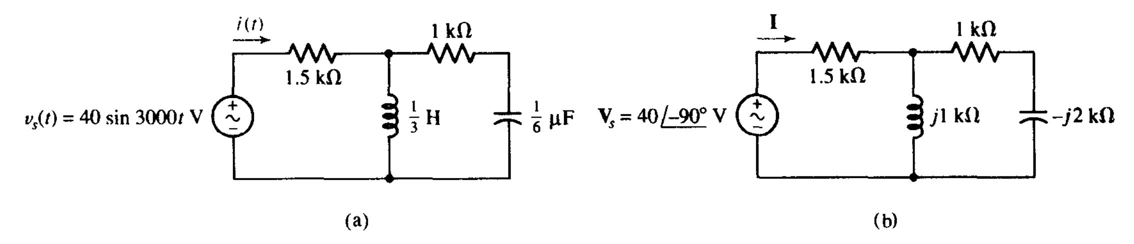


图 10.19　(a) 一个 *RLC* 电路，需要求解正弦受迫响应 $i(t)$；
(b) 给定电路在 $\omega = 3000$ rad/s 时的频域等效电路

解： ▶ **明确问题的要求**

需要求解由 3000 rad/s 的电压源引起的流过 1.5 kΩ 电阻的正弦稳态电流。

▶ **收集已知信息**

首先画出频域的等效电路。电源变换成频域表示的 $40\angle{-90°}$ V，频域响应记为 **I**，电感和电容在 $\omega = 3000$ rad/s 时的阻抗分别为 j kΩ 和 $-j\,2$ kΩ。相应的频域电路如图 10.19(b)所示。

▶ **设计方案**

分析图 10.19(b)所示电路得到 **I**，结合阻抗和欧姆定律来求解。然后利用 $\omega = 3000$ rad/s 将 **I** 变换成时域表达式。

▶ **建立一组合适的方程**

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{eq} &= 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\\ &= 1.5 + \frac{2+j}{1-j}\frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2}\\ &= 2 + j1.5 = 2.5\angle 36.87°\ \text{k}\Omega\end{aligned}$$

则相位电流为

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

▶ **确定是否还需要其他信息**

代入已知信息，求得

$$\mathbf{I} = \frac{40\angle{-90°}}{2.5\angle 36.87°}\ \text{mA}$$

利用该式以及 $\omega = 3000$ rad/s，就可以求得 $i(t)$。

▶ **尝试求解**

上面的复杂表达式可以简化成简单的极坐标表示的复数：

$$\mathbf{I} = \frac{40}{2.5}\angle{-90° - 36.87°}\ \text{mA} \quad = 16.00\angle{-126.9°}\ \text{mA}$$

将该电流转换成时域表达式，得到响应为

$$i(t) = 16\cos(3000t - 126.9°)\ \text{mA}$$

▶ 验证结果是否合理或是否与预计结果一致

连接到电源的有效阻抗的相角为+36.87°，从而表明它具有净电感的特点，或者说电流滞后于电压。因为电压源的相角为−90°（已经将其转换成余弦电源），因此可以看出结果是一致的。

练习

10.10 在图10.20所示的频域电路中，求：(a) $\mathbf{I}_1$；(b) $\mathbf{I}_2$；(c) $\mathbf{I}_3$。

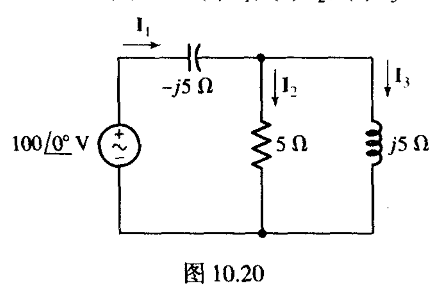


图 10.20

答案：28.3$\underline{/45^\circ}$ A；20$\underline{/90^\circ}$ A；20$\underline{/0^\circ}$ A。

在列出时域或者频域关系式时，需要特别注意的是：避免列出部分在时域、部分在频域的等式，这是不正确的。当等式中同时包含复数和时间t时（除因式外），就会出现这种错误。另外，这种情况通常是在数学推导中而不是实际应用中出现，因此如果看到一个公式同时包含j和t或者∠和t，就表明出现了错误。

例如，前面的等式

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{40\underline{/-90^\circ}}{2.5\underline{/36.9^\circ}} = 16\underline{/-126.9^\circ}\ \text{mA}$$

是正确的，而下面的式子则不正确：

$$i(t) \not= \frac{40\sin 3000t}{2.5\underline{/36.9^\circ}} \qquad \text{或} \qquad i(t) \not= \frac{40\sin 3000t}{2+j1.5}$$

10.7 导纳

有时，用阻抗的倒数会更加方便，于是可以定义电路元件的导纳$\mathbf{Y}$为相量电流与相量电压之比（假定符合无源符号规则）：

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

因此，

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

导纳的实部为电导G，虚部为电纳B，因此，

$$\mathbf{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \qquad [22]$$

需要仔细观察式[22]，它并不表示导纳的实部等于阻抗实部的倒数，或者说导纳的虚部等于阻抗虚部的倒数。

导纳、电导和电纳的单位都为西门子（S）。一个阻抗

$$\mathbf{Z} = 1 - j2\ \Omega$$

可能表示一个 1 Ω 电阻与一个 0.1 μF 电容在 $\omega = 5$ Mrad/s 时的串联，其相应的导纳为

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{1-j2} = \frac{1}{1-j2}\frac{1+j2}{1+j2} = 0.2 + j0.4\ \mathrm{S}$$

包含数条并联支路的网络的等效导纳是每条支路的导纳之和。因此，上面的导纳可以由0.2 S电导和 0.4 S 电纳并联得到。前者表示 5 Ω 电阻；因为电容的导纳为 $j\omega C$，所以后者表示工作在 $\omega = 5$ Mrad/s 下的 0.08 μF 电容。

作为对分析的检验，我们计算 5 Ω 电阻与 0.08 μF 电容并联的网络在 $\omega = 5$ Mrad/s 下的阻抗。该等效阻抗为

$$\mathbf{Z} = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2\ \Omega$$

同前面一样。给定阻抗和导纳以及工作频率，存在无穷多个网络与之对应，以上只是给出两种可能的网络。不过它们均为只包含两个元件的网络，所以可以分别将其看做是在 $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s 时阻抗为 $1 - j2\ \Omega$ 和导纳为 $0.2 + j0.4$ S 的两个最简单的网络。

阻纳（immittance）这个词是阻抗（impedance）和导纳（admittance）这两个词的组合，有的时候用它来作为阻抗和导纳的通用名词。例如，已知一个阻纳两端的相量电压，显然可以计算流过该阻纳的电流。

练习

10.11　写出下面各导纳的值并以直角坐标形式表示：(a) 阻抗 $\mathbf{Z} = 1000 + j400\ \Omega$；(b) 由 800 Ω 电阻、1 mH 电感和 2 nF 电容组成的并联网络，已知 $\omega = 1$ Mrad/s；(c) 由 800 Ω 电阻、1 mH 电感和 2 nF 电容组成的串联网络，已知 $\omega = 1$ Mrad/s。

答案：$0.862 - j0.345$ mS；$1.25 + j1$ mS；$0.899 - j0.562$ mS。

10.8　节点分析和网孔分析

前面讲到，采用节点和网孔分析法对电路进行分析很有效，于是读者自然要问：对于正弦稳态的相量和阻抗，这些方法是否仍然适用？我们已经知道，两个基尔霍夫定律对于相量仍然成立，而且，对于无源元件可利用类似欧姆定律的 $\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$。换句话说，对于相量，作为节点分析的基础这些定律仍然成立，于是，仍然可以采用节点分析法来分析正弦稳态电路。根据类似的推理可知，对于正弦稳态电路，网孔分析仍然有效，而且通常很有用。

例题 10.7　求图 10.21 所示电路中的时域节点电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$。

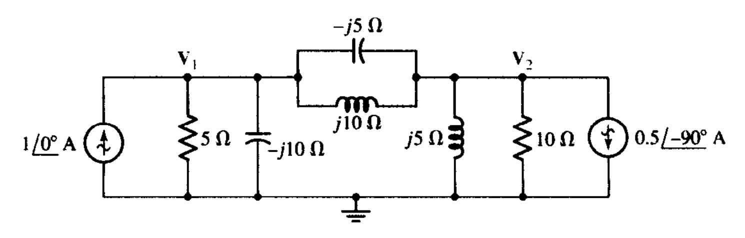


图 10.21　一个频域电路，其中已标出节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$

解： 两个电流源均以相量形式给出，并且图中已标出了相量节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。对左边节点应用 KCL，得到

$$\frac{\mathbf{V}_1}{5}+\frac{\mathbf{V}_1}{-j10}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{-j5}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{j10}=1\underline{/0^\circ}=1+j0$$

对于右边节点：

$$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{-j5}+\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{j10}+\frac{\mathbf{V}_2}{j5}+\frac{\mathbf{V}_2}{10}=-(0.5\underline{/-90^\circ})=j0.5$$

合并同类项可得

$$(0.2+j0.2)\mathbf{V}_1-j0.1\mathbf{V}_2=1$$

以及

$$-j0.1\mathbf{V}_1+(0.1-j0.1)\mathbf{V}_2=j0.5$$

可以很容易求解这些方程并得到 $\mathbf{V}_1=1-j2$ V, $\mathbf{V}_2=-2+j4$ V。

通过将 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 表示成极坐标形式可得到时域解，其极坐标形式为

$$\mathbf{V}_1=2.24\underline{/-63.4^\circ}$$
$$\mathbf{V}_2=4.47\underline{/116.6^\circ}$$

转化成时域形式：

$$v_1(t)=2.24\cos(\omega t-63.4^\circ)\ \text{V}$$
$$v_2(t)=4.47\cos(\omega t+116.6^\circ)\ \text{V}$$

注意，为了计算电路图中的阻抗值，必须知道 ω 值。此外，两个电源的频率必须与之相同。

练习

10.12 利用节点分析法分析图 10.22 所示的电路，求 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$。

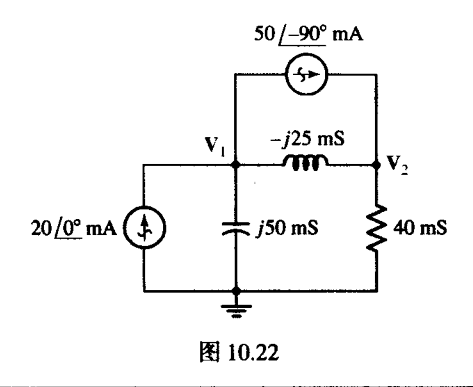


图 10.22

答案： $1.062\underline{/23.3^\circ}$ V；$1.593\underline{/-50.0^\circ}$ V。

现在来看网孔分析的例子，需要记住的是所有电源的频率必须相同，否则不可能给电路中的电抗定义数值。在下一节中会讲到解决这种问题的唯一方法是应用叠加定理。

例题 10.8　电路如图 10.23(a)所示，求电流 i_1 和 i_2 的时域表达式。

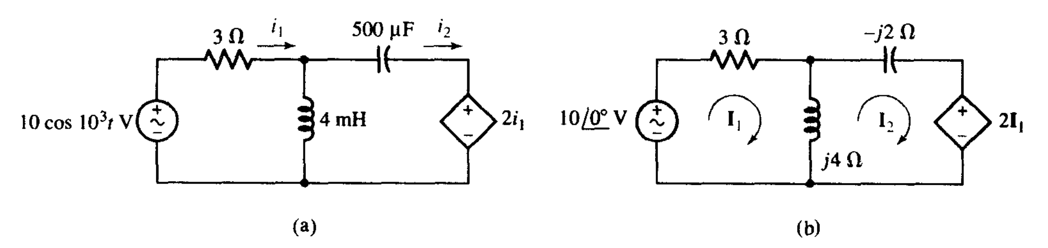


图 10.23　(a) 包含一个受控源的时域电路；(b)相应的频域电路

解：从左边电源知道 $\omega = 10^3$ rad/s。画出相应的频域电路，如图 10.23(b)所示，并给网孔电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 赋值。

对于网孔 1：

$$3\mathbf{I}_1 + j4(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10\underline{/0^\circ}$$

或

$$(3 + j4)\mathbf{I}_1 - j4\mathbf{I}_2 = 10$$

而对于网孔 2：

$$j4(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j2\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_1 = 0$$

或

$$(2 - j4)\mathbf{I}_1 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

求解得到

$$\mathbf{I}_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24\underline{/29.7^\circ}\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77\underline{/56.3^\circ}\text{ A}$$

因此，

$$i_1(t) = 1.24\cos(10^3 t + 29.7^\circ)\text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77\cos(10^3 t + 56.3^\circ)\text{ A}$$

练习

10.13　利用网孔分析法分析图 10.24 所示的电路，求 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。

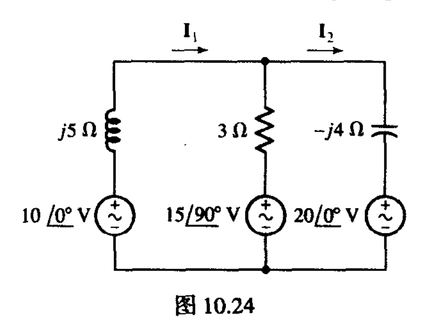


图 10.24

答案：4.87 $\underline{/-164.6^\circ}$ A；7.17 $\underline{/-144.9^\circ}$ A。

实际应用——晶体管放大器的截止频率

晶体管放大电路是许多现代电子设备的组成部分。常见的一个应用是移动电话（见图 10.25），其中，语音信号被叠加到高频载波上。遗憾的是，晶体管内部固有的电容限制了其应用的频率范围，当将晶体管用于特定应用时，必须考虑这一点。



图 10.25　晶体管放大器被用于许多设备，包括移动电话。通常采用线性电路模型来分析它们对频率的性能

图 10.26(a)所示是双极型晶体管的高频混合 π 模型。实际上，晶体管是非线性器件，但是这个简单的线性模型对实际器件工作行为的描述已相当精确。两个电容（C_π 和 C_μ）被用来表示晶体管的内部电容，如果要提高模型的精度，可以增加电容和电阻的个数。图 10.26(b)所示是将晶体管模型插到共发射极放大电路中的情形。

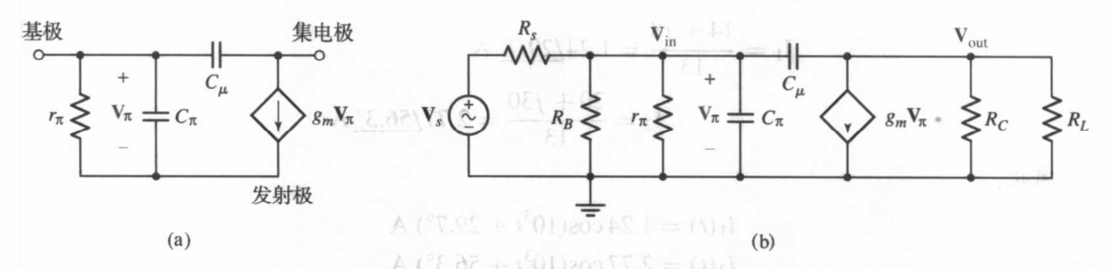


图 10.26　(a) 晶体管的高频混合 π 模型；(b) 采用混合 π 模型的共发射极放大电路

假定有一个正弦稳态信号，可用其戴维南等效 $\mathbf{V}_s$ 和 R_s 表示。我们感兴趣的是输出电压 $\mathbf{V}_{out}$ 和输入电压 $\mathbf{V}_{in}$ 之比。当 $\mathbf{V}_s$ 的频率增大时，由于晶体管内部电容的作用，放大倍数将减小，最终会限制电路可以正常工作的频率范围。在输出端写出如下节点方程：

$$-g_m \mathbf{V}_\pi = \frac{\mathbf{V}_{out} - \mathbf{V}_{in}}{(1/j\omega C_\mu)} + \frac{\mathbf{V}_{out}}{(R_C \parallel R_L)}$$

求出用 $\mathbf{V}_{in}$ 表示的 $\mathbf{V}_{out}$，并注意 $\mathbf{V}_\pi = \mathbf{V}_{in}$，得到放大器的增益为

$$\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{-g_m(R_C \| R_L)(1/j\omega C_\mu) + (R_C \| R_L)}{(R_C \| R_L) + (1/j\omega C_\mu)}$$

$$= \frac{-g_m(R_C \| R_L) + j\omega(R_C \| R_L)C_\mu}{1 + j\omega(R_C \| R_L)C_\mu}$$

给定典型值 $g_m = 30$ mS，$R_C = R_L = 2$ kΩ，$C_\mu = 5$ pF，可以画出增益的幅度随频率（注意 $\omega = 2\pi f$）变化的曲线。其半对数曲线如图10.27(a)所示，生成该曲线的MATLAB语句如图10.27(b)所示。有趣的是（但并不是很出乎意料），放大器的增益依赖于频率。事实上，还可以设想将这个电路用做滤波器以滤去不感兴趣的频率。不过，至少在较低的频率范围，增益基本上与输入信号源的频率无关。

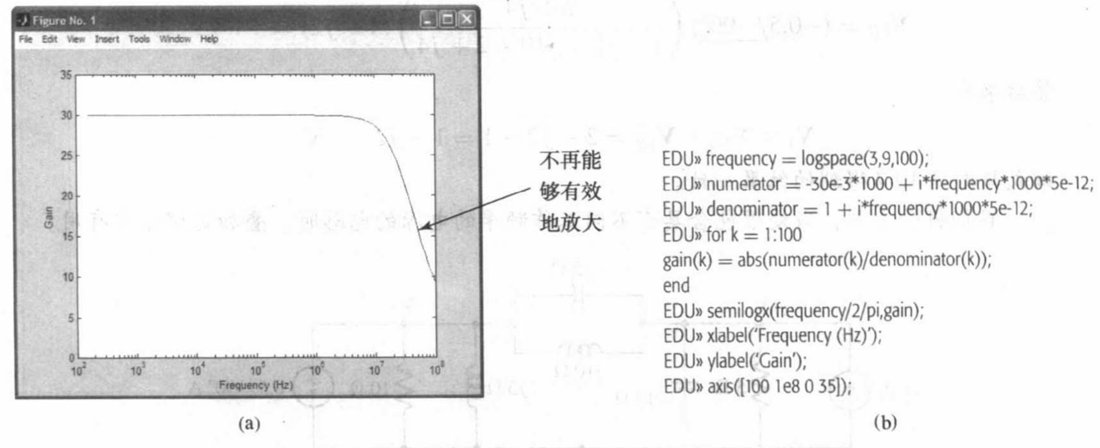


图10.27 (a) 放大器增益随频率变化的函数；(b) MATLAB语句

在描述放大器时，通常将增益下降到其最大值的$1/\sqrt{2}$时的频率作为参考频率。从图10.27(a)可知，最大增益幅度为30，增益的幅度大约在30 MHz频率处下降到$30/\sqrt{2} = 21$，通常将该频率称为放大器的截止频率或者转角（corner）频率。如果需要放大电路工作在更高的频率，则必须减小内部电容（这就是说，必须采用另外一种晶体管），或者必须对电路的某些地方进行重新设计。

必须指出，只定义对$\mathbf{V}_{in}$的增益并不能完全描述放大器依赖于频率的特性。如果只是简单地考虑C_π，那么这种现象是非常显而易见的：这时，随着$\omega \to \infty$，$\mathbf{Z}_{C_\pi} \to 0$，所以$\mathbf{V}_{in} \to 0$，而在前面导出的公式中并没有体现出这一点，为此需要推导出用$\mathbf{V}_s$表示的$\mathbf{V}_{out}$的表达式，这时两个电容均出现在表达式中，不过推导出这个表达式需要进行更多的代数运算。

10.9 叠加定理、电源变换和戴维南定理

在第7章中介绍了电感和电容后，我们发现包含这些元件的电路仍然是线性电路，线性理论仍然适用。这些理论包括叠加定理、戴维南和诺顿定理以及电源变换。因此我们知道这些方法可以应用于现在考虑的电路中，而采用正弦电源和只求解受迫响应的事实并不重要。以相量来分析电路的事实也不重要，它们仍然是线性电路。前面曾讲过通过将实电源和虚电源合并来得到复电源时就是利用了线性特性和叠加定理。

例题10.9 利用叠加定理求图10.21所示电路中的$\mathbf{V}_1$，该电路重画成图10.28(a)所示。

解： 首先重画电路［如图10.28(b)所示］，其中每对并联阻抗被单个等效阻抗替换。即将$5 \parallel -j10\ \Omega$替换为$4 - j2\ \Omega$，将$j10 \parallel -j5\ \Omega$替换为$-j10\ \Omega$，将$10 \parallel j5\Omega$替换为$2 + j4\ \Omega$。为了求得$\mathbf{V}_1$，首先假定只有左边电源工作的情况，求出部分响应——$\mathbf{V}_{1L}$。因为$1\underline{/0^\circ}$电源与下面的阻抗并联：

$$(4 - j2) \parallel (-j10 + 2 + j4)$$

因此，

$$\mathbf{V}_{1L} = 1\underline{/0^\circ}\frac{(4-j2)(-j10+2+j4)}{4-j2-j10+2+j4}$$

$$= \frac{-4-j28}{6-j8} = 2-j2\ \text{V}$$

当只有右边电源有效时，应用分流定理和欧姆定律得到

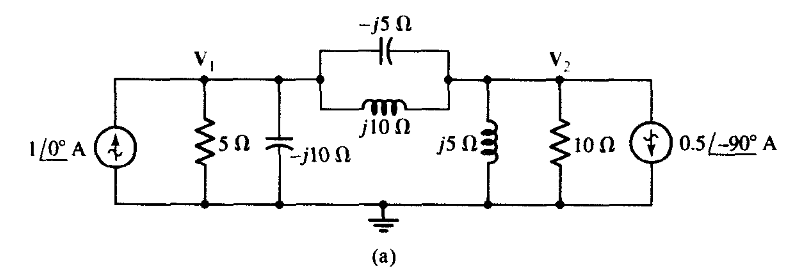
$$\mathbf{V}_{1R} = (-0.5\underline{/-90^\circ})\left(\frac{2+j4}{4-j2-j10+2+j4}\right)(4-j2) = -1\ \text{V}$$

然后求和：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1L} + \mathbf{V}_{1R} = 2-j2-1 = 1-j2 \qquad \text{V}$$

该式与例题 10.7 得到的结果一致。

我们将会看到，当处理包含具有不同工作频率的电源的电路时，叠加定理非常有用。



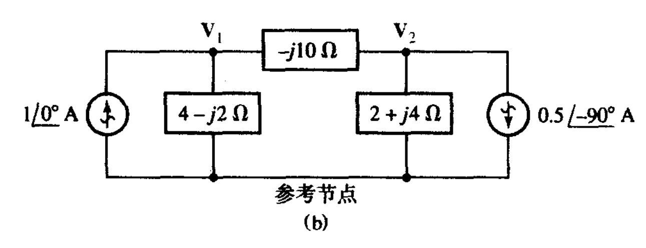


图 10.28 (a) 图 10.21 的电路，需要求 $\mathbf{V}_1$；(b) 利用各自相量响应的叠加求 $\mathbf{V}_1$

练习

10.14 利用叠加定理分析图 10.29 所示的电路，求 $\mathbf{V}_1$: (a) 当只有 $20\underline{/0^\circ}$ mA 电源工作时；(b) 当只有 $50\underline{/-90^\circ}$ mA 电源工作时。

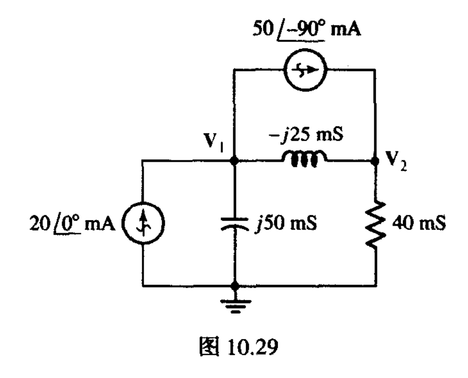


图 10.29

答案：$0.1951 - j0.556$ V；$0.780 + j0.976$ V。

例题 10.10 电路如图 10.30(a)所示，求从 $-j10\,\Omega$ 阻抗看进去的戴维南等效，并利用它计算 $\mathbf{V}_1$。

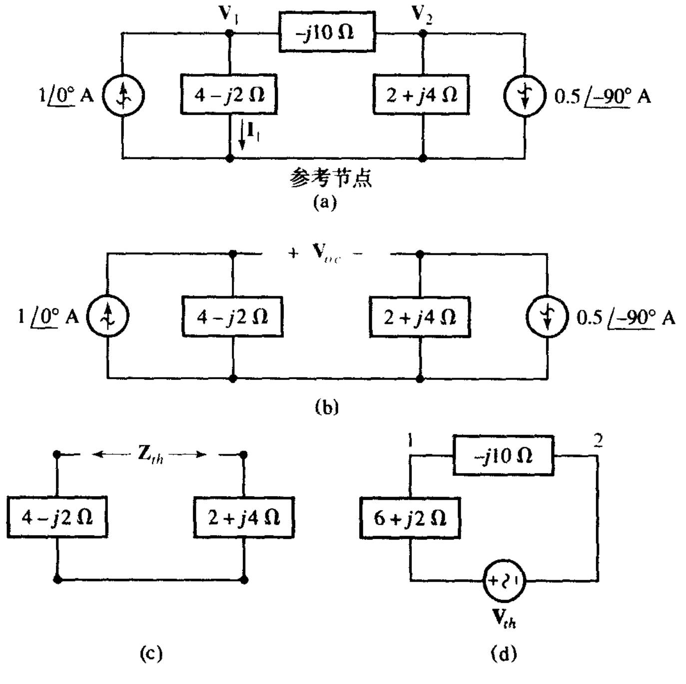


图 10.30 (a) 图 10.28(b)的电路，需要求解从阻抗 $-j10\,\Omega$ 看进去的戴维南等效；(b) 定义 $\mathbf{V}_{oc}$；(c) 定义 $\mathbf{Z}_{th}$；(d) 戴维南等效后的电路

解： 图 10.30(b)中定义了开路电压，所以，

$$\mathbf{V}_{oc} = (1\underline{/0^\circ})(4 - j2) - (-0.5\underline{/-90^\circ})(2 + j4)$$
$$= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3\ \text{V}$$

从图 10.30(c)所示无源电路的负载端看进去的阻抗是剩下的两个阻抗之和，因此，

$$\mathbf{Z}_{th} = 6 + j2\ \Omega$$

这样，将电路重新画成如图 10.30(d)所示，从节点 1 流过负载 $-j10\,\Omega$ 到节点 2 的电流为

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3\ \text{A}$$

现在已知流过图 10.30(a)所示电路的 $-j10\,\Omega$ 阻抗的电流。注意，不能利用图 10.30(d)求出 $\mathbf{V}_1$，因为该电路已不包含参考节点了。于是，回到最初的电路，将左边的电流源减去上面得到的 $0.6 + j0.3$ A 电流，可得到向下流过$(4 - j2)\Omega$ 电阻所在支路的电流为

$$\mathbf{I}_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \qquad \text{A}$$

因此，

$$\mathbf{V}_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \qquad \text{V}$$

结果同前面一样。

假定只对 $\mathbf{V}_1$ 感兴趣，可能会想到对图 10.30(a)右边的 3 个元件应用诺顿定理，这是一个不错的想法。也可以连续使用电源变换来简化电路。因此在第 4 章和第 5 章中讨论的方法和技术都可以应用到频域中的电路。这里困难在于必须用到复数，但不需要更多理论上的考虑。

练习

10.15 对于图 10.31 所示的电路，求：(a) 开路电压 $\mathbf{V}_{ab}$；(b) a 和 b 之间的短路电流，电流方向向下；(c) 与电流源并联的戴维南等效阻抗 $\mathbf{Z}_{ab}$。

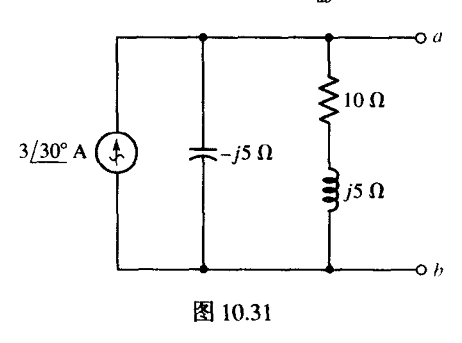


图 10.31

答案：$16.77\angle{-33.4^\circ}$ V；$2.60 + j1.500$ A；$2.5 - j5\ \Omega$。

到目前为止，所有的讨论均限于单电源电路或者所有电源均工作在同一个频率下的多电源电路，这对于定义电感和电容的确切阻抗是必须的，但是也很容易将相量分析的概念扩展到对工作在不同频率下的多电源电路的分析上，此时可以应用叠加定理来求出由各个电源单独存在时产生的电压和电流，然后将它们叠加起来。如果其中有几个电源工作在同一个频率下，那么可以同时考虑这些电源并利用叠加定理得到它们的总响应，然后将这个响应与工作在不同频率下的其他电源的响应相加。

例题 10.11 求图 10.32(a)所示电路中 10 Ω 电阻消耗的功率。

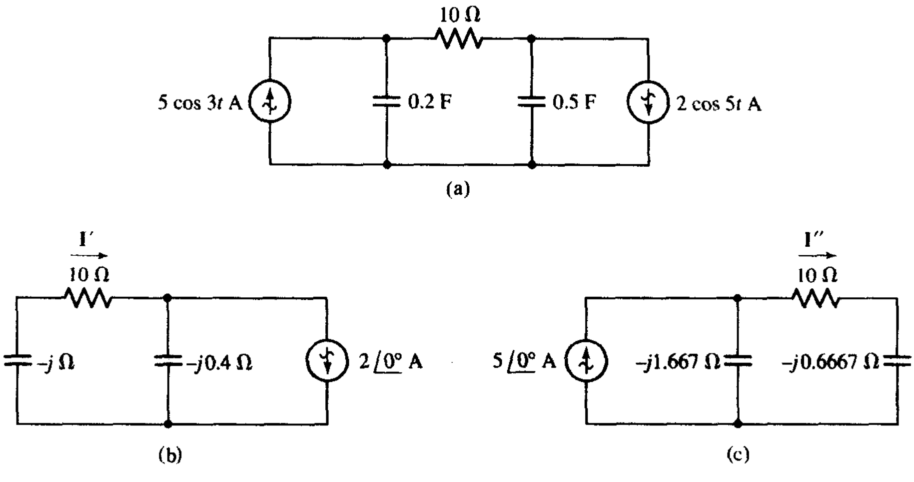


图 10.32 (a) 一个简单电路，但电源的工作频率不同；(b) 左边电源不工作时的电路；(c) 右边电源不工作时的电路

解：观察该电路，可能会想到通过写出两个节点方程，或者进行两次电源变换立即得到 10 Ω 电阻两端的电压。

遗憾的是，这是不可能的，因为两个电源具有不同的频率。在这种情况下，无法计算电路中任何电感或电容的阻抗，因为不知道用哪一个 ω。

解决这个问题的唯一方法是应用叠加定理，将所有具有相同频率的电源分在同一个子电路中，如图 10.32(b)和(c)所示。

说明：在介绍信号处理的内容时会讲到傅里叶方法。傅里叶是一位法国数学家，他发明了用正弦组合来表示任意函数的方法。对于线性电路，当知道电路对一般正弦激励函数的响应时，就可以通过将任意激励函数表示成傅里叶级数、再利用叠加定理而把电路对任意激励的响应表示出来。

在图 10.32(b)所示的子电路中，利用分流定理可以快速计算出电流 $\mathbf{I}'$：

$$\mathbf{I}' = 2\underline{/0^\circ}\left[\frac{-j0.4}{10 - j - j0.4}\right]$$
$$= 79.23\underline{/-82.03^\circ}\ \text{mA}$$

从而，

$$i' = 79.23\cos(5t - 82.03^\circ)\ \text{mA}$$

同样可以求得

$$\mathbf{I}'' = 5\underline{/0^\circ}\left[\frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667}\right]$$
$$= 811.7\underline{/-76.86^\circ}\ \text{mA}$$

即：

$$i'' = 811.7\cos(3t - 76.86^\circ)\ \text{mA}$$

注意，不管我们怎么把图 10.32(b)和(c)中的两个相量电流 $\mathbf{I}'$ 和 $\mathbf{I}''$ 相加，这都是不正确的。下一步应该是将这两个时域电流相加，然后对该结果平方，再乘以 10 得到图 10.32(a)中 10 Ω 电阻吸收的功率：

$$p_{10} = (i' + i'')^2 \times 10$$
$$= 10[79.23\cos(5t - 82.03^\circ) + 811.7\cos(3t - 76.86^\circ)]^2\ \mu\text{W}$$

练习

10.16　求图 10.33 所示电路中流过 4 Ω 电阻的电流。

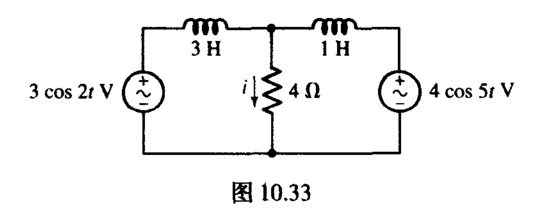


图 10.33

答案：$i = 175.6\cos(2t - 20.55^\circ) + 547.1\cos(5t - 43.16^\circ)$ mA。

计算机辅助分析

在 PSpice 中有许多不同的方法可以对电路进行正弦稳态分析。最直接的方法可能是使用两个特殊设计的电源：VAC 和 IAC。这两个电源的幅度和相位可以通过双击相应器件进行选择。

下面对图 10.19(a)所示电路进行仿真，将电路重画于图 10.34 中。

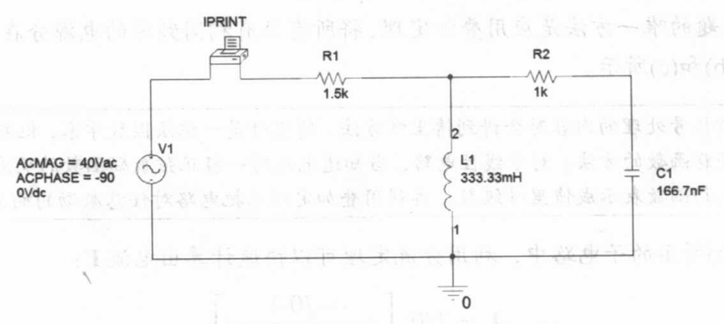


图 10.34　图 10.19(a)的电路，工作频率 $\omega = 3000$ rad/s。需要求解流过 1.5 kΩ 电阻的电流

电源频率不是通过特性编辑器选择的，而是通过交流扫描分析对话框来选择。这可以在仿真设置窗口的 Analysis 中通过选择 AC Sweep/Noise 来实现。选择线性扫描（Linear），并设 Total Points 为 1。因为我们只对 3000 rad/s(477.5 Hz)的频率感兴趣，因此将 Start Frequency 和 End Frequency 都设为 477.5，如图 10.35 所示。

图 10.35　设置电源频率的对话框

注意，在电路图中有一个额外的器件，该器件称为 IPRINT，它可以打印出不同的电流参数。在仿真中，我们感兴趣的是 AC，MAG 和 PHASE 的属性，为了让 PSpice 打印出这些参数，双击电路图中的 IPRINT 符号，然后在每个相应的域中输入 yes 即可。

在电路图捕获 CIS 窗口中的 PSpice 下选择 View Output File 可以得到仿真结果。

```
FREQ          IM(V_PRINT1)    IP(V_PRINT1)
4.775E+02     1.600E-02       -1.269E+02
```

因此电流幅度为 16 mA，相角为 −126.9°，流过 1.5 kΩ 电阻的电流为

$$i = 16\cos(3000t - 126.9^\circ)\ \text{mA}$$
$$= 16\sin(3000t - 36.9^\circ)\ \text{mA}$$

10.10　相量图

相量图是复平面内表示电路中相量电压与相量电流关系的图形。可以利用它对某些问题进行图解分析，从而可以验证用其他更精确的分析方法得到的结果。在第 11 章中将会遇到类似的图形，它用来表示正弦稳态电路中的复功率关系。

我们已经熟悉了复数在复平面中的图形表示以及它们的加减法。因为相量电压和电流都是复数，所以可以利用复平面中的点来表示。例如，相量电压 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\,\underline{/53.1^\circ}$ V 在复电压平面中的表示如图 10.36 所示，其中 x 轴是实电压轴，y 轴是虚电压轴，电压 $\mathbf{V}_1$ 由从原点出发的箭头确定。因为在复平面中很容易进行加减运算并表示出相应的运算过程，所以在相量图中很容易进行相量的加减运算。对于乘法和除法运算，则对应于相量相角的加减和幅度的改变。图 10.37(a)所示是 $\mathbf{V}_1$ 和另一个相量电压 $\mathbf{V}_2 = 3 - j4 = 5\,\underline{/-53.1^\circ}$ V 以及它们的和，图 10.37(b)给出了相量电流 $\mathbf{I}_1$，它是相量电压 $\mathbf{V}_1$ 与导纳 $\mathbf{Y} = 1 + j1$ S 的乘积。

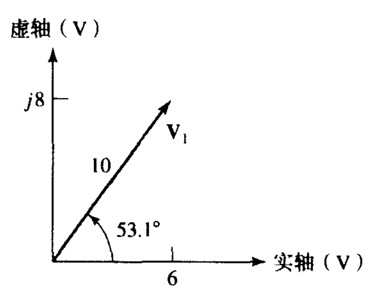


图 10.36 一个简单的相量图，图中的单个电压相量 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8 = 10\,\underline{/53.1^\circ}$ V

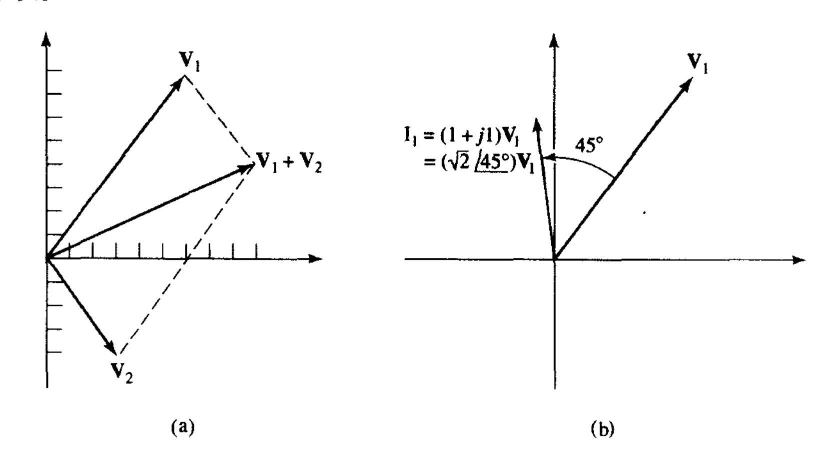


图 10.37 (a) 一个相量图，表示 $\mathbf{V}_1 = 6 + j8$ V 与 $\mathbf{V}_2 = 3 - j4$ V 之和，$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 9 + j4\text{ V} = 9.85\,\underline{/24.0^\circ}$ V; (b) 相量图，表示 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$，其中，$\mathbf{I}_1 = \mathbf{Y}\mathbf{V}_1$，$\mathbf{Y} = 1 + jS = \sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}$ S。电流和电压幅度的尺度不同

最后一个相量图在同一个复平面上画出了电流和电压相量，其幅度尺度不同，但角度尺度相同。例如，相量电压的尺度为 1 厘米长表示 100 V 电压，而相量电流尺度为 1 cm 长表示 3 mA 电流。在同一个图中画出两个相量可以使我们容易确定哪个波形超前或哪个波形滞后。

根据相量图可以得到从时域到频域变换的有趣解释。因为既可以从时域的角度来解释相量图，也可以从频域的角度来解释相量图。到目前为止，我们采用的是频域解释，因为相量在相量图中被直接画出。下面从时域的角度进行解释。首先来看图 10.38(a)所示的相量电压 $\mathbf{V} = V_m\,\underline{/\alpha}$，为了将 $\mathbf{V}$ 变换到时域，下一步必须将这个相量乘以 $e^{j\omega t}$，得到复电压 $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$。该电压也可以解释为相量，只不过其相角随时间线性增长。因此在相量图中，它表示旋转的线段，其瞬时位置比 $V_m\,\underline{/\alpha}$ 超前 ωt 弧度（逆时针方向）。图 10.38(b)所示的相量图中同时画出了 $V_m\,\underline{/\alpha}$ 和 $V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$。

再取 $V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$ 的实部即可完成到时域的变换。这个复量的实部为 $V_m\,\underline{/\omega t + \alpha}$ 在实轴上的投影：$V_m \cos(\omega t + \alpha)$。

综上所述，画在相量图中的相量即是频域相量，如果使相量以角速度 ω rad/s 沿逆时针方向旋转，那么它在实轴上的投影即为时域表示。如果将相量图中表示相量 $\mathbf{V}$ 的箭头想象成旋转的箭头，则它在实轴的投影为瞬时电压 $v(t)$ 在 $\omega t = 0$ 时的快照，从而有助于理解以上内容。

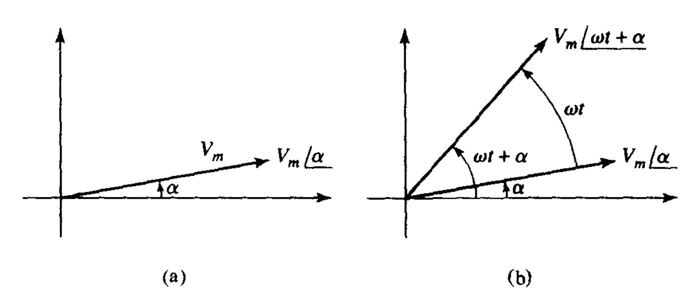


图 10.38 (a)相量电压$V_m\angle\alpha$；(b)将复电压$V_m\angle\omega t+\alpha$表示为某特定时刻的相量，该相量比$V_m\angle\alpha$超前ωt弧度

下面构造几个简单电路的相量图。图10.39(a)所示的串联*RLC*电路有几个不同的电压，但只有一个电流。将该电流作为参考相量可以很容易画出其相量图。任意选择$\mathbf{I}=I_m\angle0^\circ$，并将其放到相量图中的实轴上，如图10.39(b)所示。然后，计算电阻、电容和电感上的电压，并将它们画到相量图中，显然它们之间具有相应的90°相位差关系。这3个电压的和等于电源电压，并且对于该电路，由于$\mathbf{Z}_C=-\mathbf{Z}_L$，因此这个电路处于后面将要定义的“谐振”状态，电源电压与电阻电压相等。将相量图中所示的合适的相量进行相加即可得到电阻和电感或电阻和电容两端的总电压。

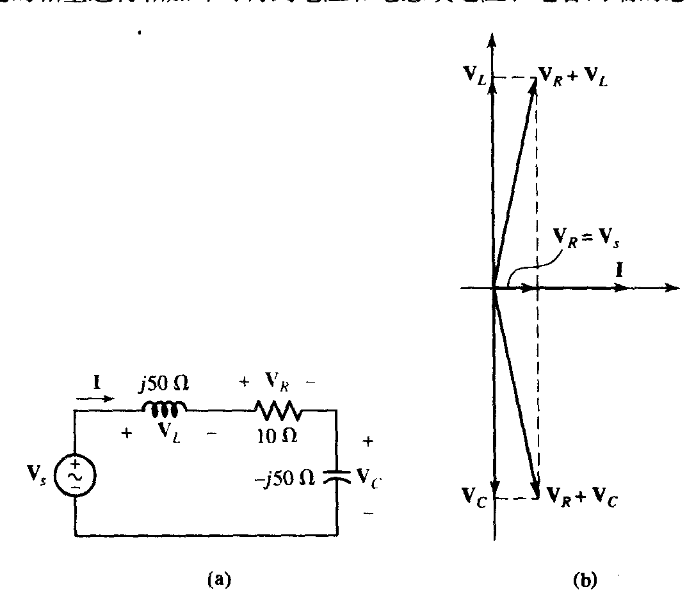


图 10.39 (a) 一个串联*RLC*电路；(b) 该电路的相量图，将电流I作为参考相量以便于分析

图10.40(a)是一个简单的并联电路，其中将两个节点之间的电压作为参考相量。假定$\mathbf{V}=1\angle0^\circ$ V。电阻电流为$\mathbf{I}_R=0.2\angle0^\circ$ A，与参考电压同相。电容电流$\mathbf{I}_C=j0.1$ A比参考电压超前90°。将这两个电流加到相量图中后如图10.40(b)所示，将其相加可以得到电源电流。结果为$\mathbf{I}_s=0.2+j0.1$ A。

如果最初指定电源电流为$1\angle0^\circ$ A，但节点电压未知，那么仍然可以先假定一个节点电压（例如$\mathbf{V}=1\angle0^\circ$ V），并且将它作为参考相量来构造相量图。然后，采用与以前相同的步骤完成相量图的构造。求出由这个假定节点电压产生的电源电流仍为0.2 + *j*0.1 A，而实际的电源电流为$1\angle0^\circ$ A，因此实际的节点电压可以通过将假定节点电压乘以$1\angle0^\circ/(02+j0.1)$而得到，为$4-j2\text{ V}=\sqrt{20}\angle-26.6^\circ$ V。根据假定参考电压得到的相量图与实际相量图的区别是：尺度上的变化（假定的相量图缩小了一个因子$1/\sqrt{20}$）；相角上的旋转（假定的相量图逆时针旋转了26.6°）。

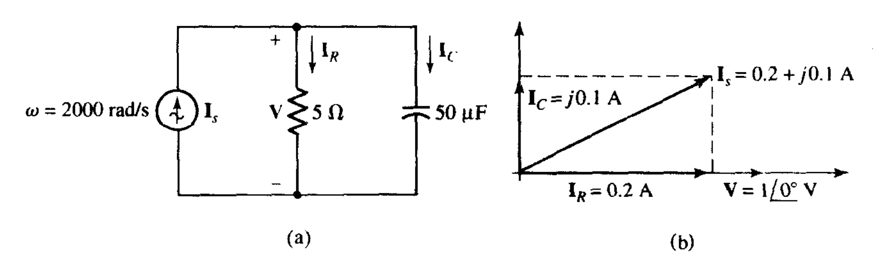


图 10.40　(a) 一个并联 RC 电路；(b) 该电路的相量图，采用节点电压 $\mathbf{V}$ 为参考相量以便于分析

通常情况下可以很容易地画出相量图。对于大多数正弦稳态分析，如果给出这样的相量图，那么将使得分析更为直观。后面将会讲到很多使用相量图的例子。

例题 10.12　电路如图 10.41 所示，在相量图中画出 $\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_L$ 和 $\mathbf{I}_C$。通过对这些电流进行组合，确定 $\mathbf{I}_s$ 超前 $\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_C$ 和 $\mathbf{I}_x$ 的相角。

解： 首先选择一个合适的参考相量。通过对电路进行观察需要确定的变量，看出只要 $\mathbf{V}$ 已知，$\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_L$ 和 $\mathbf{I}_C$ 就可以通过应用欧姆定律计算得到。因此，为了简单起见，选择 $\mathbf{V} = 1\angle 0°$ V，然后计算

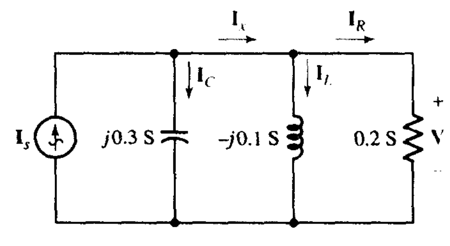


图 10.41　求解多个电流的简单电路

$$\mathbf{I}_R = (0.2)1\angle 0° = 0.2\angle 0° \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_L = (-j0.1)1\angle 0° = 0.1\angle -90° \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_C = (j0.3)1\angle 0° = 0.3\angle 90° \text{ A}$$

相应的相量图如图 10.42(a)所示。此外还需要求解相量电流 $\mathbf{I}_s$ 和 $\mathbf{I}_x$。图 10.42(b)所示的是得到 $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R = 0.2 - j0.1 = 0.224\angle -26.6°$ A 的过程，图 10.42(c)所示的是得到 $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x = 0.283\angle 45°$ A 的过程。从图 10.42(c)可以确定 $\mathbf{I}_s$ 比 $\mathbf{I}_R$ 超前 45°，比 $\mathbf{I}_C$ 超前 −45°，比 $\mathbf{I}_x$ 超前 45° + 26.6° = 71.6°。这些角度只是相对数值，精确数值将取决于 $\mathbf{I}_s$。同样，$\mathbf{V}$ 的实际值（这里为简单起见假定为 $1\angle 0°$ V）也取决于 $\mathbf{I}_s$。

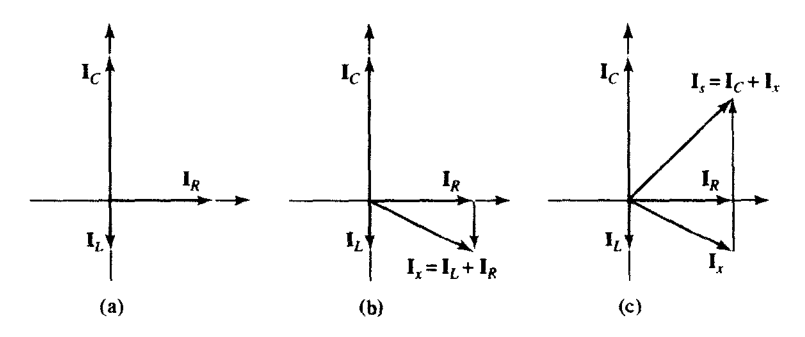


图 10.42　(a) 取 $\mathbf{V}$ 的参考值为 $\mathbf{V} = 1\angle 0°$ 而构造的相量图；(b) 用图解法求 $\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_R$；(c) 用图解法求 $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_x$

练习

10.17　对图 10.43 所示电路，为 $\mathbf{I}_C$ 选择一个合适的参考值，在相量图中画出 $\mathbf{V}_R$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_s$，并计算：(a) $\mathbf{V}_s$ 与 $\mathbf{V}_1$ 的长度比；(b) $\mathbf{V}_1$ 与 $\mathbf{V}_2$ 的长度比；(c) $\mathbf{V}_s$ 与 $\mathbf{V}_R$ 的长度比。

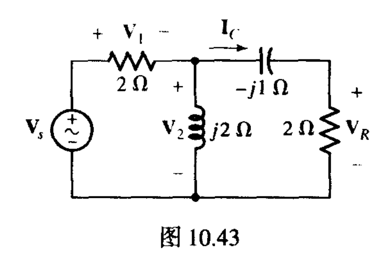


图 10.43

答案：1.90；1.00；2.12。

总结和复习

- 如果两个正弦波（或两个余弦波）都具有正的幅度和相同的频率，那么通过比较它们的相角可以确定哪个波形超前，哪个波形滞后。
- 线性电路对正弦电压源或者电流源的受迫响应总可以写成与正弦电源具有相同频率的单个正弦函数的形式。
- 对任何正弦函数都可以进行相量变换，反之亦然：$V_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow V_m \underline{/\phi}$。
- 相量包含幅度和相角，电路的频率为驱动电路的正弦激励源的频率。
- 在将时域电路变换成相应的频域电路时，电阻、电容和电感用各自的阻抗替代（有时用导纳）。
- 电阻的阻抗就是电阻。
- 电容的阻抗为 $1/j\omega C$ Ω。
- 电感的阻抗为 $j\omega L$ Ω。
- 阻抗的串联和并联组合方式均与电阻相同。
- 之前对电阻电路进行分析的所有方法都适用于包含电容和/或电感的电路，只要将电路中的所有元件都用频域的等效元件替换。
- 相量分析只能在单频率电路中应用，否则必须使用叠加定理，然后将时域的每部分响应相加以得到完全响应。
- 当使用方便的激励函数时，相量图的作用比较大，但最后的结果需要进行相应的尺度变换。

深入阅读

一本很好的关于相量分析技术的书籍：

R. A. DeCarlo 和 P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001。

在下面书籍的第 7 章中讨论了晶体管的频率模型：

W. H. Hayt, Jr.和G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995。

习题

10.1　正弦波特性

1. 某正弦波$f(t)$起始为零，从$t = 2.1$ ms开始增加，随后在$t = 7.5$ ms时到达正的最大幅值8.5。将该正弦波$f(t)$表示为下面的形式：(a) $C_1\sin(\omega t+\phi)$，其中ϕ为正值且尽可能地小，以度（°）为单位；(b) $C_2\cos(\omega t+\beta)$，其中β具有最小的可能值，以度（°）为单位；(c) $C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t$。
2. (a) 如果$-10\cos\omega t + 4\sin\omega t = A\cos(\omega t+\phi)$，其中$A>0$，$-180°<\phi\leq 180°$，求$A$和$\phi$；(b) 如果$200\cos(5t+130°) = F\cos 5t + G\sin 5t$，求$F$和$G$；(c)求出位于区间$0\text{ s}\leq t\leq 1\text{ s}$内的3个$t$值，使得$i(t) = 5\cos 10t - 3\sin 10t = 0$；(d) 在$t = 0$ ms到$t = 10$ ms的范围内，怎样的时间区间可使$10\cos 100\pi t \geqslant 12\sin 100\pi t$?
3. 给定两个正弦波：$f(t) = -50\cos\omega t - 30\sin\omega t$和$g(t) = 55\cos\omega t - 15\sin\omega t$，求：(a) 它们各自的幅度；(b)$f(t)$超前$g(t)$的相角。
4. 把式[3]中假定的电流响应$i(t) = A\cos(\omega t - \theta)$直接代入到微分方程$L(di/dt) + Ri = V_m\cos\omega t$中，证明由此得到的$A$和$\theta$满足式[4]。
5. 某电源产生的电压可用余弦波$V_m\cos(\omega t+\phi)$来描述，频率为13.56 MHz。如果该电源传送到5 Ω负载上的最大功率为300 W，且该电压在$t = 21.15$ ms时达到最小值，则V_m，ω和ϕ各为多少?
6. 比较下面的各对波形，并判断哪一个为超前波形：(a) $-33\sin(8t-9°)$和$12\cos(8t-1°)$；(b) $15\cos(1000t+66°)$和$-2\cos(1000t+450°)$；(c) $\sin(t-13°)$和$\cos(t-90°)$；(d) $\sin t$和$\cos(t-90°)$。
7. 判断以下各对波形中哪一个是滞后的：(a) $6\cos(2\pi 60t-9°)$和$-6\cos(2\pi 60t+9°)$；(b) $\cos(t-100°)$和$-\cos(t-100°)$；(c) $-\sin t$和$\sin t$；(d) $7000\cos(t-\pi)$和$9\cos(t-3.14°)$。
8. 证明电压$v(t) = V_1\cos\omega t - V_2\sin\omega t$可以写成单个余弦函数$V_m\cos(\omega t+\phi)$的形式，并导出$V_m$和$\phi$的正确表达式。
9. 傅里叶定理无论在科学上还是在工程上都是很有用的工具，它表明如图10.44所示的周期波形等于下面无限项之和：

$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin\pi t - \frac{1}{3^2}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^2}\sin 5\pi t - \frac{1}{7^2}\sin 7\pi t + \cdots\right)$$

(a) 计算$v(t)$在$t = 0.4$ s时的精确值，并用上面的傅里叶级数估算$v(t)$的值，其中：(b)仅用第1项；(c) 仅用前4项；(d) 仅用前5项。

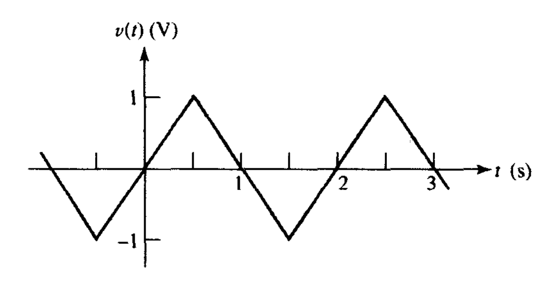


图 10.44

10. 典型的家用电压为 110 V，115 V 或 120 V（北美），不过这些值并不代表交流峰值电压，而是代表电压的均方根值，其定义如下：

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2\cos^2(\omega t)\,dt}$$

其中，T 为波形的周期，V_m 为峰值电压，ω 为波形频率（在北美，$f=60$ Hz）。

(a) 计算式中的积分，并证明对于正弦电压：

$$V_{\mathrm{rms}}=\frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(b) 当均方根（rms）电压为 110 V、115 V 和 120 V 时，计算相应的峰值电压。

10.2 正弦函数激励下的受迫响应

11. 求图 10.45 所示电路的稳态电压 $v_C(t)$。

12. 电路如图 10.46 所示，假定 $R=100\ \Omega$，$L=2$ H，所有的瞬态过程都已经消失，求电感电压 $v_L(t)$。

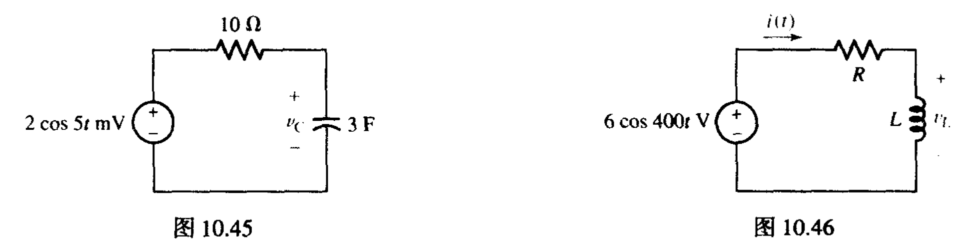


图 10.45　　　　图 10.46

13. 电路如图 10.47 所示，设 $v_s=20\cos 500t$ V，先对电路进行简化，然后求 $i_L(t)$。

14. 电路如图 10.48 所示，如果 $i_s=0.4\cos 500t$ A，简化电路使之具有如图 10.4 所示的形式，然后求：(a) $i_L(t)$；(b) $i_x(t)$。

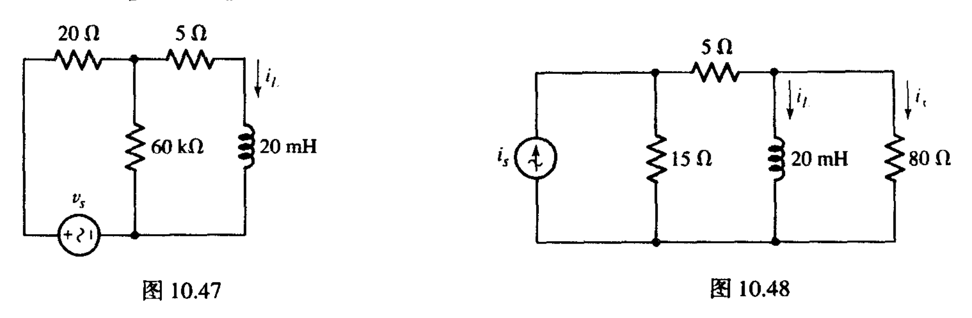


图 10.47　　　　图 10.48

15. 一个正弦电压源 $v_s=100\cos 10^5 t$ V 与一个 500 Ω 电阻和 8 mH 电感串联，确定在 $0\leqslant t<0.5T$ 内的哪些时刻出现下列情形：(a) 传送到电阻的功率为零；(b) 传送到电感的功率为零；(c) 电源产生的功率为零。

16. 在图 10.49 所示的电路中，设 $v_s=3\cos 10^5 t$ V，$i_s=0.1\cos 10^5 t$。利用叠加定理和戴维南定理，求 $t=10\ \mu$s 时 i_L 和 v_L 的瞬时值。

17. 求图 10.50 所示电路中的 $i_L(t)$。

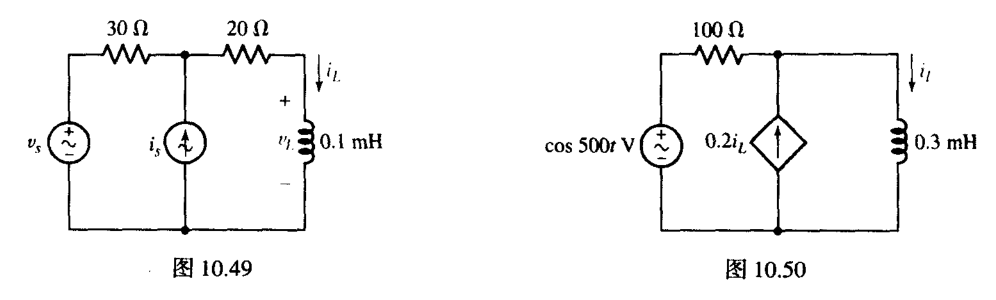


图 10.49　　图 10.50

18. 图 10.51 所示电路中的两个电压源均为 $120 \cos 120\pi t$ V。(a) 求电感中储存的能量的瞬时值表达式；(b)利用该表达式求所储存能量的平均值。
19. 在图 10.51 所示电路中，电压源为 $v_{s1} = 120 \cos 200t$ V 和 $v_{s2} = 180 \cos 200t$ V，求向下流过电感的电流。
20. 假定图 10.52 所示电路中的运放为理想运放（即 $R_i = \infty$，$R_o = 0$ 以及 $A = \infty$），注意，积分器的输入端接有两个输入：$-V_m \cos \omega t$ 和 v_{out}。如果乘积 R_1C_1 等于图 10.4 所示电路中的比值 L/R，证明 v_{out} 等于图 10.4 所示电路中电阻 R（参考符号“+”位于左边）两端的电压。

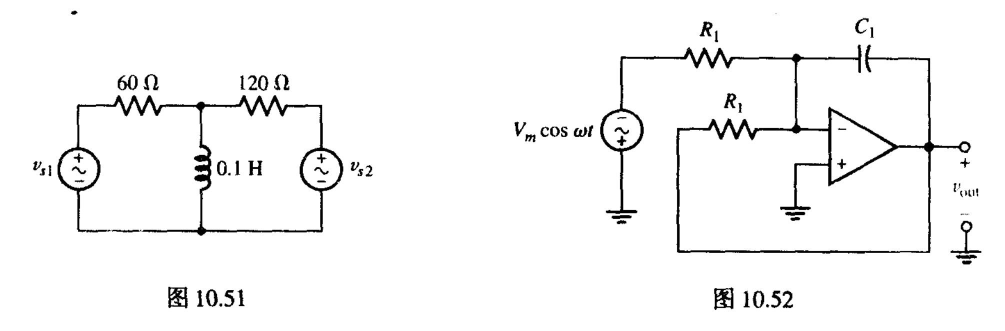


图 10.51　　图 10.52

21. 一个电压源 $V_m \cos \omega t$ 与电阻 R 和电容 C 串联。(a) 写出以回路电流 i 表示的微积分方程，然后对它求导得到电路的微分方程；(b)假定一个受迫响应 $i(t)$ 具有合适的一般形式，然后将其代入微分方程，求受迫响应的精确形式。

10.3　复激励函数

22. 将下面各式转换为直角坐标形式：(a) $7\angle{-90^\circ}$；(b) $3 + j + 7\angle{-17^\circ}$；(c) $14e^{j15^\circ}$；(d) $1\angle{0^\circ}$；将下面各式转换为极坐标形式：(e) $-2(1 + j9)$；(f) 3。
23. 进行相应的运算，并将答案表示为单个复数的直角坐标形式：(a) $3+15\angle{-23^\circ}$；(b) $12j(17\angle{180^\circ})$；(c) $5 - 16\dfrac{(1 + j)(2 - j7)}{33\angle{-9^\circ}}$。
24. 进行相应的运算，并将答案表示为单个复数的极坐标形式：(a) $5\angle{9^\circ} - 9\angle{-17^\circ}$；(b) $(8 - j15)(4 + j16) - j$；(c) $\dfrac{(14 - j9)}{(2 - j8)} + 5\angle{-30^\circ}$；(d) $17\angle{-33^\circ} + 6\angle{-21^\circ} + j3$。
25. 将下面各式表示为单个复数的极坐标形式：
(a) $e^{j14^\circ} + 9\angle{3^\circ} - \dfrac{8 - j6}{j^2}$；(b) $\dfrac{5\angle{30^\circ}}{2\angle{-15^\circ}} + \dfrac{2e^{j5^\circ}}{2 - j2}$。
26. 将下面的复数转换为直角坐标形式：(a) $5\angle{-110^\circ}$；(b) $6e^{j160^\circ}$；(c) $(3 + j6)(2\angle{50^\circ})$；(d) $-100 - j40$；(e) $2\angle{50^\circ} + 3\angle{-120^\circ}$。



27. 进行相应的运算，并将结果表示为极坐标形式：(a) $40\angle{-50^\circ} - 18\angle{25^\circ}$；(b) $3 + \dfrac{2}{j} + \dfrac{2 - j5}{1 + j2}$。将以下各式表示为直角坐标形式：(c) $(2.1\angle{25^\circ})^3$；(d) $0.7e^{j0.3}$。
28. 在图 10.53 所示电路中，设 i_C 的复响应可表示为 $20e^{j(40t + 30^\circ)}$A，将 v_s 表示为复激励函数。
29. 在图 10.54 所示电路中，设电流 i_L 的复响应可表示为 $20e^{j(10t + 25^\circ)}$ A，将电流源 $i_s(t)$ 表示为复激励函数。

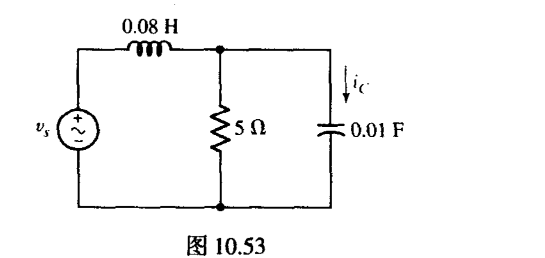


图 10.53

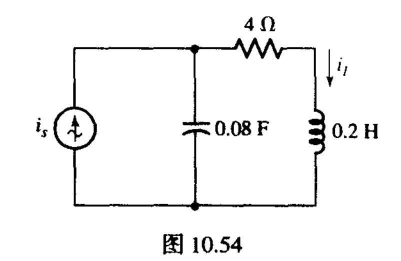


图 10.54

30. 在线性网络中，如图 10.8 所示，正弦电压源 $v_s = 80\cos(500t - 20^\circ)$ V 产生的输出电流为 $i_{out} = 5\cos(500t + 12^\circ)$ A。求 i_{out}，假设 v_s 等于：(a) $40\cos(500t + 10^\circ)$ V；(b) $40\sin(500t + 10^\circ)$ V；(c) $40e^{j(500t + 10^\circ)}$ V；(d) $(50 + j20)\,e^{j500t}$ V。

10.4 相量

31. 将下列电流表示成相量：(a) $12\sin(400t + 110^\circ)$ A；(b) $-7\sin 800t - 3\cos 800t$ A；(c) $4\cos(200t - 30^\circ) - 5\cos(200t + 20^\circ)$ A。如果 $\omega = 600$ rad/s，求 $t = 5$ ms 时下列各电压的瞬时值：(d) $70\angle{30^\circ}$ V；(e) $-60 + j40$ V。
32. 设 $\omega = 4$ krad/s，求 $t = 1$ ms 时 i_x 的瞬时值，假设 $\mathbf{I}_x$ 等于：(a) $5\angle{-80^\circ}$ A；(b) $-4 + j1.5$ A。如果 $v_x(t)$ 等于：(c) $50\sin(250t - 40^\circ)$ V；(d) $20\cos 108t - 30\sin 108t$ V；(e) $33\cos(80t - 50^\circ) + 41\cos(80t - 75^\circ)$ V，分别将相量电压 $\mathbf{V}_x$ 表示为极坐标形式。
33. 将 $\omega = 500$ rad/s 时的相量电压 $\mathbf{V}_1 = 10\angle{90^\circ}$ 与 $\omega = 1200$ rad/s 时的相量电压 $\mathbf{V}_2 = 8\angle{90^\circ}$ mV 在某个运放电路中相加。如果运放将这些输入放大 −5 倍，求 $t = 0.5$ ms 时电路的输出。
34. 电路如图 10.55 所示，如果 $\omega = 500$ rad/s 和 $\mathbf{I}_L = 2.5\angle{40^\circ}$，求 $v_s(t)$。
35. 电路如图 10.56 所示，设 $\omega = 5$ krad/s，求：(a) $v_1(t)$；(b) $v_2(t)$；(c) $v_3(t)$。

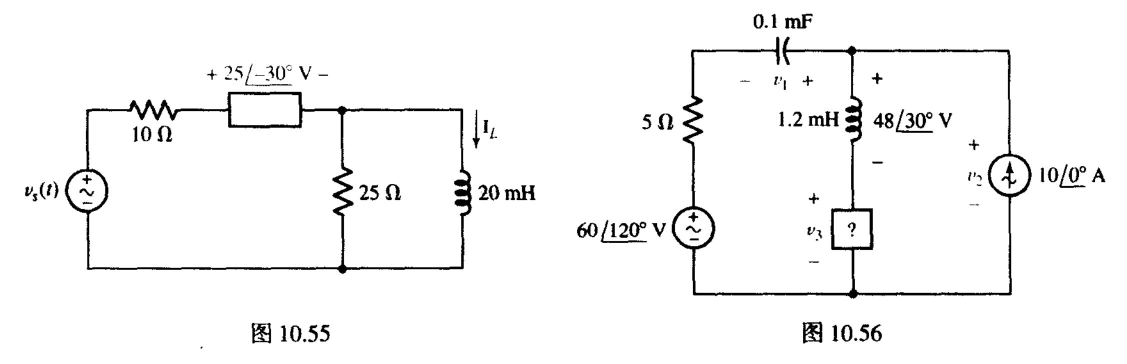


图 10.55　　图 10.56

36. 一个 $1\angle{0^\circ}$ A 的相量电流流过 1 Ω，1 H 和 1 F 的串联组合，当频率为何值时，网络两端的电压幅度是电阻两端电压幅度的两倍？
37. 电路如图 10.57 所示，求 v_x。

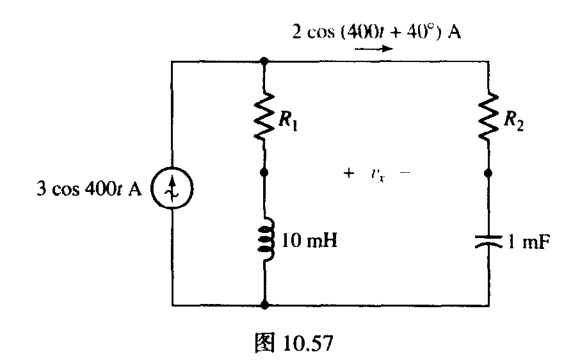


图 10.57

38. 某个带有黄色条纹的黑盒子包含两个电流源$\mathbf{I}_{s1}$和$\mathbf{I}_{s2}$，输出电压设为$\mathbf{V}_{out}$。如果$\mathbf{I}_{s1} = 2\underline{/20^\circ}$ A 和$\mathbf{I}_{s2} = 3\underline{/-30^\circ}$ A，那么$\mathbf{V}_{out} = 80\underline{/10^\circ}$ V。如果$\mathbf{I}_{s1} = \mathbf{I}_{s2} = 4\underline{/40^\circ}$ A，那么$\mathbf{V}_{out} = 90 - j30$ V。如果$\mathbf{I}_{s1} = 2.5\underline{/-60^\circ}$ A 和$\mathbf{I}_{s2} = 2.5\underline{/60^\circ}$ A，求$\mathbf{V}_{out}$。

10.6 阻抗

39. 计算 1 mF, 2 mF 和 3 mF 电容串联组合的阻抗，假设工作频率等于：(a) 1 Hz；(b) 100 Hz；(c) 1 kHz；(d) 1 GHz。
40. 计算 5 Ω 电阻与 1 nH 电感和 5 nH 电感并联组合的阻抗，假设工作频率等于：(a) 1 Hz；(b) 1 kHz；(c) 1 MHz；(d) 1 GHz；(e) 1 THz。
41. 求图 10.58 所示电路中 a 和 b 两端的 $\mathbf{Z}_{in}$，假设 ω 等于：(a) 800 rad/s；(b) 1600 rad/s。
42. 设图 10.59 所示电路中的 $\omega = 100$ rad/s：(a) 求 $\mathbf{Z}_{in}$；(b)如果从 x 到 y 短路，求 $\mathbf{Z}_{in}$。

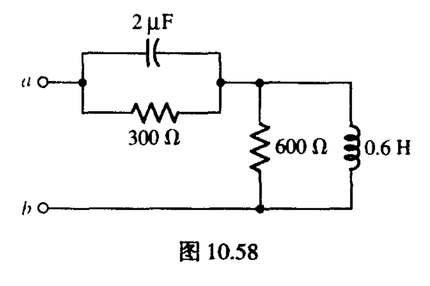


图 10.58

图 10.59

43. 如果一个 $v_s = 120\cos 800t$ V 的电压源接到图 10.58 所示电路（参考“+”端位于上端）中的 a 和 b 端，那么向右边流过 300 Ω 电阻的电流是多少？
44. 求图 10.60 所示电路中的 $\mathbf{V}$，如果盒子中包含：(a) 3 Ω 与 2 mH 串联；(b) 3 Ω 与 125 μF 串联；(c) 3 Ω，2 mH 和 125 μF 串联；(d) 3 Ω，2 mH 和 125 μF 串联，但是这时的 $\omega = 4$ krad/s。

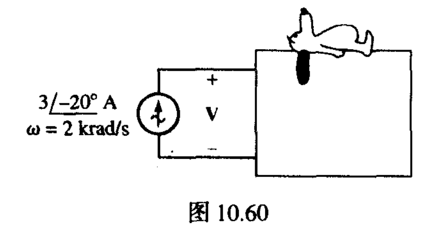


图 10.60

45. 一个 10 H 电感、一个 200 Ω 电阻和一个电容 C 并联。(a) 如果 $C = 20$ μF，求该并联组合在 $\omega = 100$ rad/s 时的阻抗；(b) 如果阻抗的大小在 $\omega = 100$ rad/s 时为 125 Ω，求 C；(c) 如果 $C = 20$ μF，ω 等于哪两个值时能使阻抗的大小等于 100 Ω?
46. 一个 20 mH 电感和一个 30 Ω 电阻并联，分别求频率 ω 为何值时可得到：(a) $|\mathbf{Z}_{in}| = 25$ Ω；(b) $\mathbf{Z}_{in}$ 的相角为 25°；(c) $\mathrm{Re}(\mathbf{Z}_{in}) = 25$ Ω；(d) $\mathrm{Im}(\mathbf{Z}_{in}) = 10$ Ω。
47. 求图 10.57 所示电路中的 R_1 和 R_2。

48. 某两元件网络在 $\omega = 1200$ rad/s 时的输入阻抗为 $200 + j80\ \Omega$。将多大的电容并联到该网络能使输入阻抗为：(a) 零电抗？(b)大小为 100 Ω？

49. 网络如图 10.61 所示，求 $\omega = 4$ rad/s 时的 $\mathbf{Z}_{in}$，设端点 a 和 b 之间为：(a) 开路；(b)短路。

50. 求图 10.62 所示网络的等效阻抗，假定频率 $f = 1$ MHz。

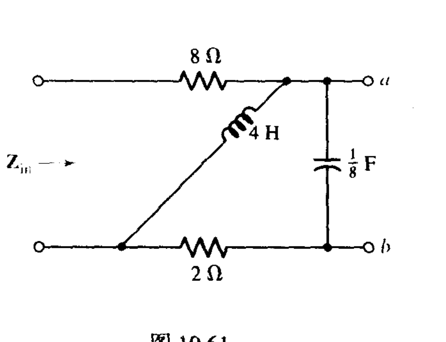


图 10.61

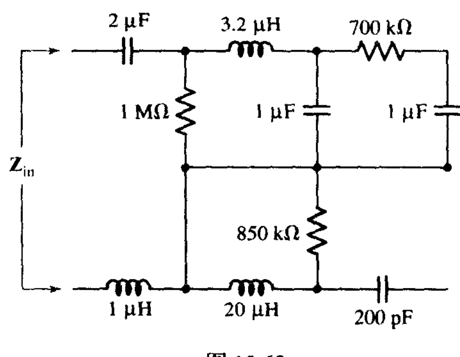


图 10.62

51. 设计一个电感、电容和电阻的组合，要求该组合具有：(a) 在 $\omega = 1$ rad/s 时，阻抗为 $1 + j4\ \Omega$；(b) 至少使用一个电感，使得 $\omega = 1$ rad/s 时阻抗为 5 Ω；(c) $\omega = 100$ rad/s 时阻抗为 $7\angle 80°\ \Omega$；(d) 使用最少的元件，使得 $f = 3$ THz 时阻抗为 5 Ω。

52. 设计一个电感、电阻和电容的组合，要求该组合具有：(a) 在 $\omega = 230$ rad/s 时，阻抗为 $1 + j4$ kΩ；(b) 至少使用一个电容，使得 $\omega = 10$ rad/s 时阻抗为 5 MΩ；(c) $\omega = 50$ rad/s 时阻抗为 $80\angle -22°\ \Omega$；(d) 使用最少的元件，使得 $\omega = 3$ krad/s 时阻抗为 300 Ω。

10.7　导纳

53. 计算 1 mF, 2 mF 和 4 mF 电容并联组合的导纳，设工作频率为：(a) 2 Hz；(b) 200 Hz；(c) 20 kHz；(d) 200 GHz。

54. 求下列组合的电纳：(a) 两个 100 Ω 电阻并联；(b) 一个 1 Ω 电阻与一个 1 F 电容并联，工作频率为 100 rad/s；(c) 一个 1 Ω 电阻与一个 2 H 电感串联，工作频率为 50 rad/s。

55. 求图 10.63 所示网络的导纳 $\mathbf{Y}_{ab}$，并将它画成电阻 R 和电感 L 的并联组合；假设 $\omega = 1$ rad/s，求 R 和 L 的值。

56. 一个 5 Ω 电阻、20 mH 电感和 2 mF 电容组成一个串联网络，该网络的两端为 a 和 b。(a) 利用导纳，确定在 a 和 b 之间需要并联一个多大的电容，使得 $\omega = 500$ rad/s 时 $\mathbf{Z}_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$；(b) $R_{in,ab}$ 的值为多少？(c) 并联上该电容 C，则 $\omega = 100$ rad/s 时 $\mathbf{Y}_{in,ab}$ 的值为多少？

57. 参见如图 10.64 所示网络，分别求频率的值，使得处于该频率时：(a) $R_{in} = 550\ \Omega$；(b) $X_{in} = 50\ \Omega$；(c) $G_{in} = 1.8$ mS；(d) $B_{in} = -150\ \mu S$。

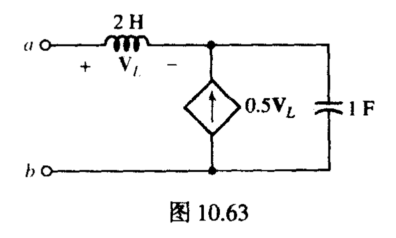


图 10.63

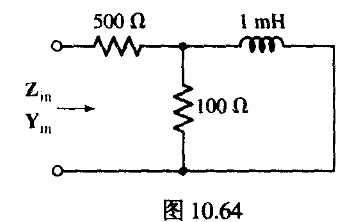


图 10.64

58. 两个导纳 $\mathbf{Y}_1 = 3 + j4$ mS 与 $\mathbf{Y}_2 = 5 + j2$ mS 并联，第三个导纳 $\mathbf{Y}_3 = 2 - j4$ mS 与该并联组合串联。如果流过 $\mathbf{Y}_1$ 的电流为 $\mathbf{I}_1 = 0.1\underline{/30^\circ}$，求下列各量两端的电压：(a) $\mathbf{Y}_1$；(b) $\mathbf{Y}_2$；(c)$\mathbf{Y}_3$；(d) 整个网络两端。
59. 10 Ω 电阻和 50 μF 电容的并联组合在 $\omega = 1$ krad/s 时其导纳与相同频率下 R_1 和 C_1 串联组合的导纳相等。(a) 求 R_1 和 C_1；(b) 如果 $\omega = 2$ krad/s，重做本题。
60. 某坐标平面包含一条水平轴，它表示 G_{in}，单位为西门子（S）；平面内还有一条垂直轴，它表示 B_{in}，也以西门子为单位。设 $\mathbf{Y}_{in}$ 表示 1 Ω 电阻和 0.1 F 电容的串联组合。(a) 求 $\mathbf{Y}_{in}$，G_{in} 和 B_{in} 随 ω 变化的函数表达式；(b)分别在平面上标出频率 $\omega = 0$ rad/s，1 rad/s，2 rad/s，5 rad/s，10 rad/s，20 rad/s 和 10^6 rad/s 时的坐标对（G_{in}，B_{in}）。
61. Ⓓ 设计一个电感、电容和电阻的组合，要求该组合具有：(a) 在 $\omega = 1$ rad/s 时，导纳为 $1 - j4$ S；(b) 至少使用一个电感，使得 $\omega = 1$ rad/s 时阻抗为 200 mS；(c) $\omega = 100$ rad/s 时阻抗为 $7\underline{/80^\circ}$ μS；(d) 使用最少的元件，使得 $\omega = 3$ THz 时导纳为 200 mΩ。
62. Ⓓ 设计一个电感、电阻和电容的组合，要求该组合具有：(a) 在 $\omega = 30$ rad/s 时，阻抗为 $1 - j4$ pS；(b) 至少使用一个电容，使得 $\omega = 560$ rad/s 时导纳为 5 μS；(c) $\omega = 50$ rad/s 时阻抗为 $4\underline{/-10^\circ}$ nS；(d) 使用最少的元件，使得 $\omega = 300$ kHz 时导纳为 60 nS。

10.8　节点分析和网孔分析

63. 电路如图 10.65 所示，利用相量和节点分析法求 $\mathbf{V}_2$。

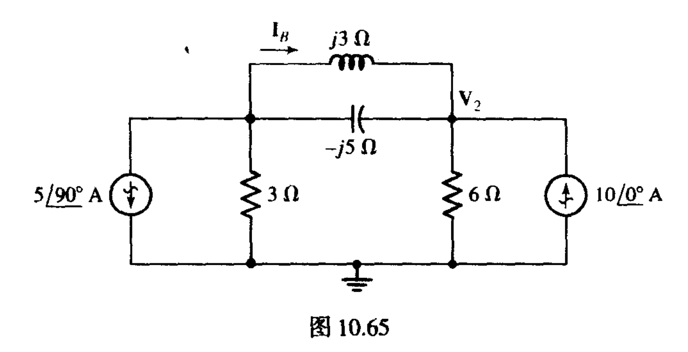


图 10.65

64. 电路如图 10.65 所示，利用相量和网孔分析法求 $\mathbf{I}_B$。
65. 电路如图 10.66 所示，如果 $v_{s1} = 20\cos 1000t$ V 和 $v_{s2} = 20\sin 1000t$ V，求 $v_x(t)$。
66. (a) 求图 10.67 所示电路中的 $\mathbf{V}_3$；(b) 3 个容性阻抗的值需要改为多大，才能使 $\mathbf{V}_3$ 与电源电压的相位差等于 180°？

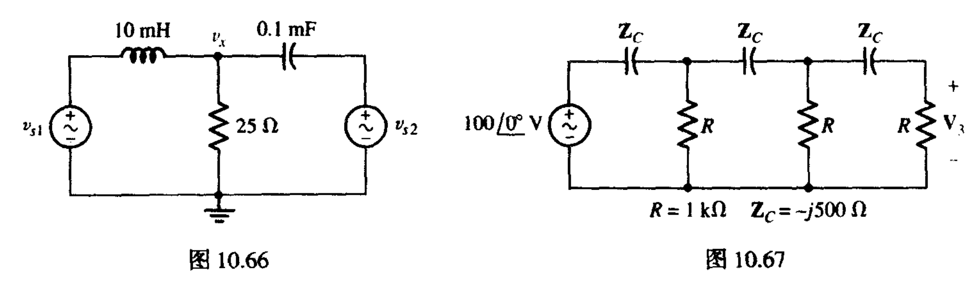


图 10.66　　图 10.67

67. 利用网孔分析法，求图 10.68 所示电路中的 $i_x(t)$。
68. 利用相量和节点分析法，求图 10.68 所示电路中的 $v_x(t)$。

69. 图 10.69 所示电路中的运放输入阻抗为无限大，输出阻抗为零，增益很大但却有限（正数和实数），为 $A = -\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$。(a) 令 $\mathbf{Z}_f = R_f$，构造一个基本微分电路，求 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$，并证明当 $A \to \infty$ 时 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \to -j\omega C_1 R_f$；(b) 设 $\mathbf{Z}_f$ 表示 C_f 与 R_f 的并联，求 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$，并证明当 $A \to \infty$ 时 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s \to -j\omega C_1 R_f/(1 + j\omega C_f R_f)$。

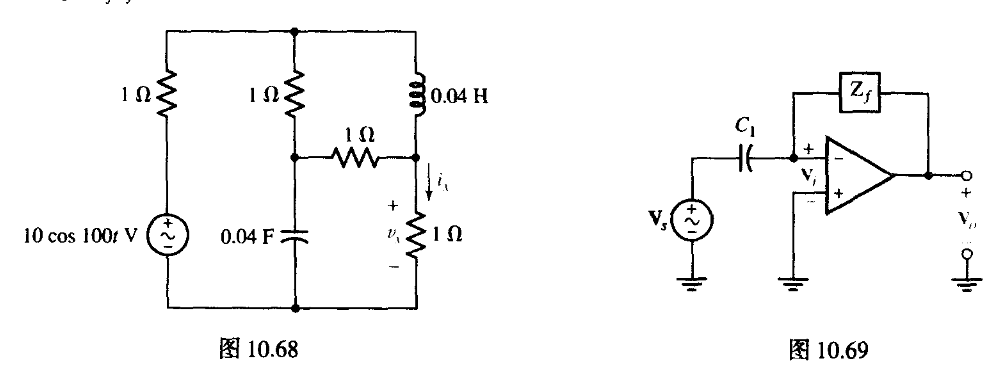


图 10.68　　　　图 10.69

70. 电路如图 10.70 所示，求电压 v_2。

71. 计算 $t = 1$ ms 时图 10.71 所示电路中 1 Ω 电阻消耗的功率。

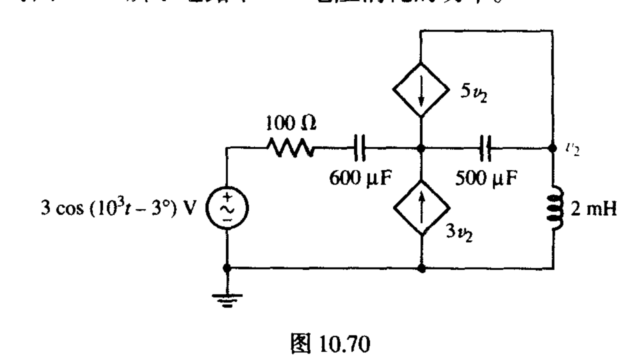


图 10.70

72. 利用相量分析法，求图 10.72 所示电路中的 3 个网孔电流 $i_1(t)$，$i_2(t)$ 和 $i_3(t)$。

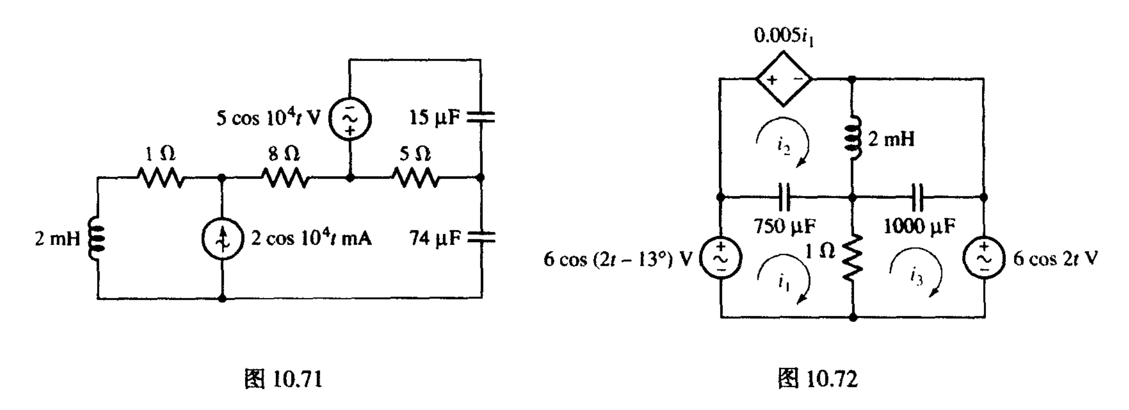


图 10.71　　　　图 10.72

73. 在图 10.73 所示电路中，如果电压 $v_1(t) = 6.014\cos(2\pi t + 85.76°)$ V，则电容 C_1 的值为多少？

74. 在图 10.74 所示电路中，如果电流 $i_1(t) = 8.132\cos 2\pi t$ A，则电感 L_1 的值为多少？

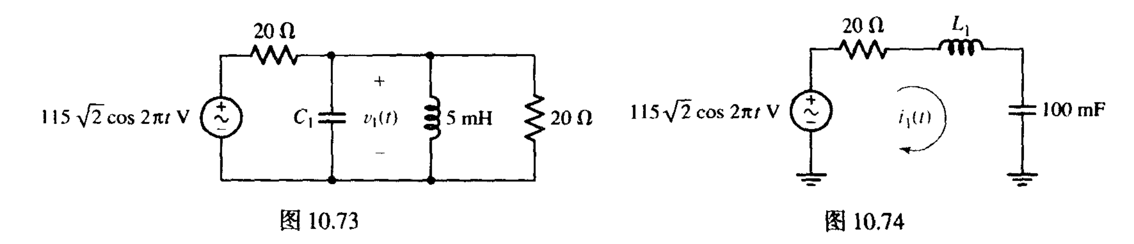


图 10.73　　　图 10.74

75. 参见图 10.26(b)所示的晶体管放大电路：(a) 推导输出信号的相角随频率变化的函数关系，假定输入信号为 $\mathbf{V}_s = 1\underline{/0^\circ}$ V；(b) 采用半对数坐标刻度，在 100 Hz 到 10 GHz 的频率间隔内画出该函数的曲线。设 $R_s = 300\ \Omega$，$R_B = 5\ \text{k}\Omega$，$r_\pi = 2.2\ \text{k}\Omega$，$C_\pi = 5$ pF，$C_\mu = 2$ pF，$g_m = 38$ mS，$R_C = 4.7\ \text{k}\Omega$ 和 $R_L = 1.2\ \text{k}\Omega$；(c) 在哪个频率范围内，输出与输入的相差精确等于 180° 且与输入无关？从哪个近似频率开始相位关系开始改变？

10.9　叠加定理、电源变换和戴维南定理

76. 求图 10.75 所示网络的频域戴维南等效电路，并将结果表示为 $\mathbf{V}_{th}$ 与 $\mathbf{Z}_{th}$ 串联的形式。
77. 求图 10.76 所示电路的输入导纳，并将其表示为电阻 R 和电感 L 并联的形式，如果 $\omega = 1$ rad/s，求 R 和 L 的值。

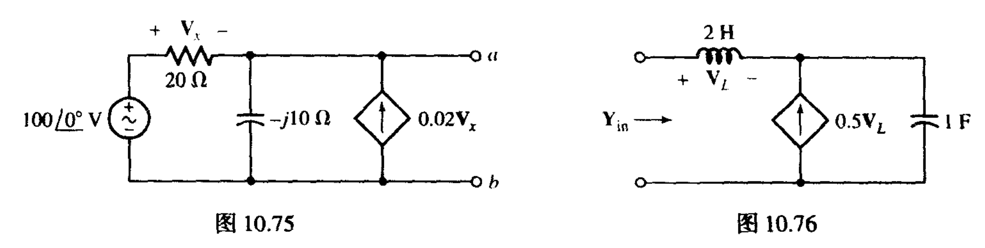


图 10.75　　　图 10.76

78. 参见图 10.77 所示电路，利用叠加原理，分别求以下两种情况下的 $v_1(t)$：(a) 只有电压源起作用；(b) 只有电流源起作用。
79. 设 $\omega = 1$ rad/s，求图 10.78 所示网络的诺顿等效电路，并将诺顿等效表示为电流源 $\mathbf{I}_N$ 与电阻 R_N、电感 L_N 或者电容 C_N 并联的形式。

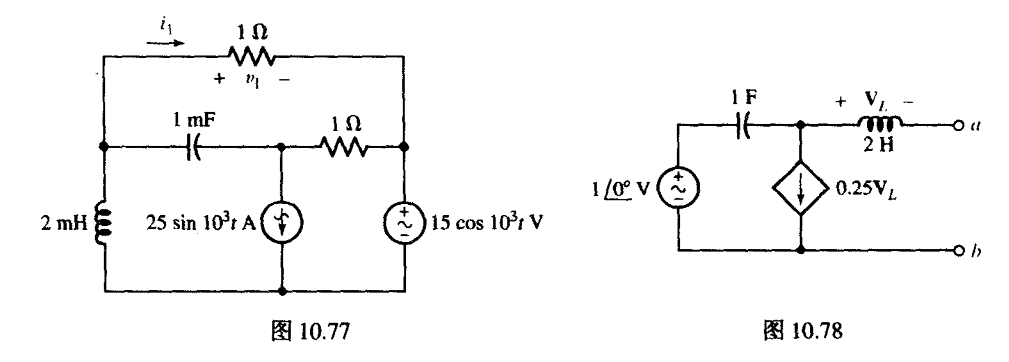


图 10.77　　　图 10.78

80. 电路如图 10.79 所示，设 $i_{s1} = 2\cos 200t$ A，$i_{s2} = 1\cos 100t$ A 和 $v_{s3} = 2\sin 200t$ V，求 $v_L(t)$。
81. 电路如图 10.80 所示，求电路的戴维南等效。

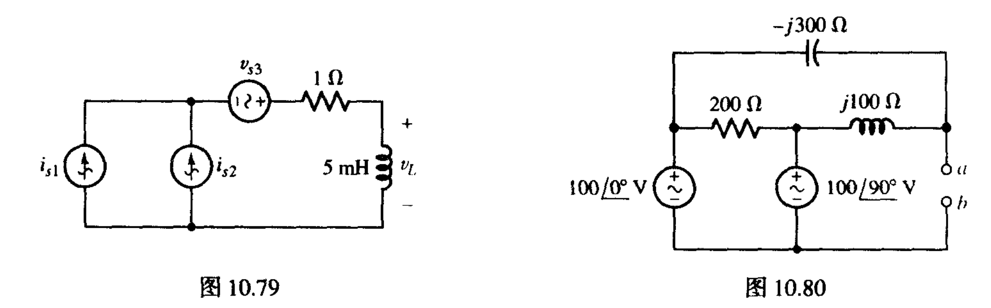


图 10.79　　　　图 10.80

82. 电路如图 10.81 所示，求从电压源流出的电流 $i(t)$。

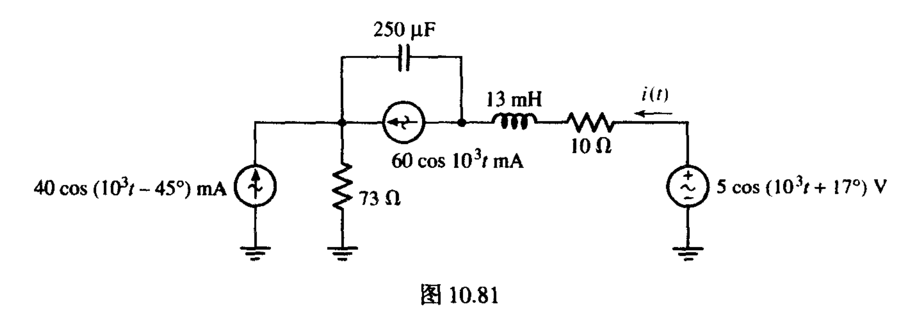


图 10.81

83. (a) 求图 10.82 所示电路中 3 F 电容两端的电压；(b) 用 PSpice 对答案进行验证。



84. (a) 求图 10.21 所示电路中从 $j5\ \Omega$ 电感看进去的戴维南等效电路；(b) 假定频率为 100 rad/s，用 PSpice 对结果进行验证。

85. 使用一个电阻、一个电容和一个正弦电压源，利用分压关系设计一个可以滤除高频信号的电路（提示：将两个无源元件上的一个电压定义为输出电压，正弦电压源作为输入。这里的“滤除”应理解为输出电压减小）。

86. 使用一个电阻、一个电容和一个正弦电压源，利用分压关系设计一个可以滤除低频信号的电路（提示：将两个无源元件上的一个电压定义为输出电压，正弦电压源作为输入。这里的“滤除”应理解为输出电压减小）。

87. (a) 将图 10.83 所示的电路简化为简单的串联 RC 电路；(b) 推导电压比 $\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_s$ 的幅度随频率变化的函数关系；(c) 在100 Hz到1 MHz的频率范围内画出该函数的曲线，并将其与用PSpice对原电路仿真得到的曲线进行比较。

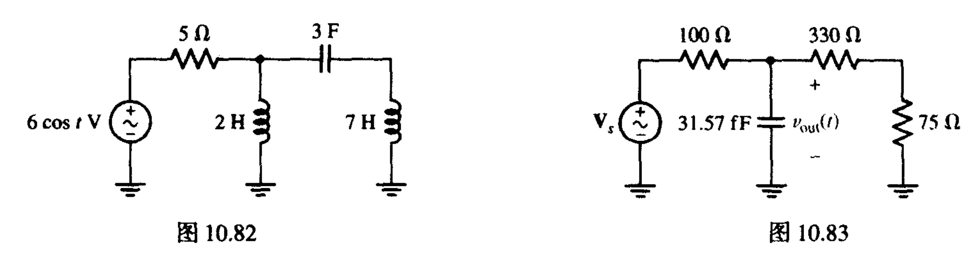


图 10.82　　　　图 10.83

88. 参见图 10.26(b)：(a) 证明放大电路的最大电压增益（定义为 $\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_\pi$）为 $-g_m(R_C \| R_L)$；(b) 如果 $R_S = 100\ \Omega$，$R_L = 8\ \Omega$，R_C 的最大值为 10 kΩ，$r_\pi g_m = 300$，所有其他的参数均可以改变，则如何修改设计可以提高增益？(c) 修改后的设计对放大器的截止频率有何影响？如何补偿？

89. 利用叠加原理，求图 10.84 所示电路中的电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$。

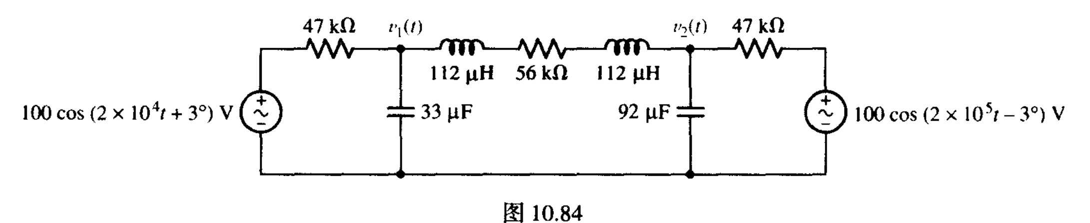


图 10.84

90. 利用叠加原理，求图 10.85 所示电路中的电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$。

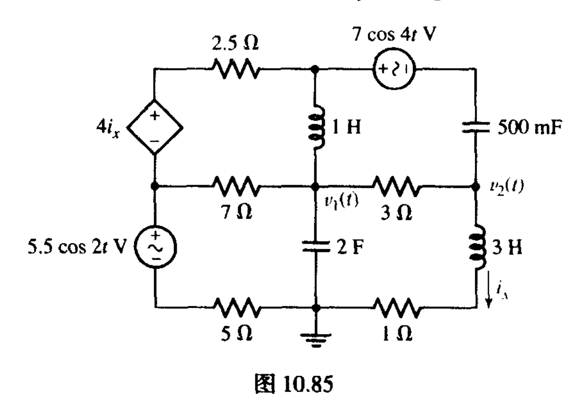


图 10.85

10.10 相量图

91. (a) 计算图 10.86 所示电路中的 $\mathbf{I}_L$，$\mathbf{I}_R$，$\mathbf{I}_C$，$\mathbf{V}_L$，$\mathbf{V}_R$和 $\mathbf{V}_C$（加上 $\mathbf{V}_s$）；(b) 设刻度分别为 1 in.50 V 和 1 in. 25 A，在相量图中画出所有的 7 个量，并说明 $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C$ 和 $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$。

92. 在图 10.87 所示电路中，求：(a) $\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 的值；(b) 在相量图中画出 $\mathbf{V}_s$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$（使用刻度 50 V/ in.和 2 A/ in.）；(c) 用图解法求 $\mathbf{I}_s$，给出其幅度和相角。

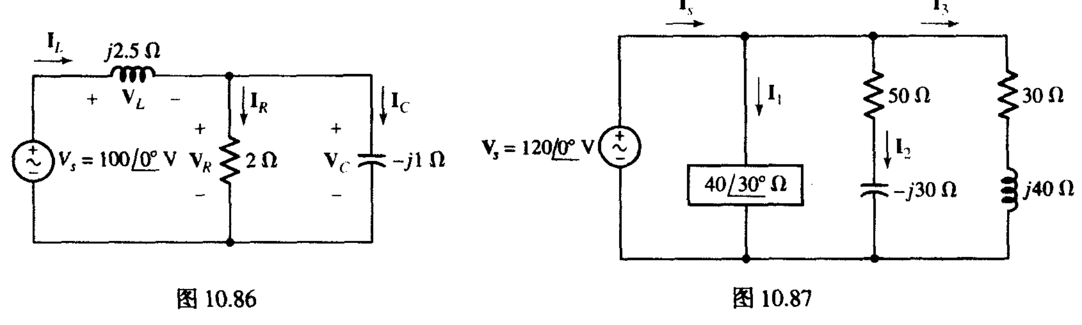


图 10.86　　　　图 10.87

93. 在图 10.88 所示电路中，已知 $|\mathbf{I}_1| = 5$ A 和 $|\mathbf{I}_2| = 7$ A，使用圆规、直尺、画线板和量角器等工具求 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。

94. 设 $\mathbf{V}_1 = 100\angle 0°$ V，$|\mathbf{V}_2| = 140$ V 和 $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120$ V，利用图解法求 $\mathbf{V}_2$ 相角的两个可能值。

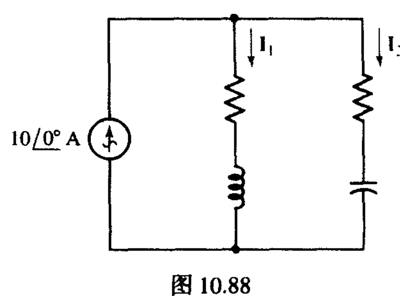


图 10.88

第11章　交流电路的功率分析

主要概念

- 计算瞬时功率
- 正弦激励源提供的平均功率
- 均方根值（RMS）
- 无功功率
- 复功率、平均功率和无功功率的关系
- 负载的功率因数

引言

电路分析的一个组成部分通常是确定电路提供的功率或者消耗的功率（或两者兼而有之）。有关交流功率，我们发现先前介绍的简单方法并不能描述特定系统工作时的情景，因此本章将介绍几种和功率有关的不同的物理量。

首先考虑瞬时功率，即所讨论的元件或网络上的时域电压和时域电流的乘积。有时瞬时功率是非常有用的，因为对器件而言，为了保证其安全工作或者工作在可用的范围内，其上的最大功率值是受限的。比如，当峰值功率超过限定值后，晶体管和真空管放大器都会产生失真的输出，从而导致扬声器发出失真的声音。但是，我们对瞬时功率感兴趣的原因是它提供了计算另一个重要的物理量（即平均功率）的方法。就像跨乡村旅游时描述行进过程的最佳参量是平均速度一样，我们对瞬时速度的关注只是为了避免使最大速度超过限定而带来的危险或招来高速公路巡警。

实际问题中涉及的平均功率数值小到零点几个皮瓦的来自外太空的遥测信号，大到高保真音响系统中输送给扬声器的几瓦功率，再到早晨咖啡壶所需要的几百瓦的功率，甚至大到大峡谷水电站产生的100亿瓦的电力。我们知道，其实平均功率的概念也是有局限的，特别是在处理电抗负载和电源交换能量的时候，不过一旦引入电力上用到的一些概念将有助于问题的解决，这些概念包括：无功功率、复功率和功率因数。

11.1　瞬时功率

任何元件上的瞬时功率等于其上的瞬时电压与瞬时电流的乘积（假设符合无源符号规则），即[①]

$$p(t) = v(t)i(t) \qquad [1]$$

如果是电阻元件 R，那么功率可以只用电压或电流表示：

---

① 先前用小写的斜体字表示的变量是时间的函数，到现在为止一直遵守这个约定。但在本章中，为了强调这些变量是在某些特定的时段测得的，我们将明显标注与时间的关系。

$$p(t)=v(t)i(t)=i^2(t)R=\frac{v^2(t)}{R} \tag{2}$$

对纯电感元件，考虑到其上的电压和电流关系，可得

$$p(t)=v(t)i(t)=Li(t)\frac{di(t)}{dt}=\frac{1}{L}v(t)\int_{-\infty}^{t}v(t')\,dt' \tag{3}$$

其中，任意假定在 $t=-\infty$ 时电压为零。对电容而言：

$$p(t)=v(t)i(t)=Cv(t)\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{C}i(t)\int_{-\infty}^{t}i(t')\,dt' \tag{4}$$

其中，电流的假设同电压。当开始讨论一般的网络时，上述只用电压或电流表示的功率公式不仅笨拙，而且没有必要，因为我们要得到的不只是电压或电流，而是两者兼得。举个例子，考虑串联 *RL* 电路，如图 11.1 所示，激励源是阶跃电压源，我们熟悉的电流响应为

$$i(t)=\frac{V_0}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})u(t)$$

则电源提供的总功率或者无源网络吸收的总功率为

$$p(t)=v(t)i(t)=\frac{V_0^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})u(t)$$

图 11.1　负载 R 上的瞬时功率 $p_R(t)=i^2(t)R=(V_0^2/R)(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})^2u(t)$

由于单位阶跃函数的平方还是它自己，所以提供给电阻的功率为

$$p_R(t)=i^2(t)R=\frac{V_0^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})^2u(t)$$

为了确定电感吸收的功率，首先求解电感两端的电压：

$$\begin{aligned}v_L(t)&=L\frac{di(t)}{dt}\\&=V_0\mathrm{e}^{-Rt/L}u(t)+\frac{LV_0}{R}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})\frac{du(t)}{dt}\\&=V_0\mathrm{e}^{-Rt/L}u(t)\end{aligned}$$

因为当 $t>0$ 时，$du(t)/dt$ 为零，并且当 $t=0$ 时，$(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$ 也为零，因此电感吸收的功率为

$$p_L(t)=v_L(t)i(t)=\frac{V_0^2}{R}\mathrm{e}^{-Rt/L}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})u(t)$$

只需几步代数运算，即可证明：

$$p(t)=p_R(t)+p_L(t)$$

它可以用来验证上述推导是否正确，结果已在图 11.2 中画出。

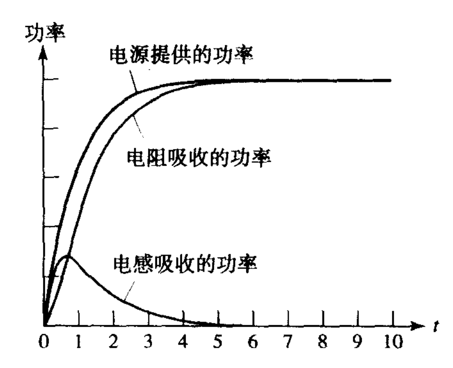


图 11.2 $p(t)$, $p_R(t)$和$p_L(t)$的波形。当瞬态过程结束后，电路回到稳态。由于电路中唯一的电源是直流源，电感最终呈现短路特性，因而吸收功率为零

正弦激励下的功率

将图 11.1 中的激励源改成正弦激励源 $V_m\cos\omega t$。我们熟悉的时域稳态响应为

$$i(t) = I_m\cos(\omega t+\phi)$$

其中，

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad 和 \qquad \phi = -\arctan\frac{\omega L}{R}$$

正弦稳态时激励源提供给整个电路的功率为

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m\cos(\omega t+\phi)\cos\omega t$$

利用三角函数转换公式，很容易将两个三角函数的积写成

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t+\phi)+\cos\phi]$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\cos\phi + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t+\phi)$$

最后的公式有一些特点，这些特点对一般正弦稳态电路都适用。式中第1项不是时间的函数；第2项是周期函数，其频率是激励信号的两倍。它还是正弦波，由于正弦波和余弦波的平均值等于零（整数个积分周期内的平均），因此该例表明：平均功率等于$\frac{1}{2}V_m I_m\cos\phi$；后面将会讲到，事实确实如此。

例题 11.1 40 + 60$u(t)$ V 的电压源和 5 μF 电容及 200 Ω 电阻串联连接。求 $t = 1.2$ ms 时电容以及电阻所吸收的功率。

解： 在 $t = 0^-$ 时，电路中没有电流，电容两端的电压等于 40 V。在 $t = 0^+$ 时，加在串联电容和电阻上的电压跳变到 100 V。由于电容两端的电压不能突变，因此电阻上的电压在 $t = 0^+$ 时等于 60 V；

$t = 0^+$ 时流过所有元件的电流等于 60/200 = 300 mA；$t > 0$ 时的电流为

$$i(t) = 300e^{-t/\tau}\ \text{mA}$$

其中，$\tau = RC = 1$ ms。因此 $t = 1.2$ ms 时电流为 90.36 mA，此时电阻吸收的功率为

$$i^2(t)R = 1.633\ \text{W}$$

电容吸收的瞬时功率等于 $i(t)v_C(t)$。由于 $t>0$ 之后加在这两个元件两端的总电压始终是100 V，而电阻上的电压为 $60e^{-t/\tau}$，因此，

$$v_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

可以求得 $v_C(1.2\ \text{ms}) = 100 - 60e^{-1.2} = 81.93$ V。则 $t = 1.2$ ms 时电容吸收的功率为(90.36 mA)(81.93 V) = 7.403 W。

练习

11.1　电流源 12 cos 2000*t* A 和 200 Ω 电阻及 0.2 H 电感串联连接。假设满足稳态条件，求 $t=$ 1 ms 时下列元件所吸收的功率：(a) 电阻；(b) 电感；(c) 正弦电源。

答案：13.98 kW；−5.63 kW；−8.35 kW。

11.2　平均功率

当我们谈到瞬时功率的平均值时，求平均的积分区间必须具有明确的定义。首先选择一般的时间区间 t_1 到 t_2，然后将 $p(t)$ 从 t_1 积分到 t_2，再除以时间间隔 $t_2 - t_1$，即

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt \qquad [5]$$

平均值用大写字母 P 表示。它不是时间的函数，也不需要采用任何下标来特别指明该参数，但它是时间积分区间起止时间 t_1 和 t_2 的函数。假如 $p(t)$ 是周期函数，P 和特定积分区间的依赖关系有比较简单的形式，我们首先分析这种情况。

周期波形的平均功率

假设激励函数和电路响应均是周期性的，虽然未必是正弦稳态，但是符合稳态条件。数学上定义周期函数为

$$f(t) = f(t+T) \qquad [6]$$

其中，T 是周期。现在证明用式[5]表示的瞬时功率在一个周期内的均值和积分的起始时间无关。

图 11.3 所示是一个周期函数 $p(t)$ 的波形。首先计算积分区间为从 t_1 到 t_2 这个周期内的均值，这里，$t_2 = t_1 + T$：

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p(t)\,dt$$

然后对另外一段时间 t_x 到 $t_x + T$ 求积分：

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt$$

从图解中可以看到这两个积分是相等的，因为周期性曲线所包含的两个区域面积是相等的。因此平均功率的计算就是将瞬时功率在任何一个周期段内积分再除以该周期。

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_x+T} p(t)\,dt \qquad [7]$$

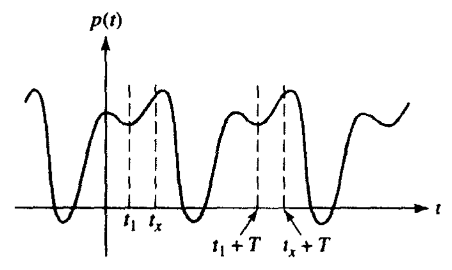


图 11.3　周期函数 $p(t)$ 在任何一个周期 T 内的平均值都等于 P

需要说明的是：积分区间可以是整数个周期，只要被除的时间段也是相同的整数个周期即可，即

$$P = \frac{1}{nT}\int_{t_x}^{t_x+nT} p(t)\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{8}$$

如果将这一概念应用到整个时间段上进行无限积分，将得到另外一个结果。首先取对称的积分限：

$$P = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

然后将积分边界 n 取成无限：

$$P = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{nT/2} p(t)\,dt$$

只要$p(t)$是一个完美的数学函数，就像所有的实际激励函数和响应函数那样，那么一个很大的整数n被一个更大的非整数取代后，积分值和均值P的变化是可以忽略的，而且n越大，误差越小。这里不做严格的证明，将离散变量nT用连续变量τ替代：

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t)\,dt \tag{9}$$

我们发现有些周期函数在“无限域”上的积分有其便利的一面，下面是应用式[7]、式[8]和式[9]的例子。

参见图 11.4(a)所示的锯齿波周期函数，这是电阻R上流过的电流波形，计算该电流在电阻R上产生的平均功率。由波形可得

$$i(t) = \frac{I_m}{T}t, \qquad 0 < t \leqslant T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T}(t - T), \qquad T < t \leqslant 2T$$

并且

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2 R t^2, \qquad 0 < t \leqslant T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2}I_m^2 R (t - T)^2, \qquad T < t \leqslant 2T$$

如图 11.4(b)所示，在最简单的一个周期内积分，即从$t = 0$到$t = T$，得到

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2}t^2\,dt = \frac{1}{3}I_m^2 R$$

如果选择其他的积分区间，比如从$t = 0.1T$到$t = 1.1T$，将得到一致的结果。若积分区间从 0 到 $2T$ 且同时除以 $2T$ ——即应用等式[8]，令$n = 2$，$t_x = 0$，则也会得到相同的结果。

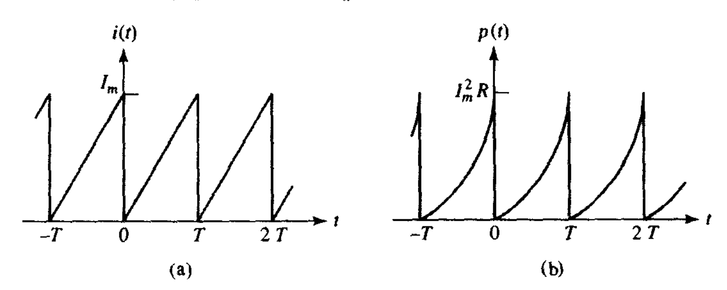


图 11.4 (a) 锯齿电流波形；(b) 在电阻R上产生的瞬时功率波形

正弦稳态下的平均功率

现在讨论正弦稳态情况下的一般结论。假设正弦电压的一般表达式为

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

电流为

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

相应元件上的瞬时功率为

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

将上述两个余弦函数的乘积项表示为和角余弦与差角余弦之和的一半：

$$p(t) = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \qquad [10]$$

说明：前面曾讲过 $T = 1/f = 2\pi/\omega$。

通过对结果进行观察可以免去一些积分工作。第 1 项是常数，与时间 t 无关；剩下的那一项是余弦函数，表明 $p(t)$ 也是周期函数，周期为 $\frac{1}{2}T$。注意，T 是给定的电压和电流的周期，而不是功率的周期，功率的周期是 $\frac{1}{2}T$。但是如果需要，求平均值时的积分区间可以是一个 T，但必须除以 T。我们知道余弦和正弦函数在一个周期内的均值等于零，所以不需要对式[10]进行积分，而是通过观察即可得到第 2 项在一个周期 T 内（或 $\frac{1}{2}T$）的均值等于零，而第 1 项常数项的均值即为其本身，因此，

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \qquad [11]$$

这个结论很重要，我们曾在前一节针对特定电路介绍过，但它同样适用于一般的正弦稳态电路。即平均功率等于三者乘积的一半：电压峰值、电流峰值、电压与电流相位差的余弦值。这里的相位差没有特别的意义。

例题 11.2 给定时域电压 $v = 4\cos(\pi t/6)$ V，阻抗 $\mathbf{Z} = 2\underline{/60^\circ}\ \Omega$ 上的相量电压 $\mathbf{V} = 4\underline{/0^\circ}$ V，求平均功率和阻抗上的瞬时功率。

相量电流为 $\mathbf{V}/\mathbf{Z} = 2\underline{/-60^\circ}$ A，平均功率为

$$P = \tfrac{1}{2}(4)(2)\cos 60^\circ = 2\ \text{W}$$

时域电压为

$$v(t) = 4\cos\frac{\pi t}{6}\ \text{V}$$

时域电流为

$$i(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ\right)\text{A}$$

瞬时功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= 8\cos\frac{\pi t}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ\right) \\ &= 2 + 4\cos\left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ\right)\text{W} \end{aligned}$$

将三者随时间变化的曲线画在同一个时间轴上，如图 11.5 所示。从图上很容易看出 2 W 的平均功率以及 6 s 的周期（电流或电压周期的一半），且电压或者电流过零时必定对应瞬时功率等于零。

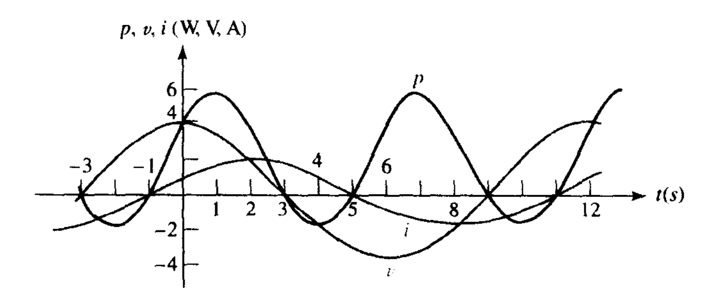


图 11.5 简单电路上的 $v(t)$、$i(t)$和 $p(t)$的时间波形。向量电压 $\mathbf{V} = 4\angle 0°$ V 加在阻抗 $\mathbf{Z} = 2\angle 60°\ \Omega$ 上，工作频率 $\omega = \pi/6$ rad/s

练习

11.2 给定相量电压 $\mathbf{V} = 115\sqrt{2}\angle 45°$ V，加在阻抗 $\mathbf{Z} = 16.26\angle 19.3°\ \Omega$ 上，求瞬时功率的表达式。若 $\omega = 50$ rad/s，计算平均功率。

答案：767.5 + 813.2 cos (100t + 70.7°) W；767.5 W。

这里有两种特殊情况值得考虑：理想电阻获得的平均功率，以及理想电抗（仅含电容和电感的电路组合）获得的平均功率。

理想电阻吸收的平均功率

纯电阻上的电流相量及其上的电压相量之间没有相位差，所以，

$$P_R = \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos 0 = \tfrac{1}{2}V_m I_m$$

或者

$$P_R = \tfrac{1}{2}I_m^2 R \qquad [12]$$

或者

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \qquad [13]$$

最后两个公式非常重要，它们可以用来确定正弦电压或电流在纯电阻上产生的平均功率。遗憾的是它们经常被误用。常见的错误是式[13]中的电压不是电阻上的电压。只要注意式[12]中的电流是流过电阻上的电流、式[13]中的电压是电阻两端的电压，则结果一定会令人满意。当然，不要忘记系数 1/2。

说明：我们现在计算的是正弦激励源提供给负载的平均功率，注意不要和瞬时功率相混淆，因为它们的形式相似。

纯电抗吸收的平均功率

任何纯电抗元件（不含电阻）吸收的平均功率恒等于零，因为纯电抗元件上的电压和电流相位差等于 90°，所以 $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90° = 0$，因此，

$$P_X = 0$$

由理想电容和电感组成的网络吸收的平均功率也等于零，但瞬时功率只在特定的时刻才等于零，因此在整个周期的某个时间段流进网络的功率必定等于在另一时间段流出网络的功率，所以没有功率损耗。

例题 11.3　电流 $\mathbf{I} = 5\underline{/20^\circ}$ A 流过阻抗 $\mathbf{Z}_L = 8 - j11\ \Omega$，求电流提供的平均功率。

解： 利用式[12]可以很快得到结果。只有 8 Ω 电阻需要计算平均功率，因为 $j11\ \Omega$ 的元件吸收的平均功率等于零，因此

$$P = \tfrac{1}{2}(5^2)8 = 100 \text{ W}$$

练习

11.3　电流 $\mathbf{I} = 2 + j5$ A 流过阻抗 $6\underline{/25^\circ}\ \Omega$，计算该阻抗上获得的平均功率。

答案： 78.85 W。

例题 11.4　求图 11.6 所示电路中 3 个无源元件吸收的平均功率，并计算两个激励源提供的平均功率。

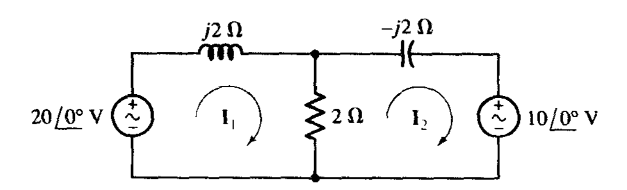


图 11.6　正弦稳态情况下，电抗元件上的平均功率等于零

不需要对电路进行分析，我们就能够得到两个电抗元件吸收的平均功率等于零的结论。

电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的值可以通过多种方法计算得到，比如网孔分析法、节点分析法或者叠加定理，其数值为

$$\mathbf{I}_1 = 5 - j10 = 11.18\underline{/-63.43^\circ} \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 5 - j5 = 7.071\underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

向下流过 2 Ω 电阻的电流为

$$\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = -j5 = 5\underline{/-90^\circ} \text{ A}$$

即 $I_m = 5$ A。式[12]是计算电阻上吸收的平均功率的最简单的方法：

$$P_R = \tfrac{1}{2}I_m^2 R = \tfrac{1}{2}(5^2)2 = 25 \text{ W}$$

该值经得起式[11]和式[13]的检验。现在讨论左边的激励源。电压 $20\underline{/0^\circ}$ V 和相关电流 $\mathbf{I}_1 = 11.18\underline{/-63.43^\circ}$ A 满足有源符号规则，所以该激励源所提供的平均功率为

$$P_{\text{left}} = \tfrac{1}{2}(20)(11.18)\cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

采用同样的方法，根据无源符号规则计算右边的激励源提供的平均功率为

$$P_{\text{right}} = \tfrac{1}{2}(10)(7.071)\cos(0^\circ + 45^\circ) = 25 \text{ W}$$

因为 50 = 25 + 25，从而验证了功率关系。

练习

11.4 电路如图11.7所示，计算每一个无源元件所获得的平均功率，通过计算两个电源所提供的功率对答案进行验证。

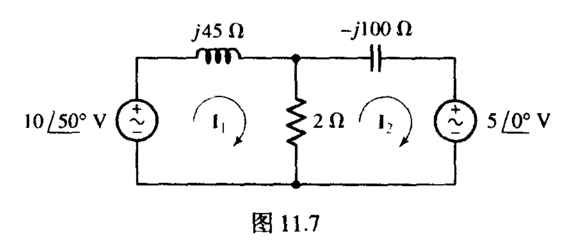


图11.7

答案：0，37.6 mW，0，42.0 mW，−4.4 mW。

最大功率传输

前面讨论的最大功率传输原理应用于电阻负载和电阻性源阻抗。若将戴维南电源$\mathbf{V}_{th}$和阻抗$\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$连接到负载$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$，可以证明当$R_L = R_{th}$，$X_L = -X_{th}$，即$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$时，提供给负载的功率最大。这一结论经常被称为正弦稳态最大功率传输定理：

> 一个与阻抗$\mathbf{Z}_{th}$相串联的独立电压源或者一个与阻抗$\mathbf{Z}_{th}$相并联的独立电流源与负载相连，当负载阻抗$\mathbf{Z}_L$等于$\mathbf{Z}_{th}$的复共轭（即$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$）时，电源提供给负载阻抗$\mathbf{Z}_L$的平均功率最大。

说明： 符号$\mathbf{Z}^*$表示复数$\mathbf{Z}$的复共轭。形式为所有的j用“$-j$”代替。细节可参阅附录5。

证明的细节留做习题11。图11.8所示的简单回路有助于理解基本分析方法。戴维南等效阻抗$\mathbf{Z}_{th}$可以写成两部分之和：$R_{th} + jX_{th}$；负载阻抗$\mathbf{Z}_L$同样可写成两部分之和：$R_L + jX_L$。回路电流为

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$

$$= \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{\mathbf{V}_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

和

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{th}\frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_{th} + \mathbf{Z}_L}$$

$$= \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \mathbf{V}_{th}\frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

电流$\mathbf{I}_L$的幅值为

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

相角为

$$\angle\mathbf{V}_{th} - \arctan\left(\frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L}\right)$$

同样，电压$\mathbf{V}_L$的幅值为

$$\frac{|\mathbf{V}_{th}|\sqrt{R_L^2+X_L^2}}{\sqrt{(R_{th}+R_L)^2+(X_{th}+X_L)^2}}$$

相角为

$$\angle \mathbf{V}_{th}+\arctan\left(\frac{X_L}{R_L}\right)-\arctan\left(\frac{X_{th}+X_L}{R_{th}+R_L}\right)$$

利用式[11]可以求得提供给负载 $\mathbf{Z}_L$ 的平均功率 P 的表达式为

$$P=\frac{\frac{1}{2}|\mathbf{V}_{th}|^2\sqrt{R_L^2+X_L^2}}{(R_{th}+R_L)^2+(X_{th}+X_L)^2}\cos\left(\arctan\left(\frac{X_L}{R_L}\right)\right) \quad [14]$$

为了证明最大平均功率确实在 $\mathbf{Z}_L=\mathbf{Z}_{th}^*$ 时得到，我们需要分两步进行。第一步，令式[14]对 R_L 的导数必须等于零；第二步，令式[14]对 X_L 的导数也必须等于零。详细证明留做习题。

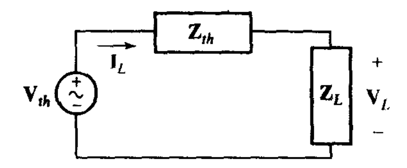


图 11.8　推导最大功率传输定理的简单回路，电路工作在正弦稳态情况下

例题 11.5　一串联电路由正弦电压源 $3\cos(100t-3°)$ V、500 Ω 电阻、30 mH 电感以及一个未知阻抗组成。若已知激励源向未知阻抗提供的是最大平均功率，求该未知阻抗的值。

解： 电路的相量形式如图 11.9 所示，容易发现未知阻抗 $\mathbf{Z}_?$ 与 $3\angle -3°$ V 电源和 $500+j3$ Ω 阻抗构成的戴维南等效激励源相串联。

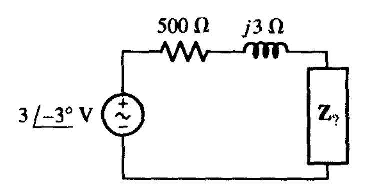


图 11.9　简单串联电路的相量表示，电路由正弦电压源、电阻、电感和未知阻抗串联而成

因为图 11.9 所示电路已经具有求解最大平均功率传输的形式，所以很容易得到激励源能够向 $\mathbf{Z}_{th}$ 的复共轭提供最大平均功率，即

$$\mathbf{Z}_?=\mathbf{Z}_{th}^*=500-j3\ \Omega$$

该阻抗可以有多种组成方式：500 Ω 的电阻和 $-j3$ Ω 电容的串联是最简单的形式。因为工作频率是 100 rad/s，因此相应的电容是 3.333 mF。

练习

11.5　如果例题 11.5 中 30 mH 的电感被 10 μF 的电容取代，且已知未知阻抗 $\mathbf{Z}_?$ 吸收的是最大平均功率，那么 $\mathbf{Z}_?$ 的感性部分的电感值是多少？

答案： 10 H。

非周期函数的平均功率

我们需要关注非周期函数。典型的非周期功率函数的例子是求解指向“射电星”的射电望远镜输出功率的平均值。另一种情况是几个周期函数相加，每一个函数的周期不同且找不到共同的周期，比如，

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \qquad [15]$$

这是一个非周期函数，因为两个正弦函数的周期之比是无理数。$t = 0$ 时，这两项都等于零且有增加的趋势，但第一项只有当 $t = 2\pi n$ 时才等于零，其中 n 是整数，周期性要求 πt 或者 $\pi(2\pi n)$ 必须等于 $2\pi m$，而 m 也是一个整数。显然，该方程是无解的（m 和 n 都是整数）。这里需要对非周期函数（即式[15]）和周期函数（即式[16]）的比较做一些解释：

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \qquad [16]$$

其中，3.14 是精确的小数表示，不是对 3.141 592...的诠释。稍微花些功夫①即可证明：电流函数的周期等于 100π s。

不管是式[16]的周期函数，还是式[15]的非周期函数，求 1 Ω 电阻上获得的平均功率都需要在无限积分区间上对功率函数进行积分。大量的实际积分是可以避免的，因为我们具备求解简单函数平均值的知识。因此将式[15]的电流表达式代入式[9]中可得

$$P = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2\sin t \sin \pi t)\, dt$$

可以认为 P 是 3 个均值之和。$\sin^2 t$ 在无限积分区间上的平均值可用（$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 t$）取代 $\sin^2 t$ 求得，则平均值为$\frac{1}{2}$，同样，$\sin^2 \pi t$ 的平均值也等于$\frac{1}{2}$，最后一项可以看成是两个余弦函数的和，而每一个余弦函数的平均值都等于零，因此，

$$P = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

对周期函数（即式[16]）的计算可得到与之相符的结果。将上述方法应用到由多个不同周期、幅值任意的正弦函数相加而成的电流函数上，即

$$i(t) = I_{m1}\cos\omega_1 t + I_{m2}\cos\omega_2 t + \cdots + I_{mN}\cos\omega_N t \qquad [17]$$

则提供给负载电阻 R 的平均功率为

$$P = \tfrac{1}{2}\left(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \cdots + I_{mN}^2\right)R \qquad [18]$$

即使每一项电流的相位是任意的，结论也不会改变。推导如此重要结论的步骤非常简单：对电流函数进行平方、积分、求极限。同样，结论本身也相当简单，因为可以看出：对式[17]的特殊电流，每一项的频率都不相同，但功率是满足叠加定理的。然而叠加定理不适用于两个直流电流的和，也不适用于相同频率的两个正弦电流的和。

例题 11.6 电流 $i_1 = 2\cos 10t - 3\cos 20t$ A 流过 4 Ω 电阻，求电流提供的平均功率。

解： 由于这是两个不同频率的正弦项，因此可以分别求出两项的平均值，然后相加，从而可计算出 4 Ω 电阻上的平均功率为：$\frac{1}{2}\times(2^2)\times 4 + \frac{1}{2}\times(3^2)\times 4 = 8 + 18 = 26$ W。

① $T_1 = 2\pi$ 和 $T_2 = 2\pi/3.14$。求解整数 m 和 n，使得 $2\pi n = 2\pi m/3.14$，或者 $3.14n = m$，亦或者 $\frac{314}{100}n = m$，或 $157n = 50m$，则最小的 $n = 50$，$m = 157$。这时周期 $T = 2\pi n = 100\pi$，或者 $T = 2\pi(157/3.14) = 100\pi$ s。

例题 11.7　电流 $i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t$ A 流过 4 Ω 电阻，求电流提供的平均功率。

解：这里，电流的两个组成项具有相同的频率，因此必须先组合成该频率下单一的正弦项，即：$i_2 = 2\cos 10t - 3\cos 10t = -\cos 10t$。由于只有这一项电流流过 4 Ω 电阻，因此它所提供的平均功率为 $\frac{1}{2}\times(1^2)\times 4 = 2$ W。

练习

11.6　电压源 v_s 连接在 4 Ω 电阻上，求该电阻所吸收的平均功率，设电压源的值分别为：(a) $8\sin 200t$ V; (b) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°)$ V; (c) $8\sin 200t - 4\sin 100t$ V; (d) $8\sin 200t - 6\cos(200t - 45°) - 5\sin 100t + 4$ V。

答案：8.00 W；4.01 W；10.00 W；11.14 W。

11.3　电流和电压的有效值

在北美，大多数电源插座提供频率为 60 Hz、电压值为 115 V（有些地方是典型的 50 Hz，240 V）的电压。"115 V" 到底是什么意思呢？它肯定不是瞬时值，因为电压不是常数；它也不是用 V_m 表示的幅度值；如果我们用示波器显示来自于电源插座的电压波形的话，会发现电压的幅度值等于 $115\sqrt{2}$，即 162.6 V。显然，它也不符合平均值 115 V 的概念，因为正弦波形的平均值等于零。我们发现对正弦函数的正半周或负半周求平均将得到较为接近的数值，因为如果用整流型电压表测量电源插座的交流电压，则读数是 103.5 V。可见 115 V 是正弦电压的有效值，它是电压源向电阻负载提供功率的有效性的度量。

周期波形的有效值

让我们任意选择电流来定义电流波形的有效值，当然，选择电压也可以。任何周期电流的有效值等于某个直流电流，该直流电流在电阻 R 上产生的平均功率与周期电流在这个电阻上产生的平均功率相等。

换句话说，我们让周期电流流过电阻 R，得到瞬时功率 i^2R，然后求 i^2R 在一个周期内的平均值。接下来使一个直流电流流过相同的电阻，调整直流电流的值，使电阻上获得相同的平均功率，这时直流电流的幅度就是周期电流的有效值。图 11.10 很好地说明了这个概念。

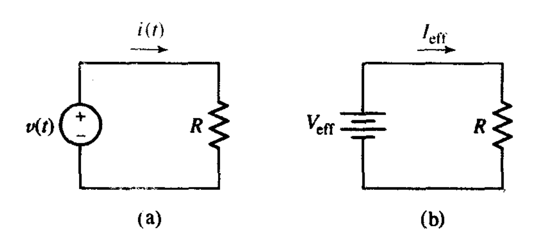


图 11.10　如果电阻在(a)和(b)中获得相同的平均功率，那么 $i(t)$ 的有效值等于 I_{eff}，$v(t)$ 的有效值等于 V_{eff}

现在可以很容易地得到电流有效值的通用数学表达式。周期电流 $i(t)$ 在电阻上产生的平均功率为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

其中，T是电流$i(t)$的周期。直流电流在该电阻上产生的功率为

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

令两个表达式相等，解出I_{eff}:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} \qquad [19]$$

结果和电阻R无关，这与上面所述的概念是吻合的。分别用v和V_{eff}替换i和I_{eff}可以得到周期电压有效值的类似表达式。

注意，求有效值的第一步是对时间函数取平方，然后求平方函数在一个周期内的平均值，最后对均值求平方根函数。简单地说，求解有效值的过程就是对平方函数的平均值取平方根，因此，有效值通常也称为均方根值，或简称rms值。

正弦波形的有效值

正弦波形是一种重要的特殊情况。我们选择正弦电流为

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

将电流代入式[19]，求得有效值为

$$\begin{aligned}
I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t + \phi)\,dt} \\
&= I_m\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + 2\phi)\right]dt} \\
&= I_m\sqrt{\frac{\omega}{4\pi}[t]_0^{2\pi/\omega}} \\
&= \frac{I_m}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

正弦电流的有效值是与相角无关的实数，其数值等于电流幅度值乘以$1/\sqrt{2} = 0.707$倍，所以电流$\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ A的有效值为1 A，它提供给任何电阻的平均功率与直流电流1 A提供的平均功率相同。

需要特别小心的是：求$\sqrt{2}$周期电流有效值用到的系数只适用于正弦函数，对于图11.4所示的锯齿波函数，其有效值等于电流的最大值除以$\sqrt{3}$。在求有效值时所用到的除以最大值的系数取决于给定周期函数的数学形式，它既可以是有理数，也可以是无理数，具体由函数的性质决定。

利用有效值计算平均功率

利用有效值计算平均功率时只需对正弦电压或电流计算平均功率的表达式稍做简化即可，即去掉系数$\frac{1}{2}$。比如，正弦电流在负载电阻R上产生的平均功率为

$$P = \tfrac{1}{2}I_m^2 R$$

因为$I_{\text{eff}} = I_m/\sqrt{2}$，所以平均功率可以写成

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \qquad [20]$$

其他计算功率的表达式也可以用有效值改写为

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi) \qquad [21]$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \qquad [22]$$

说明：利用等效直流量定义有效值的事实给我们提供了计算电阻电路平均功率的公式，这些公式与直流分析得到的公式相同。

虽然我们成功地去掉了计算平均功率表达式中的系数$\frac{1}{2}$，但是我们在确定给出的正弦量是用幅度表示还是用有效值表示时必须格外小心。在实际中，有效值通常用在功率传输或分配以及旋转电机领域，而在电子学和通信领域往往使用幅度值。除非明显使用术语“有效值”或是特别指出，这里一般采用幅度值。

正弦稳态下，相量电压和电流既可以用有效值也可以用幅度值给出，两者的区别仅体现在系数$\sqrt{2}$上。比如，如果电压 $50\underline{/30^\circ}$ V 用幅度值表示，那么 $35.4\underline{/30^\circ}$ V rms 则表示相同电压的有效值。

多频电路的有效值

为了计算由多个不同频率的正弦波相加而成的周期或非周期波形的有效值，我们利用 11.2 节推导的适合计算平均功率的式[18]，并用有效值重写为

$$P = \left(I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \cdots + I_{N\text{eff}}^2\right) R \qquad [23]$$

从中可以看出，由不同频率的正弦函数组成的电流的有效值可以表示为

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \cdots + I_{N\text{eff}}^2} \qquad [24]$$

结果说明：如果正弦电流是 60 Hz，5 A rms，流过 2 Ω 电阻，那么该电阻吸收的平均功率等于 $5^2(2) = 50$ W；如果第二个电流（可能是 120 Hz，3 A rms）同时流过该电阻，那么电阻吸收的总平均功率就是 $3^2 \times (2) + 50 = 68$ W。利用式[24]，求得 60 Hz 和 120 Hz 电流之和的有效值为 5.831 A，那么产生的平均功率应该为 $P = 5.831^2(2) = 68$ W，该结果与先前得到的结果一致。但是，如果第二个电流还是 60 Hz 的频率，那么两个电流之和的有效值可以是从 2 A 到 8 A 之间的任何数值，电阻吸收的功率是 8 W 到 128 W 之间的任何值，具体取决于这两个电流分量之间的相对相位。

说明：注意直流量 K 的有效值就是 K，不是 $K/2$。

练习

11.7　计算下列各周期电压的有效值：(a) $6\cos 25t$；(b) $6\cos 25t + 4\sin(25t + 30^\circ)$；(c) $6\cos 25t + 5\cos^2(25t)$；(d) $6\cos 25t + 5\sin 30t + 4$ V。

答案：4.24 V；6.16 V；5.23 V；6.82 V。

计算机辅助分析

PSpice提供了计算功率的几种有用方法。特别是Probe的内置函数允许用户既可以画出瞬时功率的波形，又可以计算出平均功率。作为例子，参见图 11.11，这是一个简单的分压电路，是一个激励源是 60 Hz、幅度为 $115\sqrt{2}$ V 的正弦波。现在开始进行电压波形在一个周期内（$\frac{1}{60}$ s）的瞬态仿真。

与瞬时功率相对应的电阻 R1 上流过的电流波形如图 11.12 所示，这是在 Plot 菜单下执行 Add Plot to Window 选项后得到的。瞬时功率是周期性的，具有非零平均值，峰值是 6.61 W。

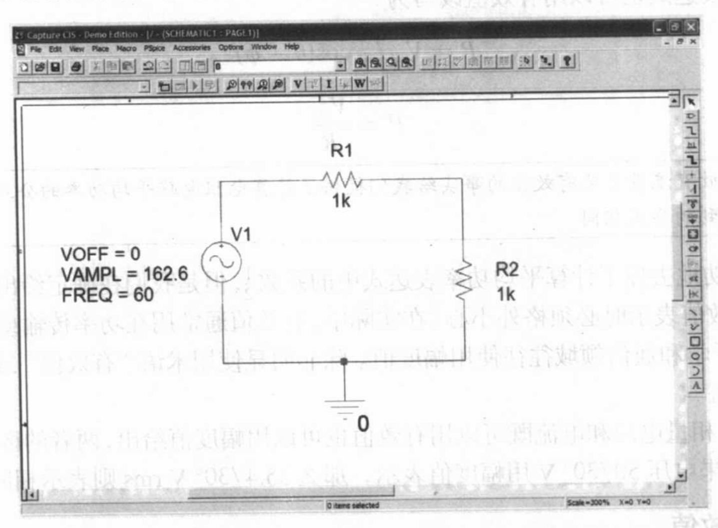


图 11.11　60 Hz，115 V rms 电压源激励的简单分压电路

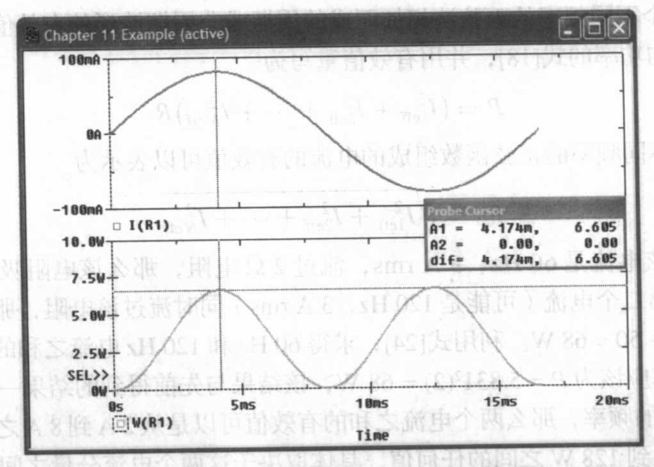


图 11.12　图 11.11 所示电路中电阻 R1 上的电流及瞬时功率的波形

利用Probe得到平均功率是比较容易的方法，即利用内置的“求平均”函数。预计平均功率的值等于$\frac{1}{2}(162.6\frac{1000}{1000+1000})(81.3\times10^{-3}) = 3.305$ W。一旦 Add Traces 对话框出现（Trace，⊨ Add Trace...），即可在 Trace Expression 窗口内键入

AVG(I(R1)*I(R1)*1000)

从图 11.13 中可见，一个或两个周期内的平均功率都等于 3.305 W，该结果与手工计算所得结果相同。

Probe还提供了在特定区域内求平均的方法，此时需要采用内置函数avgx。如果用该函数计算一个周期内的平均功率，本例的情况是 1/120 = 8.33 ms，我们需要键入

AVGX(I(R1)*I(R1)*1000, 8.33 m)

两种方法在曲线终点得到的结果都是同一个值—— 3.305 W。

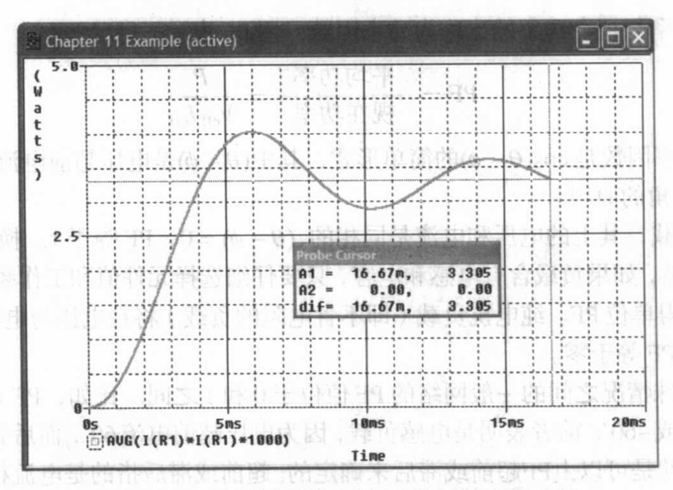


图 11.13　计算得到的电阻 R1 消耗的平均功率

11.4　视在功率和功率因数

视在功率和功率因数的概念可以追溯到电力工业系统，其大量的电力能源需要从一个地方传输到另一个地方，传输效率将直接关系到最终由用户支付的电能费用。提供负载的用户在相当低的传输效率下必须以更高的价格支付他们实际接收和使用的每千瓦小时的电费。同样，如果用户要求电力公司在传送和配电设备方面投入更多，也要为每千瓦小时付出更多的钱，除非公司是乐善好施的。

我们首先定义视在功率和功率因数，然后简单说明这些术语如何与前面提到的经济情况相关联。假设正弦电压为

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

将该电压加在网络两端，产生的相应电流为

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

电压相位超前电流相位（$\theta - \phi$）。假设在网络输入端符合无源符号规则，则提供给网络的平均功率用最大值表示为

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

或者用有效值表示为

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

如果施加的电压和电流响应是直流分量，则提供给网络的平均功率可以简单地用电压与电流的乘积表示。把这一方法用于正弦情况就会得到由熟悉的乘积项 $V_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$ 表示的吸收功率值，但这只是“看上去的”，因为电压和电流有效值的乘积并不是平均功率，而被定义为视在功率。从量纲上讲，视在功率与实际功率具有相同的单位，因为 $\cos(\theta - \phi)$ 是无量纲的。但为了避免混淆，视在功率用伏安或 VA 表示。由于 $\cos(\theta - \phi)$ 不可能大于 1，显然实际功率永远不可能大于视在功率值。

说明： 视在功率的概念不仅仅局限于正弦激励和响应的电路，它适用于任何电压和电流波形的电路，只要将电压和电流的有效值相乘，即可得到视在功率。

实际或平均功率与视在功率的比称为功率因数，用PF表示，即

$$\mathrm{PF}=\frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}}=\frac{P}{V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}}$$

对于正弦情况，功率因数是$\cos(\theta-\phi)$的简单形式，其中$(\theta-\phi)$是电压超前电流的相，而这也是将角度$(\theta-\phi)$称为PF角的原因。

对于纯电阻负载，其上的电压和电流是同相的，$(\theta-\phi)=0$，PF等于1。换句话说，视在功率等于平均功率。当然，如果负载含有电感和电容，只要仔细选择元件值和工作频率，使输入阻抗的相角为零，也可获得单位PF。纯电抗负载（即不含电阻的负载）将在电压与电流之间产生±90°的相位差，从而导致PF等于零。

介于这两种特殊情况之间的一般网络的PF值位于0和1之间。比如，PF = 0.5表明网络输入阻抗的相角为+60°或−60°；前者表明是电感负载，因为电压超前电流60°，而后者表明是电容负载。负载性质的不确定性是可以由PF超前或滞后来确定的。超前或滞后指的是电流相对于电压的相位，因此电感负载具有滞后PF，电容负载具有超前PF。

例题11.8 计算图11.14所示电路中每一个负载所获得的平均功率、电源所提供的视在功率以及组合负载的功率因数。

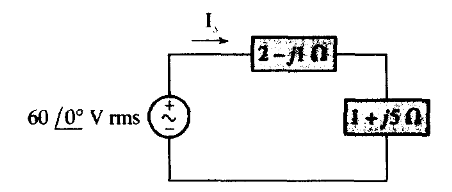


图11.14 用于求解电源提供给每个元件的平均功率、视在功率以及组合负载的功率因数的电路

解： **▶明确题目要求**

平均功率指的是负载元件中电阻部分吸收的功率，视在功率是组合负载上的电压有效值与电流有效值的乘积。

▶收集已知信息

有效电压是60 V rms，它是组合负载$2-j+1+j5=3+j4\ \Omega$上的电压。

▶设计方案

通过简单的相量分析可以求出电流。知道了电压和电流就可以计算平均功率和视在功率了，然后再由这两个量求出功率因数。

▶建立一组合适的方程

平均功率由下式求得：

$$P=V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}\cos(ang\ \mathbf{V}-ang\ \mathbf{I})$$

计算视在功率比较简单，即$V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}$。

功率因数可以通过这两个量的比值来得到：

$$\mathrm{PF}=\frac{\text{平均功率}}{\text{视在功率}}=\frac{P}{V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}}$$

▶确定是否还需要其他信息

我们需要参量I_{eff}：

$$\mathbf{I}_s = \frac{60\underline{/0^\circ}}{3+j4} = 12\underline{/-53.13^\circ}\ \text{A rms}$$

所以，$I_{eff} = 12$ A rms，$ang\ \mathbf{I}_s = -53.13^\circ$。

▶尝试求解

提供给上面负载的平均功率为

$$P_{\text{upper}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{top}} = (12)^2(2) = 288\ \text{W}$$

提供给右面负载的平均功率为

$$P_{\text{lower}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{right}} = (12)^2(1) = 144\ \text{W}$$

电源提供的视在功率为 $V_{eff} I_{eff} = (60)(12) = 720$ VA。

最后，组合负载的功率因数由其上的电压和电流确定。该功率因数等于电源的功率因数：

$$\text{PF} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6\ （滞后）$$

这是因为组合负载是感性的。

▶验证结果是否合理或是否是与预计结果相符

负载上获得的所有平均功率等于 288 + 144 = 432 W，电源所提供的平均功率为

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(ang\ \mathbf{V} - ang\ \mathbf{I}) = (60)(12)\cos(0 + 53.13^\circ) = 432\ \text{W}$$

可见能量是守恒的。

此外还可以得到组合负载的等效阻抗为 $5\underline{/53.1^\circ}\ \Omega$，53.1° 是 PF 角，所以 PF 为 cos 53.1° = 0.6（滞后）。

练习

11.8 电路如图 11.15 所示，如果 $Z_L = 10\ \Omega$，求组合负载的功率因数。

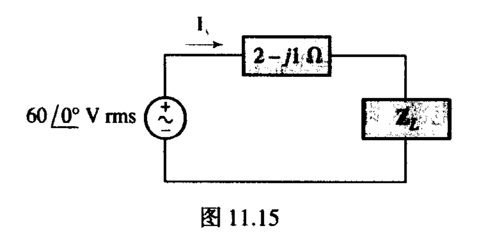


图 11.15

答案：0.9966（超前）。

11.5 复功率

如果将功率看成复数，则可以使功率计算得到一定的简化。复功率的幅值其实就是视在功率，可以证明复功率的实部就是（实）平均功率。复功率的虚部这一新物理量被称为无功功率。

定义复功率时，设一对端点上的正弦电压 $\mathbf{V}_{eff} = V_{eff}\underline{/\theta}$ 且流进一个端点的电流 $\mathbf{I}_{eff} = I_{eff}\underline{/\phi}$，它们满足无源符号规则。这时两端网络吸收的平均功率为

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

如同引入相量时所做的那样，下面利用欧拉公式引入复物理量。将 P 表示为

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \,\text{Re}\{e^{j(\theta-\phi)}\}$$

或

$$P = \text{Re}\{V_{\text{eff}} e^{j\theta} I_{\text{eff}} e^{-j\phi}\}$$

电压相量就是上式括号中前面两个因子，但是后面两个因子与电流相量并不对应，因为相角含有负号，因此不表示电流相量。电流相量应该是

$$\mathbf{I}_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\, e^{j\phi}$$

因此必须利用共轭标记：

$$\mathbf{I}^*_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\, e^{-j\phi}$$

所以，

$$P = \text{Re}\{\mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}^*_{\text{eff}}\}$$

现在可以定义复功率而使功率成为复数：

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}^*_{\text{eff}} \tag{25}$$

首先来看复功率的极坐标或指数形式：

$$\mathbf{S} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}\, e^{j(\theta-\phi)}$$

显然，$\mathbf{S}$ 的幅度 $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ 就是视在功率，而 $\mathbf{S}$ 的幅角$(\theta-\phi)$就是 PF 角（即电压超前电流的角度）。

对直角坐标形式：

$$\mathbf{S} = P + jQ \tag{26}$$

其中，P 是平均功率，同前所述。复功率的虚部用 Q 表示，称为无功功率，量纲与实功率 P、复功率 $\mathbf{S}$ 和视在功率 $|\mathbf{S}|$ 相同。为避免参量之间的混淆，Q 的单位定义为乏（缩写为 VAR）。从式[25]和式[26]可以得出

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta-\phi) \tag{27}$$

无功功率的物理解释是能量在电源（即供电公司）和负载的电抗成分（即电感和电容）之间来回流动的时间速率。电抗成分交替地充电和放电，导致电流在电源和负载之间流动。

相关物理量的总结见表 11.1。

表 11.1　与复功率有关的物理量

物理量	符号	公式	单位
平均功率	P	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta-\phi)$	瓦（W）
无功功率	Q	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta-\phi)$	乏（VAR）
复功率	$\mathbf{S}$	$P + jQ$ $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \underline{/\theta-\phi}$ $\mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}^*_{\text{eff}}$	伏安（VA）
视在功率	$\|\mathbf{S}\|$	$V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$	伏安（VA）

功率三角形

人们通常会采用图形来表示复功率，该图形称为功率三角形，如图 11.16 所示。该图形表明只要已知3个功率量中的任意两个，则可以确定第三个量。如果功率三角形位于第一象限（$\theta-\phi>0$），

则功率因数是滞后的（对应于感性负载）；如果功率三角形位于第四象限（$\theta-\phi<0$），则功率因数是超前的（对应于容性负载）。有关负载的许多定性信息在图上一目了然。

无功功率的解释参见图 11.17，这是由 $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ 和 $\mathbf{I}_{\text{eff}}$ 组成的极坐标图。将电流相量分解成两个相量：一个相量与电压相量同相，幅度为 $\mathbf{I}_{\text{eff}}\cos(\theta-\phi)$；另一个相量与电压相量成 90° 角，幅度为 $\mathbf{I}_{\text{eff}}\sin|\theta-\phi|$。由此可以清楚地知道：实功率等于电压相量的幅度和与之同相的电流相量的幅度乘积，而无功功率 Q 则等于电压相量的幅度乘以与其垂直的电流相量的幅度。通常将与某一相量垂直的部分称为正交部分，所以 Q 也等于 $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ 乘以 $\mathbf{I}_{\text{eff}}$ 的正交分量，因而也称为正交功率。

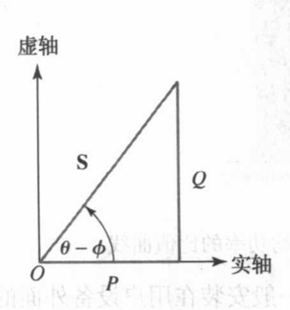


图 11.16　用功率三角形表示的复功率

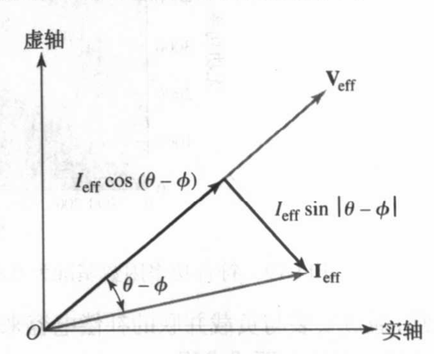


图 11.17　电流相量被分解成两个分量，一个与电压相量 $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ 同相，另一个与电压相量垂直。后者也称为正交分量

说明： 一旦确定了 $\mathbf{V}_{\text{eff}}$ 和 $\mathbf{I}_{\text{eff}}$，无功功率的符号就决定了无源负载的性质。如果负载是电感，则角度（$\theta-\phi$）为 0~90°，取正弦后为正值，且无功功率也为正值；电容负载的无功功率为负值。

功率测量

严格地说，瓦特表测量的是被负载吸收的平均实功率 P，而无功功率表测量的是被负载吸收的无功功率。这两个量通常可以用一个表测量，而且该表还能够测量视在功率和功率因数（见图 11.18）。

实际应用——功率因数的校正

当电力公司向大型工业用户提供电能时，往往在其费率表中包含一个 PF 条款。在此条款下，每当 PF 值低于规定值（一般是 0.85 滞后），用户需要支付额外的费用。很少有工业用户的功率因数是超前的，这是由典型工业负载的性质决定的。有几个原因迫使电力公司要对低 PF 值的用户收取额外的费用：首先，为了在低 PF 值时仍能够提供恒定的功率和电压，必须要把承载大电流的电容包含在发电机中；其次，传输和配电系统的损耗也在增加。

为了补偿损失和鼓励用户工作在高PF值下，电力公司根据基准值 0.62 乘以平均功率计算需求标准，在此基础之上每消耗 1 kVAR 收取罚金 0.22 美元：

$$\mathbf{S} = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62)$$
$$= P(1.177\underline{/31.8^\circ})$$



图 11.18　Amprobe 生产的钳式数字功率计，能够测量 400 A 以下的电流和 600 V 以下的电压。AMPROBE 版权所有

基准目标 PF 为 0.85 滞后，这是因为 cos 31.8° = 0.85 且 Q 为正值，其图示见图 11.19。如果用户的 PF 值低于目标值则将面临罚款。

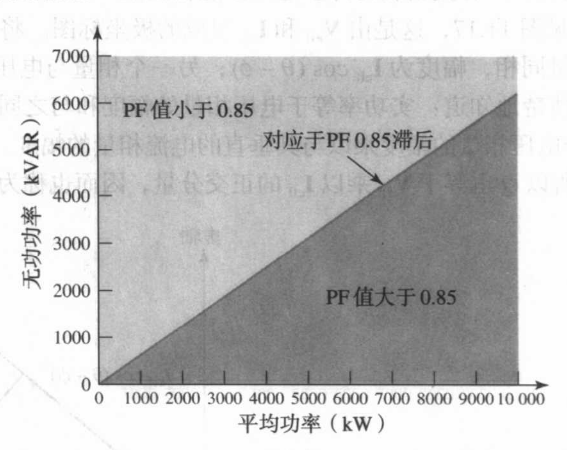


图 11.19　符合功率因数基准为 0.85 滞后的无功功率与平均功率的比值曲线

通常，通过安装与负载并联的补偿电容来调整无功功率，电容一般安装在用户设备外面的变电站。要求的电容值由下式求得：

$$C = \frac{P(\tan\theta_{\text{old}} - \tan\theta_{\text{new}})}{\omega V_{\text{rms}}^2} \tag{28}$$

其中，ω 是角频率，θ_{old} 是目前的 PF 角，θ_{new} 是目标 PF 角。为方便起见，补偿电容堆是按规定的递增率以 kVAR 容量为单位制造的。图 11.20 所示即为这样的一个安装实例。



图 11.20　安装好的补偿电容（经 Nokian 电容有限公司许可）

下面讨论一个实际的例子。某工业机器厂每月的峰值需求为 5000 kW，无功功率需求为 6000 kVAR，根据上述费率表计算该电力用户与 PF 罚款有关的年消费。如果电力公司提供电容补偿的费用为每增加 1000 kVAR 则增加 2390 美元，每增加 2000 kVAR 则增加 3130 美元，则什么方案对用户来说最为经济有效？

需要补偿的 PF 是复功率 S 的角度，这里为 5000 + j6000 kVA。角度为 arctan(6000/5000) = 50.19°，PF 为 0.64 滞后。标准无功功率值为 0.62 倍的峰值需求，即 0.62 × (5000) = 3100 kVAR，因此该厂比电力公司允许值多吸收 6000 − 3100 = 2900 kVAR 的无功功率。这表示将比普通电力花费年多花 12 × (2900) × (0.22) = 7656 美元。

如果用户选择只安装 1000 kVAR 补偿电容（消费额 2390 美元），吸收的过剩无功功率减少到 2900 - 1000 = 1900 kVAR，那么年罚款额为 12 ×(1900)×(0.22) = 5016 美元，因此这年的总消费额为 5016 + 2390 = 7406 美元，节省 250 美元。如果用户选择安装 2000 kVAR 补偿电容（消费额 3130 美元），吸收的过剩无功功率减少到 2900 - 2000 = 900 kVAR，那么年罚款额为 12 ×(900)×(0.22) = 2376 美元，因此这年的总消费额为 2376 + 3130 = 5506 美元，可见第一年就节省 2150 美元。如果用户着了迷以至于安装 3000 kVAR 的补偿电容，那么第一年只比安装 2000 kVAR 电容多花 14 美元，然而不必交罚款了。

容易证明：提供给多个相互连接的负载的复功率等于每个负载上得到的复功率之和（不管负载之间是如何连接的）。例如，图 11.21 所示的并联连接的两个负载，假设参量为有效值，则组合负载所获得的复功率为

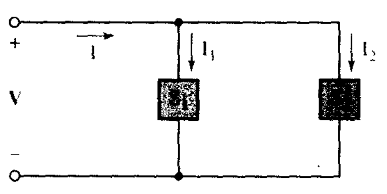


图 11.21　用于证明两个并联负载获得的复功率等于每个负载获得的复功率之和的电路

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

即

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{I}_1^* + \mathbf{V}\mathbf{I}_2^*$$

得证。

例题 11.9　一个工业用户在滞后 0.8 PF 下运行 50 kW（67.1 hp）的电感电动机。电源电压为 230 V rms。为获得较低的电力费用，用户希望将 PF 提高到 0.95 滞后。试确定一个合适的方案。

解：尽管可以在保持一定的无功功率下增加有功功率来提高 PF 值，但这不会减少用户的账单支出，因此不会使用户感兴趣。但是在系统中加入纯电抗负载并且与原负载并联，因为电感电动机上的电压不允许改变，电路如图 11.22 所示，因此该方案是可行的。这里，$\mathbf{S}_1$ 解释为电感电动机的复功率，$\mathbf{S}_2$ 为补偿器吸收的复功率。

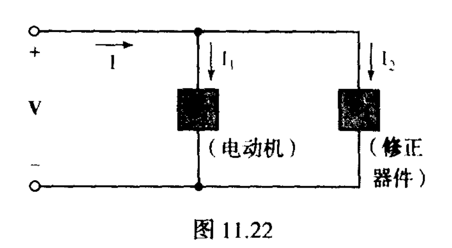


图 11.22

提供给电感电动机的复功率的实部必然是 50 kW，相角为 arccos(0.8)，即 36.9°，所以，

$$\mathbf{S}_1 = \frac{50\angle 36.9^\circ}{0.8} = 50 + j37.5\ \text{kVA}$$

为得到 0.95 的 PF 值，总复功率必须为

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{50}{0.95}\angle \arccos(0.95) = 50 + j16.43\ \text{kVA}$$

即补偿负载吸收的复功率为

$$\mathbf{S}_2 = -j21.07\ \text{kVA}$$

所需负载阻抗 $\mathbf{Z}_2$ 可简单地按下述步骤求得。设电压源的相角为零，则 $\mathbf{Z}_2$ 吸收的电流为

$$\mathbf{I}_2^* = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21\,070}{230} = -j91.6\ \text{A}$$

或者

$$\mathbf{I}_2 = j91.6\ \text{A}$$

因此，

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51\ \Omega$$

在60 Hz工作频率下，该阻抗可以由1056 μF的电容和电感电动机并联实现。但是其初始花费、维护和折旧费用必须用电费账单所节省的经费支付。

练习

11.9 电路如图11.23所示，求下列元件所吸收的复功率：(a) 1 Ω电阻；(b) $-j10\ \Omega$电容；(c) $5+j10\ \Omega$阻抗；(d) 电源。

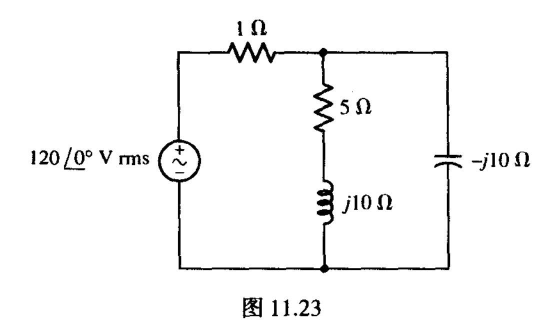


图 11.23

答案：$26.6+j0$ VA；$0-j1331$ VA；$532+j1065$ VA；$-559+j266$ VA。

11.6 功率术语的比较

本章介绍了许多功率术语，表11.2汇集了所有这些术语及其参数，并对每一个参数给出了简要描述。

表 11.2 相关术语的比较

术语	符号	单位	描述
瞬时功率	$p(t)$	W	$p(t)=v(t)i(t)$，其值表示在某个时刻的功率，它不等于电压相量和电流相量的乘积
平均功率	P	W	正弦稳态情况下，$P=\frac{1}{2}V_mI_m\cos(\theta-\phi)$，其中，$\theta$是电压的相角，$\phi$是电流的相角。电抗对$P$没有贡献
有效值或rms值	V_{rms}或I_{rms}	V或A	定义$I_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$，若$i(t)$是正弦函数，则$I_{eff}=I_m/\sqrt{2}$
视在功率	$\lvert\mathbf{S}\rvert$	VA	$\lvert\mathbf{S}\rvert=V_{eff}I_{eff}$是平均功率能够达到的最大值，$P=\lvert\mathbf{S}\rvert$只适用纯阻负载
功率因数	PF	无	平均功率与视在功率的比值：对纯阻负载，PF = 1；对纯电抗负载，PF = 0
无功功率	Q	VAR	度量能量流入和流出电抗负载的速率
复功率	$\mathbf{S}$	VA	复数量，包含平均功率P和无功功率Q：$\mathbf{S}=P+jQ$

下面的实际情况可以表明这些新术语的重要性。首先假定有一个正弦发电机，它是在其他具有力矩输出的装置（比如蒸汽涡轮、电动机或内燃机）驱动下的旋转机器。我们让发电机产生200 V rms、60 Hz的电压。此外假定发电机规定的最大功率输出为1 kW，因此发电机有能力向电阻负载提供5 A的有效值电流。可是如果连接到发电机的负载在滞后功率因数为0.5的情况下需要1 kW的功率，则必须要有10 A的有效值电流才行。随着PF值的降低，为保持负载在200 V电压

下维持 1 kW 的功率，需要提供的电流将越来越大。如果发电机是按照提供 5 A 的最大安全电流而设计的，那么过大的电流将导致不能令人满意的工作，比如导致绝缘层过热并冒烟，从而损害电机的寿命。

采用以伏安为单位的视在功率给出发电机的额定值更有价值。比如额定 1000 VA，工作电压 200 V，表明发电机可以提供的最大电流为 5 A。提供的功率取决于负载，极端情况下可能是零。在一定电压下，额定视在功率与额定电流是等价的。

练习

11.10　440 V 的 rms 电源通过总电阻为 1.5 Ω 的传输线向负载 $Z_L = 10 + j2\ \Omega$ 提供功率。求：(a) 提供给负载的平均功率和视在功率；(b) 传输线上损失的平均功率和视在功率；(c) 电源提供的平均功率和视在功率；(d) 电源工作的功率因数。

答案：14.21 kW，14.49 kVA；2.131 kW，2.131 kVA；16.34 kW，16.59 kVA；0.985 滞后。

总结和复习

- 元件吸收的瞬时功率的表达式为 $p(t) = v(t)i(t)$。
- 正弦激励源提供给某个阻抗的平均功率为 $\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta - \phi)$，其中，$\theta$ = 电压相角，ϕ = 电流相角。
- 负载的电阻部分具有非零的平均功率，负载电抗部分的平均功率恒等于零。
- 最大功率传输的条件是 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^*$。
- 正弦波形的有效值或 rms 值等于其幅度除以 $\sqrt{2}$。
- 负载的功率因数等于其所消耗的平均功率与视在功率的比值。
- 纯电阻负载的功率因数等于 1，纯电抗负载的功率因数等于 0。
- 复功率定义为 $\mathbf{S} = P + jQ$ 或者 $\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{eff}}\mathbf{I}_{\text{eff}}^*$。测量时用的单位是伏安（VA）。
- 无功功率 Q 是复功率的虚部，是能量流入或流出负载电抗部分的速率指标，其单位是乏（VAR）。
- 电容常被用来降低来自于电力公司的无功功率，从而提高工业负载的 PF 值。

深入阅读

有关交流功率的回顾可以阅读下列书籍的第 2 章：

B. M. Weedy, *Electric Power Systems,* 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984。

与交流电力系统有关的文章：

International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979-. ISSN: 0142-0615。

习题

11.1　瞬时功率

1. 电流源 $i_s(t) = 2\cos 500t$ A 与 50 Ω 电阻、25 μF 电容并联连接。当 $t = \pi/2$ ms 时，求电源提供的功率、电阻吸收的功率和电容吸收的功率。

2. 电流 $i = 2t^2 - 1$ A（$1\ \text{s} \leqslant t \leqslant 3\ \text{s}$）流经某一电路元件。(a) 如果该元件为 4 H 电感，求电流在给定时间间隔内提供给它的能量；(b) 如果元件为 0.2 F 电容，且 $v(1) = 2$ V，求 $t = 2$ s 时电流提供给它的功率。
3. 电路如图 11.24 所示，如果 $v_c(0) = -2$ V，$i(0) = 4$ A，求 t 等于下列值时电容吸收的功率：(a) 0^+; (b) 0.2 s; (c) 0.4 s。
4. 设 $v_s = 20\cos(1000t + 30°)$ V，求图 11.25 所示电路中每个无源元件在 $t = 0$ 时吸收的功率，并用 PSpice 对答案进行验证。

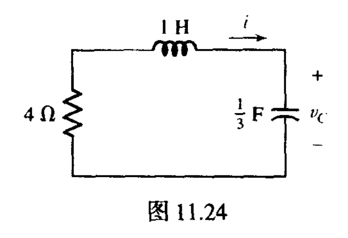


图 11.24

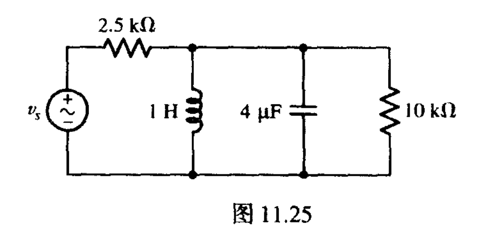


图 11.25

5. 图 11.26 所示的电路已经达到稳态条件，求 $t = 0.1$ s 时 4 个电路元件分别吸收的功率。
6. 考虑图 11.27 所示的 RL 电路，确定下列时间点上电阻吸收的瞬时功率：(a) 0^+; (b) 1 s; (c) 2 s。

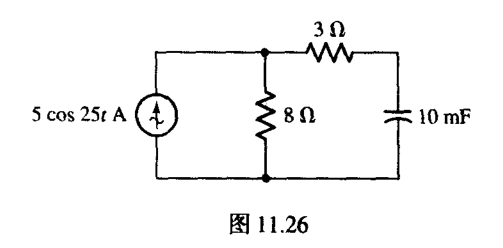


图 11.26

图 11.27

7. 考虑图 11.28 所示的 RC 电路，确定下列时间点上电阻吸收的瞬时功率：(a) 0^+; (b) 30 ms; (c) 90 ms。
8. 如果将典型的闪电用持续150 μs，30 kA的电流表示，计算：(a) 该闪电在 1.2 mΩ 的铜棒上产生的瞬时功率；(b) 该闪电在铜棒上产生的总能量。

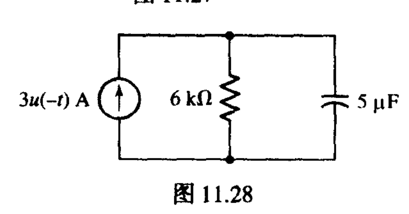


图 11.28

9. 一个 100 mF 的电容储存了 100 mJ 的能量，现有一个电阻值为 1.2 Ω 的电感并联在其两端，求电容在 $t = 120$ ms 时提供给电感的瞬时功率①。假设电感的比热为 0.9 kJ/kg · K，质量为 1 g，初时温度为 23°C，估算在电容放电的最初两秒钟内电感温度升高到几度？
10. 半导体发光二极管工作在2.76 V的电压下，流过的电流为130 mA，忽略二极管的内部电容，在开关开启2 s后LED上得到的瞬时功率是多少？如果换上正弦信号源 $v(t) = 2.76\cos(1000t)$ V，需要什么样的条件才能够计算 $t = 500$ ms 时的瞬时功率，假设那时已不存在瞬态响应。

11.2 平均功率

11. 求图 11.29 所示电路中 5 个电路元件各自吸收的平均功率。
12. 求图 11.30 所示电路中每一个电源所提供的平均功率以及每一个阻抗上得到的平均功率。

① 假设比热 c 定义为 $c = Q/m \cdot \Delta T$，其中，Q 为导体上获得的热量，m 是导体的质量，ΔT 是温度的增量。

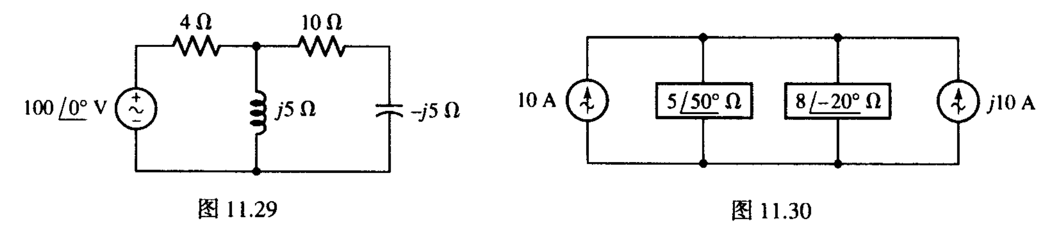


图 11.29　　图 11.30

13. 电路如图 11.31 所示，求：(a) 3 Ω 电阻上得到的平均功率；(b) 电源产生的平均功率。
14. 电路如图 11.32 所示，求电路中 5 个电路元件各自吸收的平均功率。

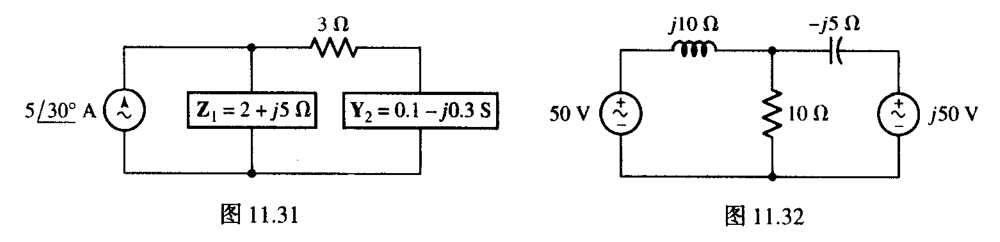


图 11.31　　图 11.32

15. 电路如图 11.33 所示，求独立源所提供的平均功率。
16. 某频域戴维南等效电路将正弦电源 $\mathbf{V}_{th}$ 阻抗 $\mathbf{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$ 串联连接。求负载阻抗 $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$ 受下列条件约束时能获得最大平均功率的条件：(a) $X_{th} = 0$；(b) R_L 和 X_L 独立设定；(c) R_L 固定（但不等于 R_{th}）；(d) X_L 固定（与 X_{th} 相互独立）；(e) $X_L = 0$。
17. 电路如图 11.34 所示：(a) $\mathbf{Z}_L$ 取什么数值时可获得最大平均功率？(b) 该最大平均功率是多少？

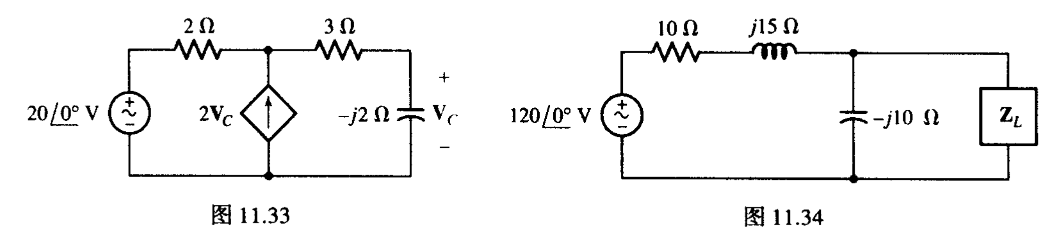


图 11.33　　图 11.34

18. 电路如图 11.34 所示，要求负载是纯电阻 R_L，求 R_L 得到最大平均功率时的数值，并求出该最大平均功率值。
19. 求图 11.35 所示电路中独立源所提供的平均功率。
20. 电路如图 11.36 所示：(a) 在 a 点和 b 点之间应该接入怎样的阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 才能吸收最大平均功率？(b) 最大平均功率是多少？

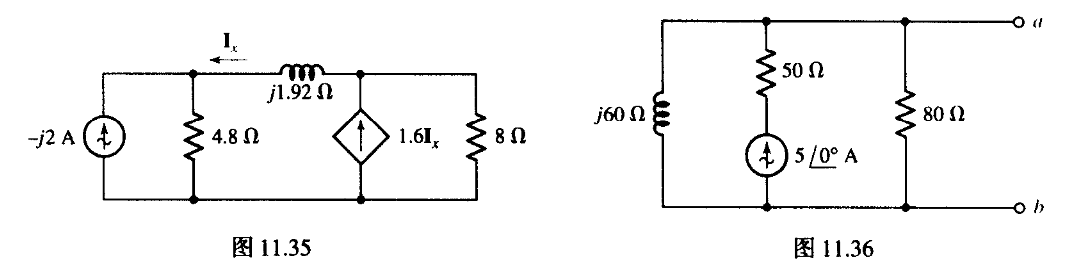


图 11.35　　图 11.36

21. 电路如图 11.37 所示，假设 $10\angle 0^\circ$ A 的源被 $5\angle -30^\circ$ A 的源取代，且工作频率为 50 Hz，确定每一个负载方框所得到的平均功率。

22. 电路如图 11.38 所示，求吸收平均功率最大的 R_L 值，并求最大平均功率。

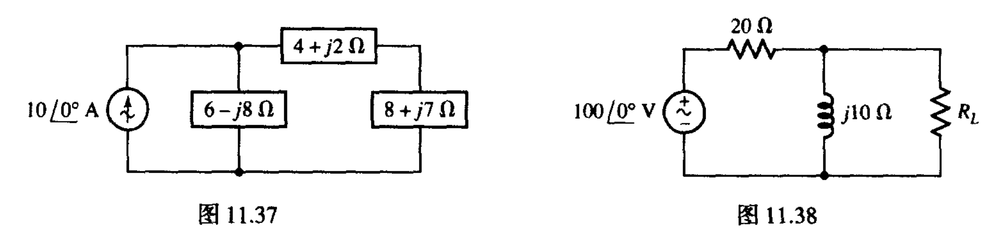


图 11.37　　　　图 11.38

23. 电路如图 11.39 所示，当(a) $\lambda = 0$; (b) $\lambda = 1$ 时，分别确定每个电阻获得的平均功率；(c) 假设电路的工作频率为 60 Hz，用 PSpice 对答案进行验证。

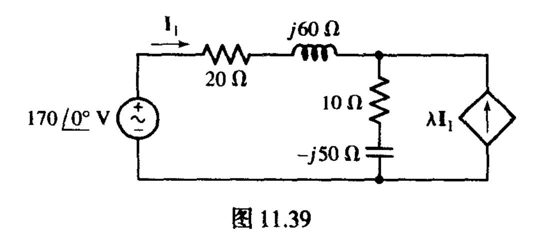


图 11.39

24. (a) 计算图 11.40 所示的每个波形的平均值；(b) 如果对每一个波形取平方，求新的周期波形的平均值（单位为 A^2）。

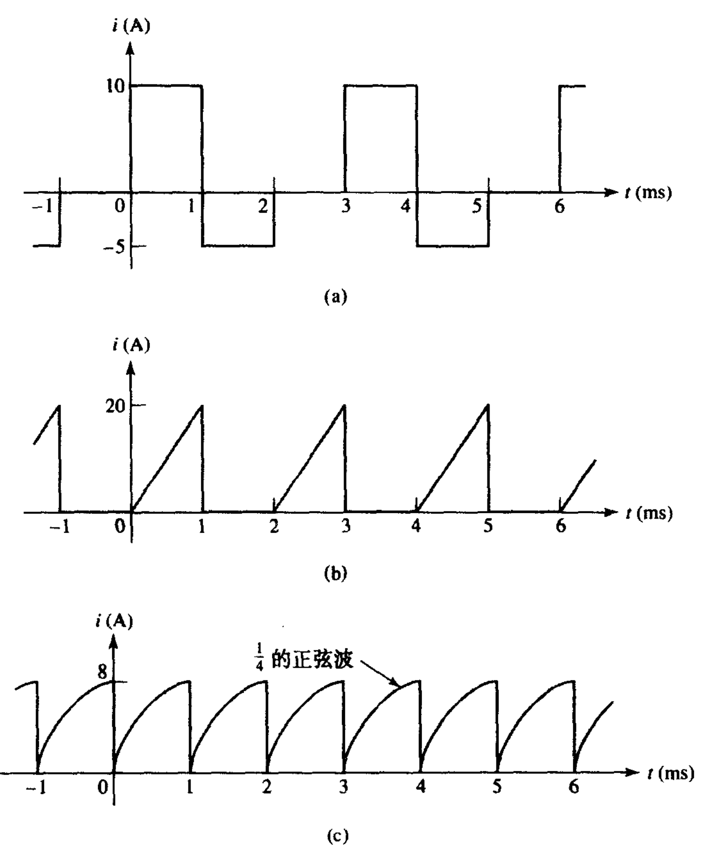


图 11.40

25. 求图 11.25 所示电路中每一个电路元件得到的平均功率，假设 $v_S = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - 9°)$ V，用 PSpice 对答案进行验证。

11.3　电流和电压的有效值

26. 计算下列有效值：(a) $12\cos(1000t)$ V；(b) $12\sin(1000t)$ V；(c) $12\cos(500t)$ V；(d) $12\cos(500t - 88°)$ V。
27. 计算下列有效值：(a) $2\cos(10t)$ A；(b) $2\sin(10t)$ A；(c) $2\cos(5t)$ A；(d) $2\cos(5t - 32°)$ A。
28. 确定图 11.41 所示波形的有效值。
29. 确定图 11.42 所示波形的有效值。

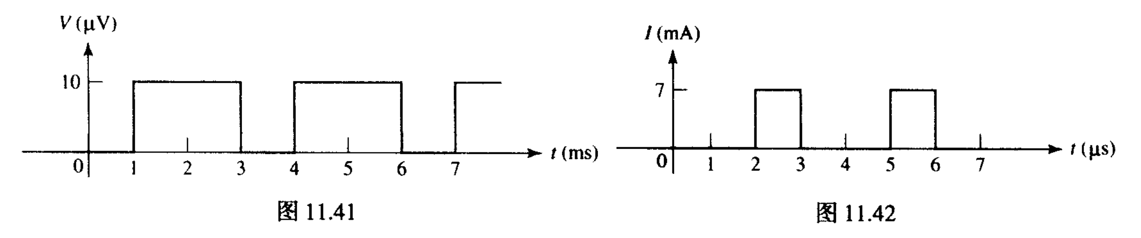


图 11.41　　图 11.42

30. 求下列有效值：(a) 1 V；(b) $1 + \cos 10t$ V；(c) $1 + \cos(10t + 10°)$ V。
31. 求下列有效值：(a) $v(t) = 10 + 9\cos 100t + 6\sin 100t$；(b) 图 11.43 所示波形；(c) 求该波形的平均值。

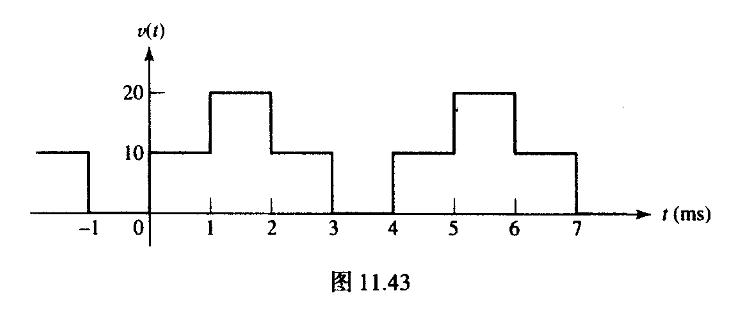


图 11.43

32. 求下列有效值：(a) $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120°)$；(b) $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120°)$；(c) 图 11.44 所示的波形。

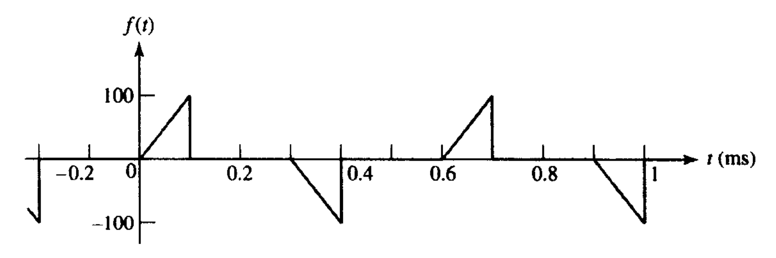


图 11.44

33. 已知周期函数 $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$，求：(a) 平均值；(b) 有效值。
34. 求图 11.40 所示的 3 个周期函数的有效值。
35. 4 个独立电压源分别为：$A\cos 10t$，$B\sin(10t + 45°)$，$C\cos 40t$，常数 D 和 4 Ω 电阻的串联，求下列情况下电阻上得到的平均功率：(a) $A = B = 10$ V，$C = D = 0$；(b) $A = C = 10$ V，$B = D = 0$；(c) $A = 10$ V，$B = -10$ V，$C = D = 0$；(d) $A = B = C = 10$ V，$D = 0$；(e) $A = B = C = D = 10$ V。

36. (a) 求电阻 R 的值，使得图 11.45 所示电路中电感上的电压有效值相等？(b) 电压的有效值等于多少？(c) 用 PSpice 对答案进行验证。

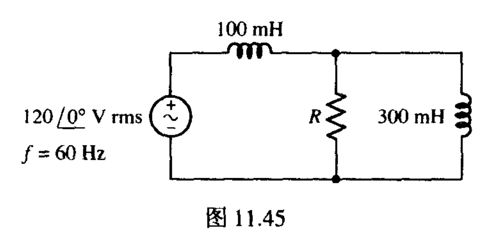


图 11.45

37. 图 11.46 所示波形的周期都等于 3 s，在某种程度上说它们是相似的：(a) 计算每个波形的平均值；(b) 确定两个有效值；(c) 用 PSpice 对锯齿波形进行验证。

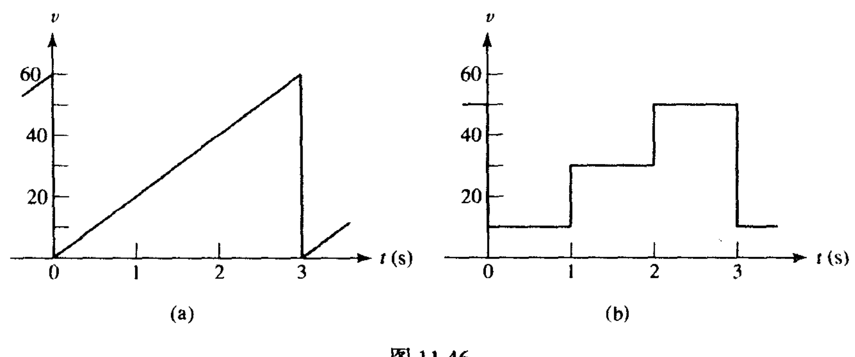


图 11.46

38. 用 1 μF 的电容代替图 11.45 所示电路中的 100 mH 电感，用 3 μF 的电容代替 300 mH 的电感。(a) R 为何值时可使流过电容的有效值电流相等？(b) 该有效值电流等于多少？(c) 用 PSpice 对答案进行验证。

39. 电压波形的周期是 5 s，在 $0\text{ s} < t < 5\text{ s}$ 内可表示为 $v(t) = 10t[u(t) - u(t-2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t-3) - u(t-5)]$ V，求该波形的有效值。

40. 一个 1 kΩ 的电阻和一个 2 H 的电感相串联，其上的功率任何时刻都不能超过 250 mW，假设正弦电流的工作频率 $\omega = 500$ rad/s，求能够承受的最大有效值电流。

11.4 视在功率和功率因数

41. 电路如图 11.47 所示，设 $\mathbf{I} = 4\,\underline{/35^\circ}$ A rms，求平均功率：(a) 电源提供的；(b) 20 Ω 电阻上获得的；(c) 负载上获得的。求视在功率：(d) 电源提供的；(e) 20 Ω 电阻上获得的；(f) 负载上获得的；(g) 负载的 PF 值是多少？

42. (a) 求图 11.48 所示电路中电源的功率因数；(b) 电源提供的平均功率；(c) 需要并联多大的电容才能使功率因数成为 1？(d) 用 PSpice 对答案进行验证。

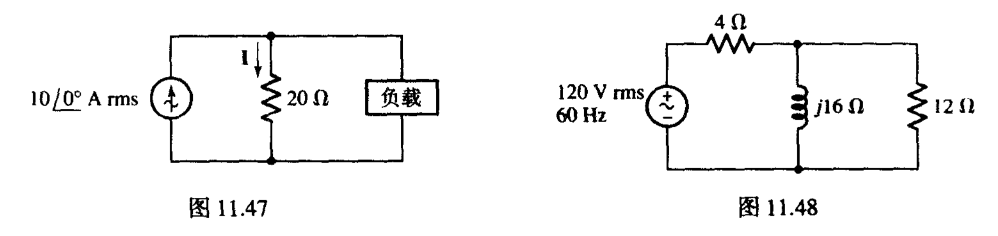


图 11.47　　图 11.48

43. 电路如图 11.49 所示，设 $\mathbf{Z}_A = 5 + j2\ \Omega$，$\mathbf{Z}_B = 20 - j10\ \Omega$，$\mathbf{Z}_C = 10\angle 30^\circ\ \Omega$，$\mathbf{Z}_D = 10\angle -60^\circ\ \Omega$。求每个负载获得的视在功率以及电源提供的视在功率。

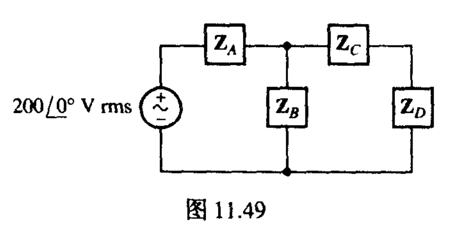


图 11.49

44. 假设有这样一个网络：工作频率 $f = 50$ Hz，负载串联，流过共同的有效值电流 $10\angle 0^\circ$ A，其对偶系统是负载并联，有共同的电压。在串联系统中，令负载短路可以使其失效，开路则会引起火灾。这个特殊系统有两个负载：$\mathbf{Z}_1 = 30\angle 15^\circ\ \Omega$，$\mathbf{Z}_2 = 40\angle 40^\circ\ \Omega$。(a) 电源的功率因数为多少？(b) 这两个负载组合的视在功率为多少？(c) 组合负载的性质呈感性还是容性？

11.5　复功率

45. 复合负载由 3 个负载并联组成：一个负载获得 100 W 的功率，PF 为 0.92 滞后；另一个负载得到 250 W 的功率，PF 是 0.8 滞后；第三个负载需要 150 W 的功率，PF = 1。并联负载由电压源 $\mathbf{V}_s$ 和 10 Ω 串联电阻供电，所有负载均工作在 115 V rms 的电压下。确定：(a) 流过电源的有效值电流；(b) 复合负载的 PF。

46. 图 11.50 所示电路的负载获得 10 kVA 的功率，PF 为 0.8 滞后。如果电流 $|\mathbf{I}_L| = 40$ A rms，求使电源的 PF 为 0.9 滞后的电容 C 的值。

47. 考虑图 11.51 所示的电路，电源的 PF 为 0.92 滞后，为了增加总负载的 PF，需要增加一个电容，电容有下面两种接入方法，确定每一种方法下电容的值：(a) 与 100 mH 的电感串联；(b) 与 100 mH 的电感并联。用 PSpice 对 (a) 和 (b) 的答案进行验证。

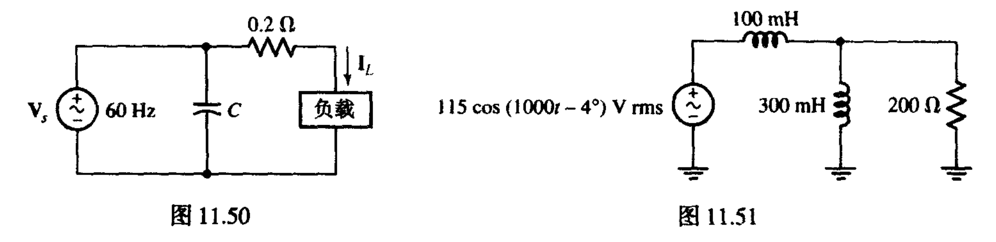


图 11.50　　图 11.51

48. 分析图 11.52 所示的电路，求 5 个电路元件各自吸收的复功率。

49. 图 11.53 所示电路中的两个电源工作在相同的频率上，求每个电源产生的复功率以及每一个无源电路元件吸收的复功率。

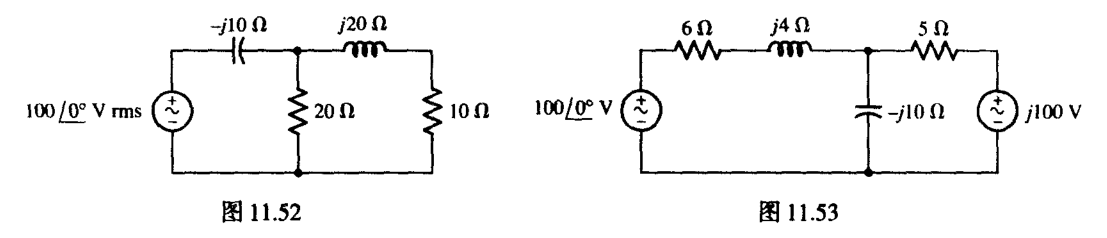


图 11.52　　图 11.53

50. 求下列情况下传输给负载的复功率：(a) 吸收 500 VA，PF 为 0.75 超前；(b) 吸收 500 W，PF 为 0.75 超前；(c) 吸收 –500 VAR，PF 为 0.75。

51. 容性阻抗 $\mathbf{Z}_C = -j120\ \Omega$ 与负载 $\mathbf{Z}_L$ 并联并由 $\mathbf{V}_s = 400\angle 0^\circ$ V rms 的电源供电，电源产生的复功率为 $1.6 + j0.5$ kVA。求：(a) 提供给 $\mathbf{Z}_L$ 的复功率；(b) $\mathbf{Z}_L$ 的 PF 值；(c) 电源的 PF 值。

52. 有效值为 230 V 的电源向 3 个并联负载供电：PF 为 0.8 滞后，功率为 1.2 kVA；PF 为 0.9 滞后，功率为 1.6 kVA；PF 为 1，功率为 900 W。求：(a)电源电流的幅值；(b)电源工作的 PF 值；(c)电源提供的复功率。
53. 有效值为 250 V 的电源给 3 个并联负载供电：第一个负载在单位功率因数下吸收 20 kW 的功率；第二个负载在的 PF 为 0.8 滞后时用了 25 kVA；第三个负载需要 30 kW 功率，PF 是 0.75 滞后。求：(a) 电源所提供的总功率；(b) 电源所提供的所有视在功率；(c) 电源工作时的 PF 值。
54. 一个烤面包机每月用电 200 kW，每月无功功率需求为 280 kVAR。为补偿损失和鼓励用户提高 PF 值，某地方电力公司对超过标准的无功功率罚款 $0.22/kVAR，标准无功功率用量按 0.65 乘以平均功率用量计算。(a) 利用以上费率表计算用户与 PF 罚款有关的年度费用；(b) 计算电力公司制定政策所根据的目标 PF 值；(c) 如果电力公司提供的补偿费用是每增加 100 kVAR 为 200 美元，每增加 200 kVAR 为 395 美元，问用户的最佳解决方案是什么？
55. 推导式[28]。

11.6 功率术语的比较

56. 电压源 $339\cos(100\pi t - 66^\circ)$ V 和一个 1 kΩ 的纯电阻相串联：(a) 电压源的电压有效值为多少？(b) 负载吸收的瞬时功率的峰值是多少？(c) 负载吸收的瞬时功率的最小值是多少？(d) 计算电源提供的视在功率。(e) 计算电源提供的无功功率。(f) 提供给负载的复功率是多少？
57. 电压源 $339\cos(100\pi t - 66^\circ)$ V 和一个 150 mH 的纯电感相串联：(a) 电路中流过的电流有效值是多少？(b) 负载吸收的瞬时功率的峰值是多少？(c) 负载吸收的瞬时功率的最小值是多少？(d) 计算电源提供的视在功率。(e) 计算电源提供的无功功率。(f) 提供给负载的复功率是多少？
58. 电路如图 11.25 所示，$v_s = 5\cos 1000t$ V。(a) 提供给 10 kΩ 电阻的瞬时功率峰值是多少？(b) 计算提供给 10 kΩ 电阻的无功功率。(c) 计算提供给 10 kΩ 电阻的视在功率。(d) 电源提供的复功率是多少？
59. (a) 电路如图 11.54 所示，求传输给每个无源元件的复功率；(b) 证明这些复功率之和等于电源产生的复功率；(c) 这一结果对视在功率正确吗？(d) 电源提供的平均功率是多少？(e) 电源提供的无功功率是多少？

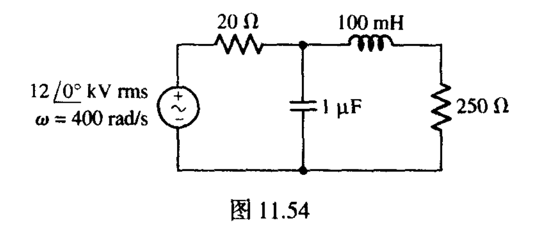


图 11.54

60. 负载的工作电压是 2300 V rms，流过的电流是 28 A rms，功率因数为 0.812 滞后。求：(a) 电流峰值，用安培（A）表示；(b) $t = 2.5$ ms 时的瞬时功率，假设工作频率为 60 Hz；(c) 负载吸收的实际功率；(d) 复功率；(e) 视在功率；(f) 负载阻抗；(g) 无功功率。

第12章 多相电路

主要概念

- 单相电源系统
- 三相电源系统
- 三相电源
- 线电压和相电压
- Y形网络
- Δ形网络
- 平衡负载
- 基于每一相的分析
- 三相系统中的功率测量

引言

电力部门向居民和工业用户提供的是正弦波形式的电流或电压，通常称为交流电（AC）。大多数北美用户使用的是60 Hz、电压有效值差不多为120 V的正弦电压。世界上其他地区也有使用50 Hz、240 V有效值电压的。最初，托马斯·爱迪生提议电力部门采用直流方式来传输电能，但电力行业的先驱Nikola Tesla和George Westinghouse强烈提倡使用交流方式进行传输，而后者的观点更具说服力。

交流电力传输系统的瞬时响应在确定功率峰值时很有意义，因为很多电器设备在启动时需要的电流大于连续工作时的电流。但是很多情况下稳态响应是首要的关注对象，所以基于相量分析的经验被证明很有用。我们将介绍一种新的电压源——三相电源。该电压源可以接成三线或四线的Y结构，也可以接成三线的Δ结构。同样，负载可以是Y连接，也可以是Δ连接，具体取决于相关应用。

12.1 多相系统

迄今为止，每当我们用到术语“正弦电源”时就会联想到幅度、频率和相位一定的正弦电压和电流的图形。本章将要介绍的多相电源只针对三相电源。利用旋转发电机产生三相电与单相电相比具有明显的优势，而且三相电传输的经济效益也比较高。虽然我们遇到的大多数电气设备用的是单相电，但使用三相电的设备也不少，尤其在制造业，特别是大型制冷系统以及机械设备中的电机线圈大多是按三相电要求绕制的。一旦熟悉了多相系统的原理就会发现，对于其他的应用，很容易从多相系统的一条“腿”获得单相电。

我们先看一看一种最常见的多相系统——平衡的三相系统。该系统的电源有3个端点（不计中线端或地线端），用电压表测量时会发现任意两个端点间的电压都是等幅度的正弦波，但是这些电压不同相，每一个电压与其他两个电压的相位都相差120°，相角符号依赖于电压的读取顺序。图12.1所示是一个可能的电压关系。平衡负载从3个不同相位的电压中获取相同的功率。总负载获



得的瞬时功率任何时刻均不为零。事实上，总负载上的瞬时功率是常数。这在旋转发电机中是很有利的，因为它保证了转子上的扭距比单相电源中更稳定，从而可以减少振动。

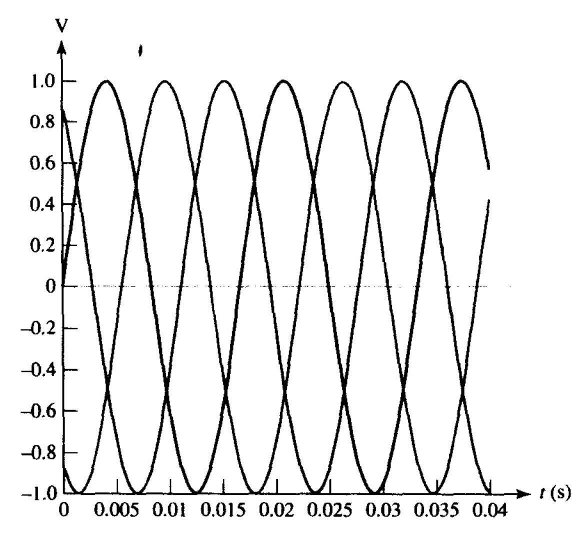


图 12.1 一组三相电的例子，其中两两之间相位相差120°。可以看出，在某个时刻只可能有一相电压为零

更多相的系统（例如六相和十二相系统）大多只限于作为大型整流器的电源。整流器把交流电转变成直流电，使得流过负载的电流保持一个方向，因此负载上的电压符号保持不变。整流器的输出是直流，带有一些脉冲成分或纹波，这些脉冲和纹波随着相数的增多而减弱。

实际使用的多相激励源都可近似为理想电压源或者理想电压源与一个小内阻的串联，但三相电流源在实际中却很少使用。

双下标符号

使用双下标表示多相电压和电流比较方便。例如，将电压或电流相量表示为 $\mathbf{V}_{ab}$ 或 $\mathbf{I}_{aA}$ 比简单地描述成 $\mathbf{V}_3$ 或 $\mathbf{I}_x$ 具有更多的含义。根据定义，a 点相对于 b 点的电压为 $\mathbf{V}_{ab}$，即 a 点标为正号，如图 12.2(a)所示。可以认为双下标表示法与正负符号对表示法是等价的，但同时使用两者却是多余的。参见图 12.2(b)，可以看到 $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$。采用双下标符号的好处在于能够反映基尔霍夫电压定律：两点之间不管经过的路径有何不同，它们的电压一定相同，因此，$\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bd} = \mathbf{V}_{ac} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd}$，等等。这样做的好处是不必参考电路图就可以满足 KVL 条件：即使有一个点或下标字母没有在图上标出，我们也可以写出正确的方程。例如，可以写出 $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ax} + \mathbf{V}_{xd}$，这里的 x 可以表示任意一个感兴趣的点。

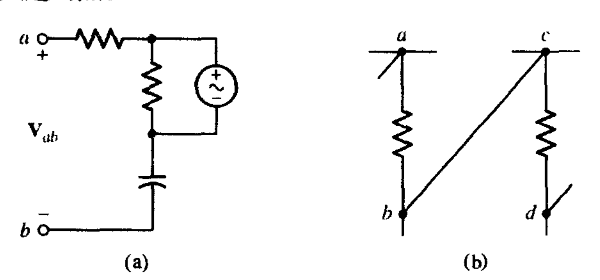


图 12.2 (a)电压 $\mathbf{V}_{ab}$ 的定义；(b) $\mathbf{V}_{ad} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{cd} = \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{cd}$

三相系统中电压①的可能表示方式如图12.3所示。假设电压$\mathbf{V}_{an}$，$\mathbf{V}_{bn}$，$\mathbf{V}_{cn}$为已知电压：

$$\mathbf{V}_{an} = 100\underline{/0^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn} = 100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn} = 100\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

则根据下标可以用眼睛观察到电压$\mathbf{V}_{ab}$为

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nb} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}\\ &= 100\underline{/0^\circ} - 100\underline{/-120^\circ}\ \text{V}\\ &= 100 - (-50 - j86.6)\ \text{V}\\ &= 173.2\underline{/30^\circ}\ \text{V}\end{aligned}$$

3个给定电压及构建的相量电压$\mathbf{V}_{ab}$可在图12.4所示的相量图中找到。

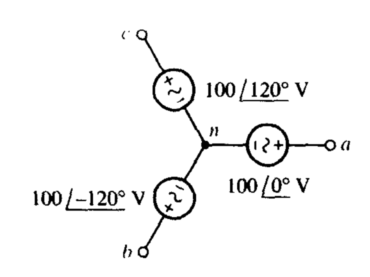


图12.3　一个用来作为双下标电压符号表示法的数值实例的网络

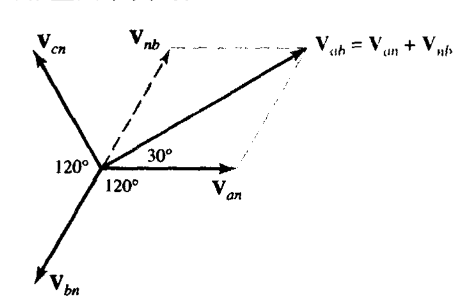


图12.4　采用双下标电压符号得到的图12.3所示网络中$\mathbf{V}_{ab}$的图解相量图

双下标表示法同样适用于电流。定义电流$\mathbf{I}_{ab}$为从a流到b的最直接路径上的电流。在我们考虑的每一个复杂电路中，如果有两种可能的路径位于a点和b点之间，只有当其中的一条路径比另一条更短路径或更直接时，我们才使用双下标表示法。这条路径上通常只有一个元件，所以$\mathbf{I}_{ab}$在图12.5中的表示方法是正确的。事实上，我们提到电流时无须指明箭头方向，因为下标已经表明了其方向。但是，图12.5所示的电流$\mathbf{I}_{cd}$会引起混淆。

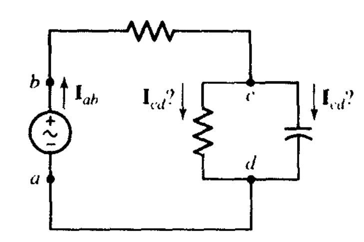


图12.5　正确使用和错误使用电流双下标符号的例子

练习

12.1　设$\mathbf{V}_{ab} = 100\underline{/0^\circ}$ V，$\mathbf{V}_{bd} = 40\underline{/80^\circ}$ V，$\mathbf{V}_{ca} = 70\underline{/200^\circ}$ V。求：(a) $\mathbf{V}_{ad}$；(b) $\mathbf{V}_{bc}$；(c) $\mathbf{V}_{cd}$。

12.2　参见图12.6所示的电路，设$\mathbf{I}_{fj} = 3$ A，$\mathbf{I}_{de} = 2$ A，$\mathbf{I}_{hd} = -6$ A。求：(a) $\mathbf{I}_{cd}$；(b) $\mathbf{I}_{ef}$；(c) $\mathbf{I}_{ij}$。

答案：12.1：$114.0\underline{/20.2^\circ}$ V；$41.8\underline{/145.0^\circ}$ V；$44.0\underline{/20.6^\circ}$ V。12.2：−3 A；7 A；7 A。

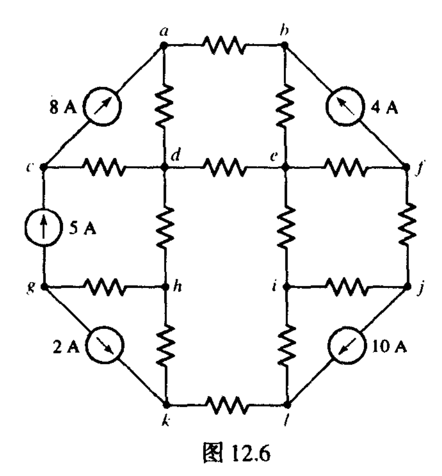


图12.6

① 为与电力系统的表达习惯保持一致，电流和电压在本章中采用的都是有效值。

12.2 单相三线系统

单相三线电源有 3 个输出端——a，n 和 b，如图 12.7(a)所示，其中相量电压 $\mathbf{V}_{an}$ 和 $\mathbf{V}_{nb}$ 相等。电源可以用两个相同电压源的组合来表示，如图 12.7(b)所示，由于 $\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}=\mathbf{V}_1$，因此很容易得出 $\mathbf{V}_{ab}=2\mathbf{V}_{an}=2\mathbf{V}_{nb}$，可见电源可以提供给负载两种电压。北美家庭中的电力系统通常是单相三线的，允许家用电器工作在 110 V 和 220 V 两种电压下。通常高电压下工作的电器功率消耗都较大，且功率消耗相同时，高电压工作获得的电流较小。电器、家庭电力布线和电厂的电力分配系统使用较细的电线比较安全，电流较大时使用较粗的电线以降低导线电阻产生的热量。

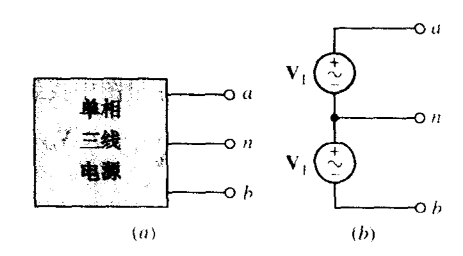


图 12.7 (a) 单相三线电源；(b)用两个相同的电压源表示一个单相三线电源

采用“单相”的原因是电压 $\mathbf{V}_{an}$ 和 $\mathbf{V}_{nb}$ 必须相等，因此相角也必须相等。从另一个角度看，两个边线和中线（通常也称为中性线）之间正好有 180° 的相差，即 $\mathbf{V}_{an}=-\mathbf{V}_{bn}$ 或 $\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{bn}=0$。后面将会讲到，平衡多相系统是由一组幅度相同且相位之和等于零的相量电压组成的。从这一点看，单相三线系统其实就是一个平衡的二相系统，然而，“二相”这个术语已经预留给了传统意义上由两个相位相差 90° 的电压源组成的相对次要的不平衡系统。

现在考虑单相三线系统在边线和中线之间接有相同负载 $\mathbf{Z}_p$ 的情况（如图 12.8 所示）。首先假设连接电源的导线是理想导体，因此，

$$\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_{nb}$$

所以，

$$\mathbf{I}_{aA}=\frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}=\mathbf{I}_{Bb}=\frac{\mathbf{V}_{nb}}{\mathbf{Z}_p}$$

即

$$\mathbf{I}_{nN}=\mathbf{I}_{Bb}+\mathbf{I}_{Aa}=\mathbf{I}_{Bb}-\mathbf{I}_{aA}=0$$

上式表明中线上没有电流，因此移去中线对系统的电压和电流没有任何影响。该结论是在等负载、等电源的情况下得到的。

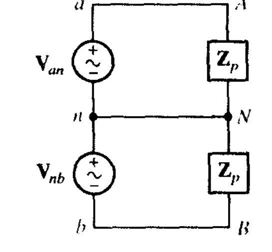


图 12.8 一个简单的单相三线系统。两个负载相同，中线电流为零

有限导线阻抗的影响

接下来考虑导线阻抗为有限值的情况。假如线 aA 和线 bB 的阻抗相同，则它们可以被加到 $\mathbf{Z}_p$ 中且得到等阻抗的结果，因此中线上没有电流。现在让中线也具有阻抗 $\mathbf{Z}_n$。不需要仔细分析，通过叠加定理即可知道：电路的对称性仍然可以使中线电流为零。此外，将任何附加的阻抗直接连接在一条边线和另一条边线之间，都会得到对称电路的结果，因此中线仍然没有电流，所以，零中线电流是平衡和对称负载的结果，中线上的非零阻抗不会破坏对称性。

最一般的单相三线系统包含3个负载，每一条边线和中线之间的负载不相等，另一个负载直接连接在两条边线之间。两条边线上的阻抗近似相等，但中线阻抗略大些。假设有一个这样的系统并以此为例讨论流过中线的电流以及系统在将功率传输到非平衡负载上的总效率。

例题 12.1 分析图 12.9 所示的系统，确定输送到3个负载上的功率和两条边线以及一条中线上损失的功率。

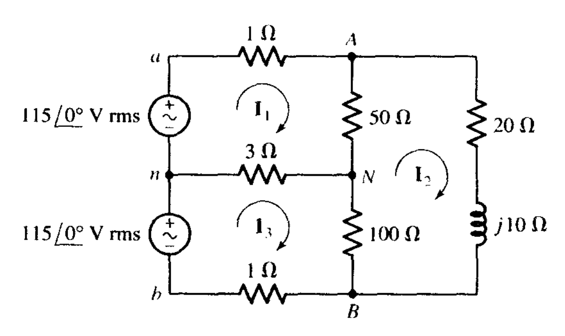


图 12.9 一个典型的单相三线系统

解：▶ 明确题目要求

电路的3个负载为：50 Ω 的电阻、100 Ω 的电阻和 $20 + j10\ \Omega$ 的阻抗。每一条边线阻抗都等于 1 Ω，中线阻抗为 3 Ω。我们需要求出每一条线上流过的电流，以便求出功率。

▶ 收集已知信息

这是一个单相三线系统，图 12.9 所示的电路已经完全标记好。计算得到的电流用有效值表示。

▶ 设计方案

采用网孔分析比较有利，定义3个网孔。求解每一组网孔电流，然后再用它们来分别计算吸收的功率。

▶ 建立一组合适的方程

建立3个网孔方程：

$$-115\underline{/0^\circ} + \mathbf{I}_1 + 50(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + 3(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$
$$(20 + j10)\mathbf{I}_2 + 100(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + 50(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 0$$
$$-115\underline{/0^\circ} + 3(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + 100(\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + \mathbf{I}_3 = 0$$

整理后得到以下3个方程：

$$\begin{aligned}
54\mathbf{I}_1 \quad & -50\mathbf{I}_2 & -3\mathbf{I}_3 &= 115\underline{/0^\circ} \\
-50\mathbf{I}_1 \quad & +(170 + j10)\mathbf{I}_2 & -100\mathbf{I}_3 &= 0 \\
-3\mathbf{I}_1 \quad & -100\mathbf{I}_2 & +104\mathbf{I}_3 &= 115\underline{/0^\circ}
\end{aligned}$$

▶ 确定是否还需要其他信息

我们建立了3个未知量的3个方程，可以求得未知量的解。

▶ 尝试求解

利用科学计算器求解向量电流 $\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$，得到

$$\mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_2 = 9.389\underline{/-24.47^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/-21.80^\circ}\ \text{A}$$

所以边线电流为

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_1 = 11.24\underline{/-19.83^\circ}\ \text{A}$$

和

$$\mathbf{I}_{bB} = -\mathbf{I}_3 = 10.37\underline{/158.20^\circ}\ \text{A}$$

中线电流比较小：

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 0.9459\underline{/-177.7^\circ}\ \text{A}$$

确定每一个负载吸收的平均功率：

$$P_{50} = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2\,(50) = 206\ \text{W}$$
$$P_{100} = |\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2|^2\,(100) = 117\ \text{W}$$
$$P_{20+j10} = |\mathbf{I}_2|^2\,(20) = 1763\ \text{W}$$

总的负载功率为 2086 W。每一条导线上损耗的功率如下：

$$P_{aA} = |\mathbf{I}_1|^2\,(1) = 126\ \text{W}$$
$$P_{bB} = |\mathbf{I}_3|^2\,(1) = 108\ \text{W}$$
$$P_{nN} = |\mathbf{I}_{nN}|^2\,(3) = 3\ \text{W}$$

得到总的损耗功率为 237 W。好在导线被证实是相当长的，否则，两条边线上损耗的相对较大的功率导致的温度升高是很危险的。

说明： 注意这里不需要添加因子$\frac{1}{2}$，因为电流是有效值。

说明： 想象两个 100 W 的灯泡产生的热量！电线消耗的是相同的能量，为了降低它们的温度，需要比较大的表面积。

▶ 验证结果是否合理或是否是与预计结果相符

被吸收的总功率为 206 + 117 + 1763 + 237 = 2323 W，每一个电压源提供的功率为

$$P_{an} = 115(11.24)\cos 19.83^\circ = 1216\ \text{W}$$
$$P_{bn} = 115(10.37)\cos 21.80^\circ = 1107\ \text{W}$$

即总功率等于 2323 W。系统的传输效率定义为

$$\eta = \frac{\text{传给负载的总功率}}{\text{产生的总功率}} = \frac{2086}{2086 + 237} = 89.8\%$$

该数值对蒸汽机和内燃机而言是难以置信的，但对一个设计精良的电力分配系统而言却是相当小的数值。如果电压源和负载必须离得很远，那么需要采用线径较粗的导线。

图 12.10 所示的是两个电压源电压、两条边线以及中线上的电流的相量图，从图中可知 $\mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{nN} = 0$。

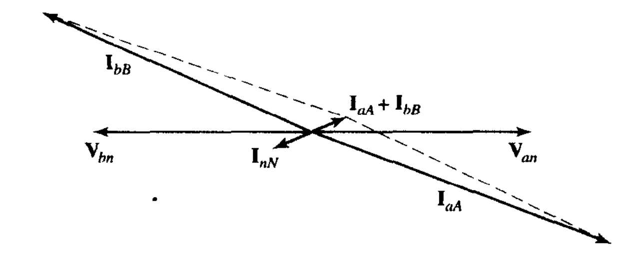


图 12.10 图 12.9 所示电路中的源电压和 3 个电流在本图中以相量形式给出。注意，$\mathbf{I}_{aA}+\mathbf{I}_{bB}+\mathbf{I}_{nN}=0$

练习

12.3 修改图 12.9，每条边线各增加 1.5 Ω 的电阻，中线增加 2.5 Ω 的电阻。求每个负载上得到的平均功率。

答案：153.1 W；95.8 W；1374 W。

12.3 三相 Y-Y 形接法

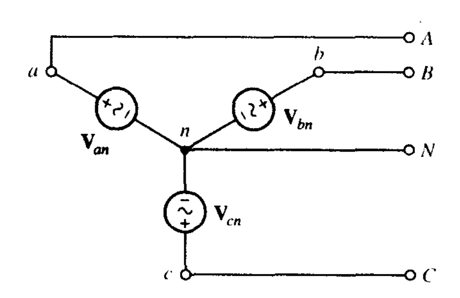


图 12.11 Y 形接法的三相四线电源

三相电源有 3 个端点，称为线端，第 4 个端点（即中线端）可以用也可以不用。我们先讨论使用中线的三相电源。它可以用 3 个理想电源接成 Y 形状来表示，如图 12.11 所示，从而得到 4 个端点：a，b，c 和 n。这里只讨论平衡的三相电源，其定义为

$$|\mathbf{V}_{an}|=|\mathbf{V}_{bn}|=|\mathbf{V}_{cn}|$$

和

$$\mathbf{V}_{an}+\mathbf{V}_{bn}+\mathbf{V}_{cn}=0$$

在边线和中线之间存在 3 个电压，称为相电压。如果任意选取 $\mathbf{V}_{an}$ 作为参考，或者定义为

$$\mathbf{V}_{an}=V_p\underline{/0^\circ}$$

其中，电压 V_p 表示任何一个相电压有效值的幅度，那么可以定义三相电源的电压为

$$\mathbf{V}_{bn}=V_p\underline{/-120^\circ} \qquad 和 \qquad \mathbf{V}_{cn}=V_p\underline{/-240^\circ}$$

或者

$$\mathbf{V}_{bn}=V_p\underline{/120^\circ} \qquad 和 \qquad \mathbf{V}_{cn}=V_p\underline{/240^\circ}$$

前者称为正相序列，或者 abc 相序列，如图 12.12(a)所示；后者称为反相序列，或者 cba 相序列，如图 12.12(b)所示。三相源的实际相序列取决于 3 个端点（即 a，b，c）的选择。人们总是按照保持正相序列的要求来选择端点，我们所讨论的大多数系统都假定是正相序列。

边线与边线间的电压

接下来讨论边线与边线间的电压（经常简称为线电压），已知相电压如图 12.12(a)所示。有了相量图的帮助，可以非常容易地求得线电压，因为所有的角度都是 30° 的倍数。通过图 12.13 构造的必要结构，可以得到

$$\mathbf{V}_{ab}=\sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ} \qquad [1]$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ} \qquad [2]$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ} \qquad [3]$$

基尔霍夫电压定律要求这3个电压的和等于零，读者可以作为练习验证一下。

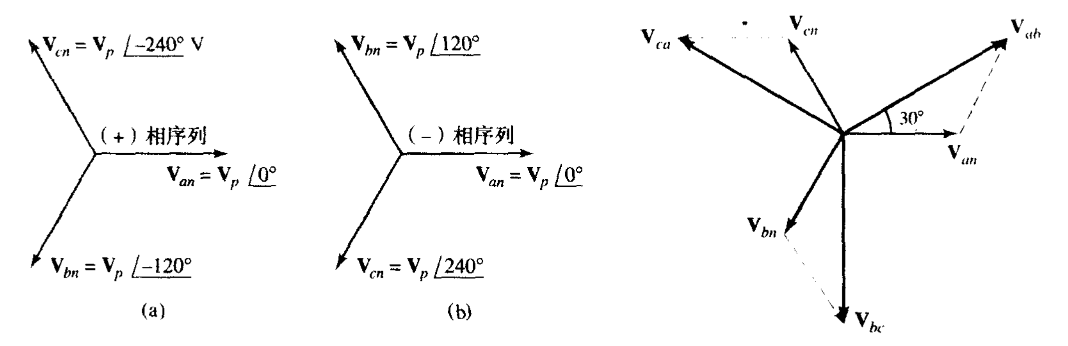


图 12.12 (a) 正或 abc 相序列；(b) 负或 cba 相序列

图 12.13 由给定相电压确定线电压的相量图，代数式为：$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p\underline{/0^\circ} - V_p\underline{/-120^\circ} = V_p - V_p\cos(-120^\circ) - jV_p\sin(-120^\circ) = V_p(1+\frac{1}{2}+j\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$

如果任何线电压的有效值幅度用 V_L 表示，则三相电源在Y形接法下有一个很重要的特性，可以表示为

$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

注意，对正相序列，$\mathbf{V}_{an}$ 超前 $\mathbf{V}_{bn}$，$\mathbf{V}_{bn}$ 超前 $\mathbf{V}_{cn}$，而且各超前120°；同样，$\mathbf{V}_{ab}$ 超前 $\mathbf{V}_{bc}$，$\mathbf{V}_{bc}$ 超前 $\mathbf{V}_{ca}$，而且也各超前120°。上述结论同样适用于反相序列，只要用“滞后”代替“超前”即可。

现在把接成Y形状的平衡负载和电源相连接，使用3条边线和一条中线，如图12.14所示。位于边线和中线之间的负载用阻抗 $\mathbf{Z}_p$ 表示，很容易得到3条边线上流过的电流，因为三相电路是拥有公共导线①的3个单相电路：

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{\mathbf{V}_{an}\underline{/-120^\circ}}{\mathbf{Z}_p} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-120^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{aA}\underline{/-240^\circ}$$

即

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = 0$$

可见，如果负载和电源都是平衡的且导线是零阻抗的，则中线上就没有电流。如果阻抗 $\mathbf{Z}_L$ 串接在每一条边线上，阻抗 $\mathbf{Z}_n$ 接在中线上，会有什么改变吗？边线阻抗可以和3个负载阻抗结合在一起，等效阻抗仍然是平衡的，因此导电性能良好的中线可以被移去。如果 n 和 N 之间短路或者开路对系统没有任何影响的话，中线上可以加上任何阻抗且中线电流维持为零。

① 同时观察每一相并应用叠加定理可以证明结论是正确的。

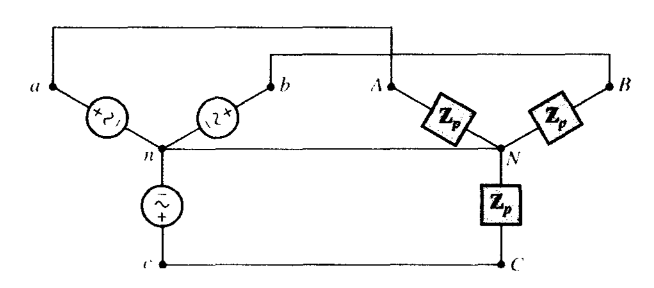


图 12.14 一个平衡的三相系统，使用Y-Y形接法，包含中线

综上所述，如果我们有平衡的电源、平衡的负载以及平衡的边线阻抗，那么具有任何阻抗值的中线可以被任何其他阻抗取代，包括短路和开路，这样的替换不影响系统的电压和电流。不管中线存在还是不存在，两个中点间短接是比较直观的方法，这时问题就降级为3个单相问题了，除了相位有一致的差异外，其他都一样。我们说这是以“每一相”解决问题为基础的。

例题 12.2 对图 12.15 所示的电路，求整个电路的电流和电压，并求负载消耗的总功率。

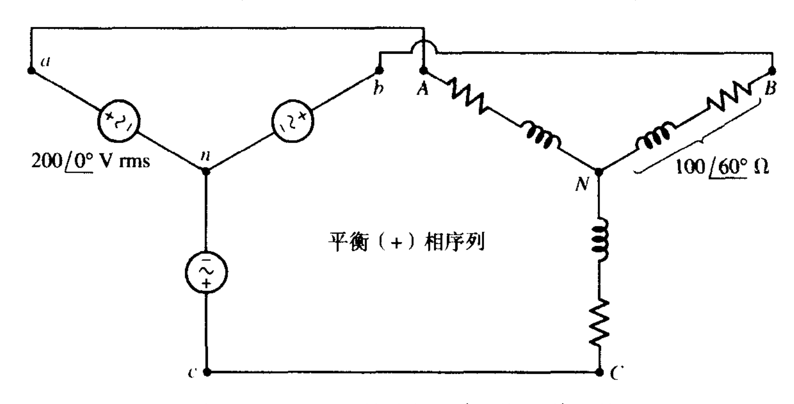


图 12.15 Y-Y形接法的平衡三相三线系统

解： 由于已知其中的一相电压且采用正相序列，则三个相电压为

$$\mathbf{V}_{an} = 200\underline{/0^\circ}\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{bn} = 200\underline{/-120^\circ}\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_{cn} = 200\underline{/-240^\circ}\ \text{V}$$

线电压等于 $200\sqrt{3} = 346$ V，如同构造图 12.13（事实上图 12.13 的相量图是适用的），得到的相量图可以用来确定线电压的相位，借助科学计算器完成相量的减法运算，或者在式[3]中调用式[1]，求得 $\mathbf{V}_{ab} = 346\underline{/30^\circ}$ V，$\mathbf{V}_{bc} = 346\underline{/-90^\circ}$ V，$\mathbf{V}_{ca} = 346\underline{/-210^\circ}$ V。

现在求解 A 相，线电流为

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_p} = \frac{200\underline{/0^\circ}}{100\underline{/60^\circ}} = 2\underline{/-60^\circ}\ \text{A}$$

由于系统是一个平衡三相系统，根据 $\mathbf{I}_{aA}$ 很容易求出剩下的线电流：

$$\mathbf{I}_{bB} = 2\underline{/(-60^\circ - 120^\circ)} = 2\underline{/-180^\circ}\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC} = 2\underline{/(-60^\circ - 240^\circ)} = 2\underline{/-300^\circ}\ \text{A}$$

A 相吸收的功率为

$$P_{AN} = 200(2)\cos(0^\circ + 60^\circ) = 200\ \text{W}$$

因此，被三相负载吸收的总功率等于 600 W。

该电路的相量图如图12.16所示。一旦知道任何线电压和线电流的幅度，读懂相量图就可以求得所有3个电压和3个电流。

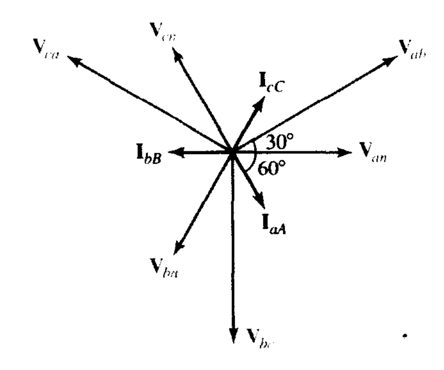


图12.16 应用于图12.15所示电路的相量图

练习

12.4 平衡三相三线系统有一个Y形接法的负载，每一相负载包含3个并联元件：$-j100\ \Omega$，$100\ \Omega$，$50+j50\ \Omega$。假设为正相序列，且 $\mathbf{V}_{ab}=400\underline{/0^\circ}$ V，求：(a) $\mathbf{V}_{an}$；(b) $\mathbf{I}_{aA}$；(c) 负载吸收的总功率。

答案：$231\underline{/-30^\circ}$ V；$4.62\underline{/-30^\circ}$ A；3200 W。

说明：变换有效值时需要因子$\sqrt{2}$。

在开始另一个例题之前，我们先对12.1节的结论做一些深入的探讨。例如，即使在特定的时刻（在北美为1/120 s）相电压和电流会等于零，但是输送给总负载的瞬时功率从不等于零。再一次考虑例题12.2中的A相电路，在时域重新写出相电压和电流的表达式：

$$v_{AN}=200\sqrt{2}\cos(120\pi t+0^\circ)\ \text{V}$$

和

$$i_{AN}=2\sqrt{2}\cos(120\pi t-60^\circ)\ \text{A}$$

因此，A相吸收的瞬时功率为

$$\begin{aligned}p_A(t)=v_{AN}i_{AN}&=800\cos(120\pi t)\cos(120\pi t-60^\circ)\\&=400[\cos(-60^\circ)+\cos(240\pi t-60^\circ)]\\&=200+400\cos(240\pi t-60^\circ)\ \text{W}\end{aligned}$$

同样可得

$$p_B(t)=200+400\cos(240\pi t-300^\circ)\ \text{W}$$

和

$$p_C(t)=200+400\cos(240\pi t-180^\circ)\ \text{W}$$

总负载吸收的瞬时功率为

$$p(t)=p_A(t)+p_B(t)+p_C(t)=600\ \text{W}$$

该结果与时间无关，且其值与例题12.2计算得到的平均功率值相等。

例题 12.3　平衡三相电源系统为平衡的Y接法的负载提供300 V的线电压，1200 W的功率，功率因数PF为0.8超前，求线电流和每一相的负载阻抗。

解： 相电压为$300/\sqrt{3}$ V，每一相的功率为1200/3 = 400 W，因此线电流可以根据功率关系得到：

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L)(0.8)$$

即线电流等于2.89 A。相阻抗由下式给出：

$$|\mathbf{Z}_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\ \Omega$$

由于PF为0.8超前，所以阻抗的相角为−36.9°，即$\mathbf{Z}_p = 60\underline{/-36.9^\circ}\ \Omega$。

更复杂的阻抗也容易求得，因为它已经简化为单相问题的求解了。

练习

12.5　平衡三相三线系统的线电压是500 V。现有两个平衡的Y接法阻抗：一个是容性负载，每一相都为$7 - j2\ \Omega$；另一个是感性负载，每一相都为$4 + j2\ \Omega$。求：(a) 相电压；(b) 线电流；(c) 负载获得的总功率；(d) 电源工作时的功率因数。

答案： 289 V；97.5 A；83.0 kW；0.983 滞后。

例题 12.4　一个平衡的600 W照明设备负载加到（并联）例题12.3的系统中，确定现在的线电流。

解： 首先画出每一相的电路，如图12.17所示。600 W的负载是平衡的，在三相之间平均分配，结果是每一相增加200 W的功率消耗。

图 12.17　用于分析平衡三相系统的每一相电路的例子

照明设备上的电流幅度由下式确定：

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}}|\mathbf{I}_1|\cos 0^\circ$$

因此，

$$|\mathbf{I}_1| = 1.155\ \text{A}$$

同样，容性负载上的电流幅度没有改变，其值与先前的值相同，因为其上的电压没有变化：

$$|\mathbf{I}_2| = 2.89\ \text{A}$$

假设我们讨论的这一相的相电压角度为0°，则

$$\mathbf{I}_1 = 1.155\underline{/0^\circ}\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_2 = 2.89\underline{/+36.9^\circ}\ \text{A}$$

因此线电流为

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 3.87\underline{/+26.6^\circ}\ \text{A}$$

进一步求得这一相的电源产生的功率为

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}}3.87\cos(+26.6^\circ) = 600\ \text{W}$$

该结果与实际相符，新的照明设备需要各相单独提供200 W的功率，原先的负载需要400 W的功率，合起来正好是600 W。

练习

12.6 3个平衡的Y接法负载安装在三相四线电源系统中。负载1获得的总功率为6 kW，PF = 1；负载2需要的功率为10 kVA，PF = 0.96滞后；负载3需要的功率为7 kW，PF = 0.85滞后。如果负载上的相电压为135 V，每一条边线的电阻是0.1 Ω，中线电阻为1 Ω，求：(a) 负载吸收的总功率；(b) 负载的总PF；(c) 4条线上损耗的总功率；(d) 电源的相电压；(e) 电源工作时的功率因数。

答案：22.6 kW；0.954滞后；1027 W；140.6 V；0.957滞后。

如果平衡三相系统上的负载是非平衡的，但是有中线，且中线阻抗等于零，则电路分析仍可以采用基于每一相的分析方法。如果其中有一个条件不满足，则需要采用其他的方法，比如网孔分析或节点分析法。然而，长期与非平衡三相系统打交道的工程师发现，对称组件分析法是一个更为节省时间的方法，然而我们不在这里介绍这种方法。

12.4 Δ形接法

Δ形接法是Y形接法负载的另一种连接方式，如图12.18所示。这种接法很普遍，而且不需要中线。

现在考虑平衡Δ形接法负载的情况，其每一对边线之间接入的阻抗为$\mathbf{Z}_p$。参见图12.18，假设已知的线电压为

$$V_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}|$$

或者假设已知的相电压为

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}|$$

其中，

$$V_L = \sqrt{3}V_p \qquad 和 \qquad \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$$

结果同前所述。由于Δ的各相电压已知，所以相电流很容易求得：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_p} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_p}$$

它们的差就是线电流，例如：

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}$$

因为我们讨论的是平衡系统，因此3个相电流具有相同的幅度：

$$I_p = |\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}|$$

线电流的幅度也是相等的，而且可以很明显地从图12.19所示的相量图中看出对称性，因此，

$$I_L = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|$$

和

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

现在暂时忽略电源，仅考虑平衡负载。如果负载采用的是Δ形接法，则相电压和线电压是没有差别的，但是线电流是相电流的$\sqrt{3}$倍；对于Y形接法的负载，相电流和线电流指的是同一个电流，而线电压则是相电压的$\sqrt{3}$倍。

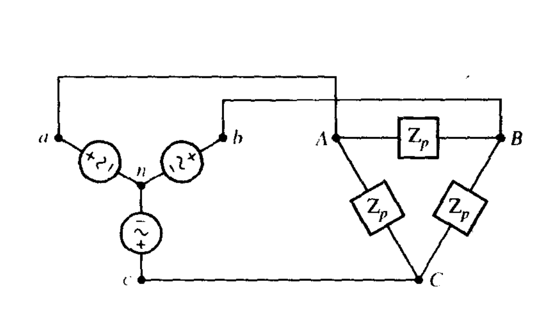


图 12.18　平衡Δ形负载接在三相三线系统中，电源是 Y 形接法

图 12.19　应用于图 12.18 所示电路的相量图，假设 $\mathbf{Z}_p$ 是感性阻抗

例题 12.5　确定三相系统的线电流幅度，已知线电压为 300 V，电源给Δ形接法的负载提供 1200 W 的功率，PF 为 0.8 滞后，求每一相的阻抗。

解： 再一次考虑单相的情况。由于在 300 V 的线电压和 PF 为 0.8 滞后的条件下，负载得到 400 W 的功率，则：

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

和

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

根据线电流和相电流的关系，得到

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

接下来，负载的相角为 arccos (0.8) = 36.9°，因此每一相的阻抗为

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300}{1.667}\underline{/36.9^\circ} = 180\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

说明： 务必记住：假设所有引用的电压和电流都是有效值。

练习

12.7　某平衡三相系统的负载为Δ形接法，每一相的负载由 200 mH 的电感与 5 μF 的电容和 200 Ω 的电阻并联组合相串联而成。假设边线电阻等于零，相电压为 200 V，工作频率 $\omega = 400$ rad/s。求：(a) 相电流；(b) 线电流；(c) 负载吸收的总功率。

答案： 1.158 A；2.01 A；693 W。

例题 12.6　确定三相系统中线电流的幅度，已知线电压为 300 V，电源提供 1200 W 的功率给 Y 形接法的负载，PF 为 0.8 滞后。（与例题 12.5 的电路相同，但这里采用 Y 形接法的负载。）

解： 对每一相而言，相电压为 $300/\sqrt{3}$ V，功率为 400 W，功率因数为 0.8 滞后，因此，

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_p)(0.8)$$

和

$$I_p = 2.89 \qquad （即\ I_L = 2.89 \text{ A}）$$

负载的相角仍为 36.9°，Y 的每一相阻抗为

$$\mathbf{Z}_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89}\underline{/36.9^\circ} = 60\underline{/36.9^\circ}\ \Omega$$

因子$\sqrt{3}$不仅是线参数与相参数之间的纽带，也是三相平衡系统中任何负载所吸收的总功率这一表达式中出现的系数。假设 Y 形负载的功率因数的相角为 θ，则任何一相得到的功率为

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_p I_L \cos\theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

总功率为

$$P = 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta$$

同样，Δ 形负载每一相得到的功率为

$$P_p = V_p I_p \cos\theta = V_L I_p \cos\theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta$$

总功率为

$$P = 3P_p$$
$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta \qquad [4]$$

可见，式[4]允许我们在计算平衡负载得到的总功率时只需要已知线电压的幅度、线电流的幅度、负载阻抗（导纳）的相角即可，从而可以不考虑负载是 Y 形的还是 Δ 形的。例题 12.5 和例题 12.6 中的线电流可以通过下面两个简单步骤求得：

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

因此，

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89\ \text{A}$$

对于用 Y 形接法的三相电源供电的 Y 形负载和 Δ 形负载来说，其相电压、线电压以及相电流、线电流的比较参见表 12.1。

表 12.1　Y 形和 Δ 形三相负载的比较。V_p是 Y 形电源中每一相的电压幅度

负载	相电压	线电压	相电流	线电流	每一相功率
Y	$\mathbf{V}_{AN} = V_p\underline{/0^\circ}$ $\mathbf{V}_{BN} = V_p\underline{/-120^\circ}$ $\mathbf{V}_{CN} = V_p\underline{/-240^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{AN} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{BN} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = (\sqrt{3}\underline{/30^\circ})\mathbf{V}_{CN} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = \mathbf{I}_{CN} = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ 其中 $\cos\theta$ 为负载的功率因子
Δ	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ}$ $\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ}$ $\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ}$	$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\mathbf{I}_{aA} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{bB} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_p}$ $\mathbf{I}_{cC} = (\sqrt{3}\underline{/-30^\circ})\frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_p}$	$\sqrt{3}V_L I_L \cos\theta$ 其中 $\cos\theta$ 为负载的功率因子

练习

12.8 平衡三相三线系统端口接有两个并联连接的Δ形负载。负载1需要40 kVA的功率，PF为0.8滞后；负载2吸收24 kW的功率，PF为0.9超前。假设边线电阻等于零，$\mathbf{V}_{ab} = 440\underline{/30^\circ}$ V。求：(a) 负载吸收的总功率；(b) 滞后负载上的线电流 $\mathbf{I}_{AB1}$；(c) $\mathbf{I}_{AB2}$；(d) $\mathbf{I}_{aA}$。

答案：56.0 kW；$30.3\underline{/-6.87^\circ}$ A；$20.2\underline{/55.8^\circ}$ A；$75.3\underline{/-12.46^\circ}$ A。

Δ形接法的电源

电源也可以接成Δ形，但是这种接法不是典型接法，因为只要电源的三相之间略微不平衡，Δ环路上就会流过大电流。例如，3个单相电源为 $\mathbf{V}_{ab}$，$\mathbf{V}_{bc}$ 和 $\mathbf{V}_{cd}$，在连接 a 和 d 从而闭合Δ之前，通过测量三者的和（即 $\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca}$）可确定非平衡量。假设求和后的幅度是线电压的1%，则环路电流约等于线电压的 $\frac{1}{3}$ 除以电源内阻。这个内阻会有多大呢？它取决于电源在可忽略的端电压下降时提供的电流。如果假设最大的电流导致端电压1%的下降，那么环路电流将达到最大电流的 $\frac{1}{3}$！其后果是减小了电源承载有效电流的能力，而且还会增加系统的损耗。

还需要指出的是：平衡的三相电源可以从Y形转换成Δ形，但不会影响负载电流或电压，反之亦然。线电压和相电压的关系如图12.13所示，这里 $\mathbf{V}_{an}$ 的参考相角为0°。这种变换使得我们可以使用任何喜欢的电源接法且保证负载上的关系都是正确的。当然，在知道电源的实际连接形式之前，电源的任何电压或电流是无法确定的。平衡三相负载可以在Y形和Δ形之间转换，适用的关系式是

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

建议读者记住该式。

实际应用——发电系统

产生电能的方法相当多。例如，使用光电转换技术（太阳能电池）把太阳能直接转变成电能即可产生直流电。尽管光电转换技术是一项很环保的技术，但是光电转换方法与其他发电方法相比费用太高，而且还需要转换器把直流电转变成交流电。相比之下，风力涡轮发电、地热发电、水力发电、原子能以及燃油发电机发电都是很经济的方法。在这些系统中，一个转动轴在原动力［如风力推进器、水力或蒸汽的涡轮片（见图12.20）］的推动下旋转。



图12.20 加州Altamont Pass的风力发电机，包含7000个独立的风车



图 12.21 正在向下吊装的 24 极转子同步发电机

一旦原动力驱动了轴的旋转，则有几种方式能够把机械能转变成电能。一种是同步发电机，如图 12.21 所示。这种机械由两个主要部分组成：一个是固定部分，称为定子；另一个是转动部分，称为转子。直流电流从绕在转子上的线圈里流过，转子在原动力驱动下旋转可产生磁场，绕在定子上的第二组线圈就会感应出一组三相电压。同步发电机的名字来源于产生的交流电的频率与机械转子的转动频率相同。

对单独一个发电机的实际电能需求千变万化，这是因为负载的增加或减少所致。例如，空调机的启动、电灯的开关等。理想情况下，发电机的输出电压应与负载无关，但实际情况并非如此。电压 $\mathbf{E}_A$ 是由给定的定子感应出来的任意一相电压，通常称为内部产生的电压，其幅度为

$$E_A = K\phi\omega$$

其中，K 是常数，由机器构造决定；ϕ 是围绕着定子的磁场所产生的磁通量（因此与负载无关）；ω 是转速，它只取决于原动力而与负载无关。因此，改变负载并不影响 $\mathbf{E}_A$ 的幅度。内部产生的电压与相电压和相电流具有如下关系：

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{V}_\phi + jX_S\mathbf{I}_A$$

其中，X_S 是发电机的同步阻抗。如果负载增加，就需要发电机输出更大的电流 $\mathbf{I}'_A$。如果功率因数不变（即 $\mathbf{V}_\phi$ 和 $\mathbf{I}_A$ 之间的角度不变），则 $\mathbf{V}_\phi$ 将减小，因为 E_A 不能改变。

举个例子，考虑图 12.22(a)所示的相量图，它描述的是发电机接一个功率因数滞后 $\cos\theta$ 的负载后单相输出电压和电流相量的关系。内部产生的电压 $\mathbf{E}_A$ 也在图中有所表示。如果增加的负载并不改变功率因数，如图 12.22(b)所示，则提供的电流将从 $\mathbf{I}_A$ 增加到 $\mathbf{I}'_A$，然而由相量 $jX_S\mathbf{I}'_A$ 和 $\mathbf{V}'_\phi$ 相加形成的内部产生的电压的幅度必须保持不变，即 $E'_A = E_A$，所以发电机的输出电压（$\mathbf{V}'_\phi$）将略有减小，如图 12.22(b)所示。

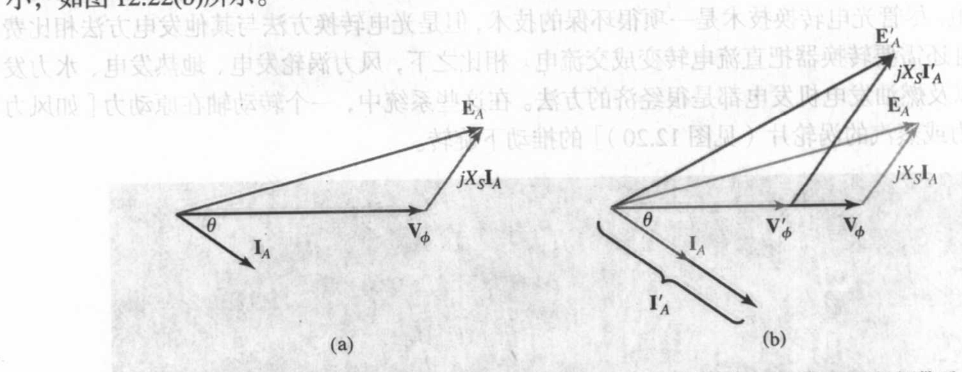


图 12.22 用相量图描述负载对单个同步发电机的影响：(a) 发电机接有滞后功率因数为 $\cos\theta$ 的负载；(b) 增加的负载不改变功率因数。内部产生的电压幅度保持不变，但输出电流增加，因此输出电压减少

发电机的电压调整率定义为

$$\%\,调整率 = \frac{V_{无负载} - V_{满负载}}{V_{满负载}} \times 100$$

理想情况下，该值应尽可能接近零，但是只有在改变控制磁通量ϕ的直流电流用以补偿负载条件变化的情况下才能达到这个要求，这显然是很麻烦的。为此，在设计发电设备时，采用几个小的发电机并联比采用一个大的发电机可容纳更大的负载。每一个发电机都可以满负载或接近满负载工作，因此电压的输出基本上就是常数。根据需求，可以在整个系统中添加或去除单个的发电机。

12.5 三相系统的功率测量

瓦特计的使用

在讨论三相系统中的功率测量技术之前，我们先简要介绍一下功率表在单相电路中的使用。

最常见的功率测量是利用带有两个线圈的瓦特计在低于几百赫兹的频率下完成的。其中的一个线圈非常粗，电阻很低，称为电流线圈；第二个线圈由细线绕成，匝数非常多，电阻相对大一些，该线圈称为电势线圈或电压线圈。附加电阻可以与电势线圈在内部或外部串接在一起，扭矩应用在转动系统上，指针和流过两个线圈的瞬时电流的乘积成正比，但是，转动系统的惯性导致指针偏转与扭矩的平均值成正比。

瓦特计一般以下面的方法连接在网络中：流入电流线圈的电流就是流入网络的电流，电压线圈两端的电压也就是跨接在网络两端的电压。电压线圈上流过的电流等于输入电压除以电压线圈的电阻。

很显然，瓦特计有4个可用的端子，为了得到比较准确的表头读数，必须正确连接这些端子。具体而言，假设需要测量无源网络吸收的功率，插入电流线圈与连接负载的两根导线之一串联，而电压线圈连接在两根导线之间，通常位于电流线圈的“负载边”。电压线圈的端子通常由箭头指示，如图12.23(a)所示。每一个线圈都有两个端子，电压和电流之间的关系必须观察正确。每个线圈的一端标有“+”号，如果正的电流流入电流线圈的“+”端，电压线圈的“+”端相对于未标注的那端是正的，那么指针往高刻度方向偏转。图12.23(a)所示的瓦特计显示的是向高刻度方向偏转的指针读数，其表明右边的负载网络是吸收功率的。如果两个线圈中的一个反了(但不是全部反了)，那么表头指针将往低刻度方向偏转，只有两个线圈同时反了时表头读数才不受影响。

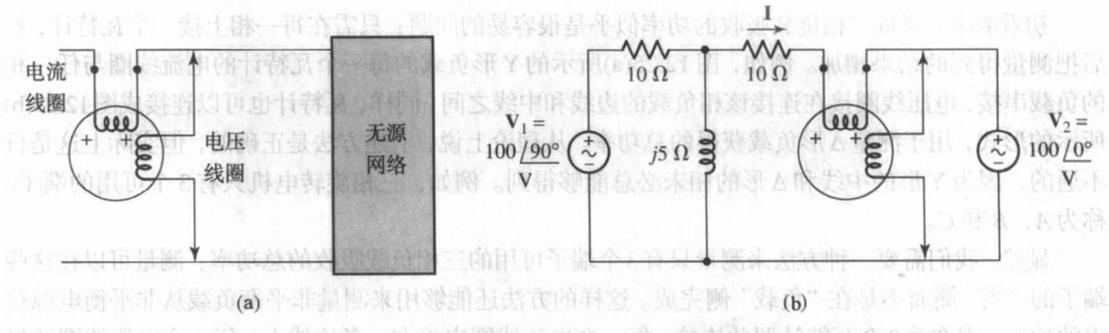


图12.23 (a) 瓦特计的连接保证测量无源网络吸收的功率时读数是偏向高刻度值的；(b) 这是显示高刻度读数的瓦特计连接的一个例子，右边的源吸收功率

作为瓦特计测量平均功率的例子，现在来考虑图12.23(b)所示的电路。瓦特计的连接表明指针向高刻度方向偏转，反映的是瓦特计右边的网络，即右边电源吸收的功率。电源吸收的功率为

$$P = |\mathbf{V}_2|\,|\mathbf{I}|\cos(\text{ang }\mathbf{V}_2 - \text{ang }\mathbf{I})$$

利用叠加定理或者网孔分析法，求得电流为

$$\mathbf{I} = 11.18\underline{/153.4^\circ}\ \text{A}$$

则吸收的功率为

$$P = (100)(11.18)\cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1000\ \text{W}$$

因此指针停止在负刻度上。实际上，反接电压线圈要比电流线圈快很多，因此这样的反接得到的读数是 1000 W 的正刻度值。

练习

12.9 确定图12.24所示电路中瓦特计的读数，说明是否需要反接电压线圈以使指针显示正读数，并确定该功率是被哪个或哪些元件吸收或产生的。瓦特计的“+”分别与下列端点连接：(a) x；(b) y；(c) z。

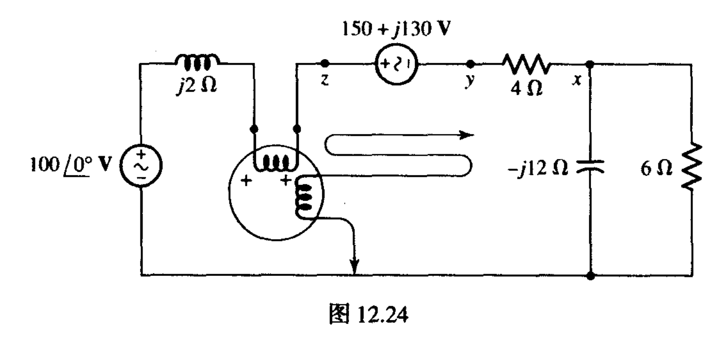


图 12.24

答案：1200 W，等于 $P_{6\Omega}$（吸收）；2200 W，等于 $P_{4\Omega}+P_{6\Omega}$（吸收）；500 W，反接，被 100 V 吸收。

三相系统中的瓦特计

初看起来，测量三相负载吸收的功率似乎是很容易的问题：只需在每一相上接一个瓦特计，然后把测量得到的结果相加。例如，图 12.25(a)所示的Y形负载的每一个瓦特计的电流线圈与任一相的负载串接，电压线圈接在连接该相负载的边线和中线之间，同样，瓦特计也可以连接成图 12.25(b)所示的形式，用于测量Δ形负载获得的总功率。从理论上说，上述方法是正确的，但实际上这是行不通的，因为Y形的中线和Δ形的相未必总能够得到。例如，三相旋转电机只有 3 个可用的端子，称为 A，B 和 C。

显然，我们需要一种方法来测量只有 3 个端子可用的三相负载吸收的总功率：测量可以在这些端子的“线”侧而不是在“负载”侧完成。这样的方法还能够用来测量非平衡负载从非平衡电源获得的功率。现在将 3 个瓦特计照此连接：每一个电流线圈串接在一条边线上，每一个电压线圈并接在边线和某个公共端点（例如 x）之间，如图 12.26 所示。尽管图示的是Y形负载，然而下面的结论对Δ形接法的负载同样正确。点 x 可以是三相系统中不确定的点，也可以只是 3 个电压线圈的公共节点。瓦特计 A 测得的平均功率一定为

$$P_A = \frac{1}{T}\int_0^T v_{Ax} i_{aA}\, dt$$

其中，T是所有电压源的周期。其他两个瓦特计的读数有相似的表达式，因此负载吸收的总功率为

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T}\int_0^T (v_{Ax}i_{aA} + v_{Bx}i_{bB} + v_{Cx}i_{cC})\,dt$$

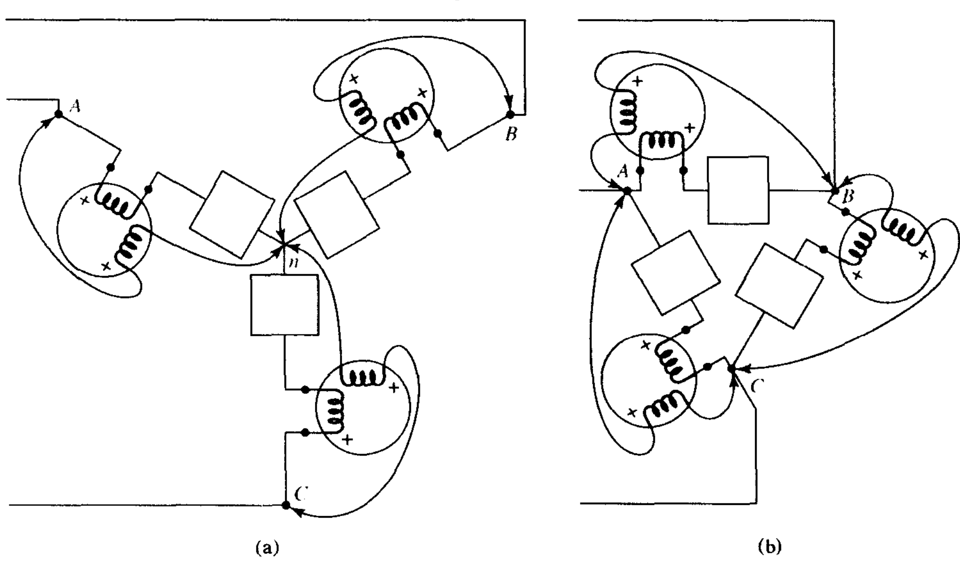


图 12.25　3 个瓦特计分别以图示方式与每一相电路的负载相连，3 个表头读数之和即为负载吸收的总功率：(a) Y 形接法的负载；(b) Δ 形接法的负载。负载和电源可以是非平衡的

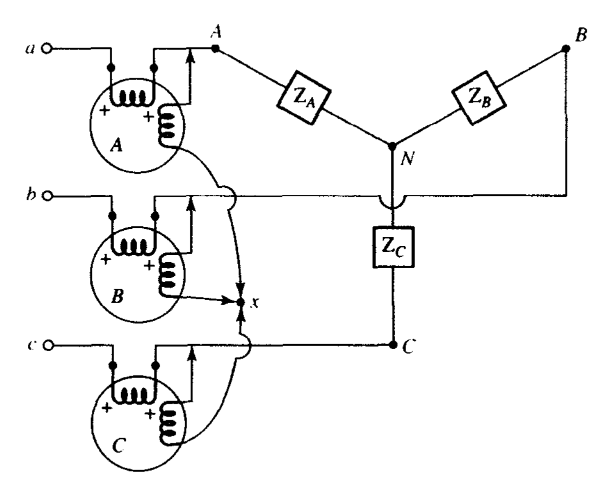


图 12.26　一种用 3 个瓦特计测量三相负载吸收的总功率的方法。负载只有 3 个端子可用

上面提到的 3 个电源可以用相电压和点 x 与中线间的电压表示：

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$
$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$
$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

因此，

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T(v_{AN}i_{aA}+v_{BN}i_{bB}+v_{CN}i_{cC})\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T v_{Nx}(i_{aA}+i_{bB}+i_{cC})\,dt$$

由于全部的三相负载可以看成是一个超节点，因此应用基尔霍夫电流定律可得

$$i_{aA}+i_{bB}+i_{cC}=0$$

则

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T(v_{AN}i_{aA}+v_{BN}i_{bB}+v_{CN}i_{cC})\,dt$$

参考电流的相量图，可知求和的结果正是每一相的负载吸收的功率之和，3个瓦特计的读数之和也正好代表了全部负载吸收的总功率。

在探讨3个瓦特计中的一个是多余的之前，我们用一个例子以数值来复述上面的推导过程。假设电源是平衡的，则

$$\mathbf{V}_{ab}=100\underline{/0^\circ}\quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bc}=100\underline{/-120^\circ}\quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{ca}=100\underline{/-240^\circ}\quad \text{V}$$

或者

$$\mathbf{V}_{an}=\frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ}\quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{bn}=\frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-150^\circ}\quad \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{cn}=\frac{100}{\sqrt{3}}\underline{/-270^\circ}\quad \text{V}$$

非平衡负载为

$$\mathbf{Z}_A=-j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_B=j10\ \Omega$$
$$\mathbf{Z}_C=10\ \Omega$$

假设瓦特计是理想的并连接成如图12.26所示的结构，点x位于电源的中心n，则3个线电流可根据网孔分析得到：

$$\mathbf{I}_{aA}=19.32\underline{/15^\circ}\quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{bB}=19.32\underline{/165^\circ}\quad \text{A}$$
$$\mathbf{I}_{cC}=10\underline{/-90^\circ}\quad \text{A}$$

中线之间的电压为

$$\mathbf{V}_{nN}=\mathbf{V}_{nb}+\mathbf{V}_{BN}=\mathbf{V}_{nb}+\mathbf{I}_{bB}(j10)=157.7\underline{/-90^\circ}$$

每一个瓦特计指示的平均功率可以通过计算得到：

$$P_A=V_pI_{aA}\cos(\text{ang}\,\mathbf{V}_{an}-\text{ang}\,\mathbf{I}_{aA})=\frac{100}{\sqrt{3}}19.32\cos(-30^\circ-15^\circ)=788.7\ \text{W}$$

$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32\cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7\ \text{W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10\cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4\ \text{W}$$

即总功率为1 kW。由于流过电阻性负载的有效值电流为10 A，所以被负载吸收的总功率为

$$P = 10^2(10) = 1\ \text{kW}$$

可见，两种方法是相符的。

说明： 注意其中的一个瓦特计读数是负的。前面基于一个瓦特计的讨论表明只有电压线圈或者电流线圈中的一个被反接，才能得到高刻度的读数。

双瓦特计方法

我们已经证明了3个电压线圈的公共连接点x位于任何地方都不会影响3个瓦特计读数的代数和。现在考虑3个瓦特计的公共连接点x直接位于某一条边线上的情况。例如，如果每一个电压线圈的终端都回到B点，那么瓦特计B电压线圈两端就没有电压，表头读数等于零，从而可以移去瓦特计，剩下的两个瓦特计读数的代数和仍然表示负载吸收的总功率。当点x按照这样的方法设置时，我们把功率测量的方法称为双瓦特计方法。在以下4种情况下：(1) 负载不平衡，(2) 电源不平衡，(3) 两个瓦特计不同，(4) 周期性电源的波形不同，瓦特计读数的代数和总表示负载吸收的总功率。唯一的假设是瓦特计的误差很小以至于可以忽略不计。例如在图12.26所示的电路中，每个表的电流线圈流过的电流是负载电流和电压线圈电流之和，只是后者的电流相当小，这可以通过电压线圈上的电压和电阻估算得到。根据这两个量的大小可以对电压线圈的功率损耗做出精确的估计。

在前面讨论的数值计算的例子中，现在假设只使用了两个瓦特计，一个电流线圈串接在边线A上，电压线圈并接在线A和线B之间，另一个电流线圈串接在线C上，电压线圈并接在线C和线B之间。第一个瓦特计的读数为

$$\begin{aligned}P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= 100(19.32)\cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1866\ \text{W}\end{aligned}$$

第二个瓦特计的读数为

$$\begin{aligned}P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= 100(10)\cos(60^\circ + 90^\circ) \\ &= -866\ \text{W}\end{aligned}$$

则

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000\ \text{W}$$

这与我们刚才分析的结果相吻合。

对平衡负载，双瓦特计方法不仅能够确定负载得到的总功率，还可确定PF的角度。假设负载阻抗的相角为θ，既可以采用Y形接法也可以采用Δ形接法，现在假设采用Δ形接法，如图12.27所示。构造如图12.19所示的标准相量图，用于确定线电压和线电流的相角，然后确定读数：

$$\begin{aligned}P_1 &= |\mathbf{V}_{AB}|\,|\mathbf{I}_{aA}| \cos(\text{ang } \mathbf{V}_{AB} - \text{ang } \mathbf{I}_{aA}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)\end{aligned}$$



和

$$\begin{aligned} P_2 &= |\mathbf{V}_{CB}|\,|\mathbf{I}_{cC}|\cos(\text{ang } \mathbf{V}_{CB} - \text{ang } \mathbf{I}_{cC}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \end{aligned}$$

两个读数的比值为

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \tag{5}$$

展开余弦项，很容易由上式解出 $\tan\theta$:

$$\tan\theta = \sqrt{3}\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \tag{6}$$

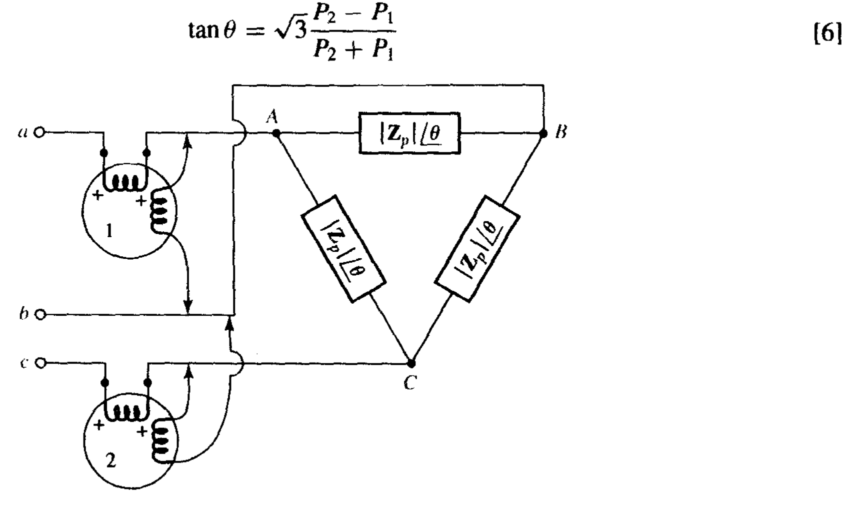


图 12.27 两个瓦特计测量平衡三相负载吸收的总功率

因此，瓦特计读数相等表明负载的PF为1，数值相等而符号相反的读数则表明负载是纯电抗性质的；P_2的读数（数值）比P_1大表明负载是感性的；P_2的读数比P_1小表明负载是容性的。如何知道哪一个瓦特计的读数是P_1，哪一个是P_2呢？事实上，P_1在线A上，P_2在线C上，正相序列系统使得V_{an}滞后于V_{cn}。这些信息足以区分两个瓦特计了，但在实际应用中却并不容易。即使不能区分二者，但至少相角的大小是可以确定的，只是符号无法确定。这个信息也已经足够了：如果负载是一个感应式电动机，则相角必定是正的，因此不需要做任何测试就可以确定读数是哪一个瓦特计的。如果没有前面关于负载的假设，也有几种方法可以解决这个模糊问题。最简单的方法是增加一个高阻抗的电抗负载（也称为三相电容）并与未知负载并联，从而使负载就会变得更显容性。这样一来，如果$\tan\theta$的幅度（或θ的幅度）减小，那么负载就是感性的；如果$\tan\theta$的幅度增大，说明原先的负载是容性的。

例题 12.7 图 12.28 所示电路中的平衡负载由平衡三相电源系统供电，有效值 $\mathbf{V}_{ab} = 230\underline{/0^\circ}$ V，符合正相序列规则，确定每一个瓦特计的读数和负载吸收的总功率。

解： #1 瓦特计的电压线圈用于测量电压$\mathbf{V}_{ac}$，其电流线圈用于测量相电流$\mathbf{I}_{aA}$，已知这是一个正相序列，所以线电压为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= 230\underline{/0^\circ} \quad \text{V} \\ \mathbf{V}_{bc} &= 230\underline{/-120^\circ} \quad \text{V} \\ \mathbf{V}_{ca} &= 230\underline{/120^\circ} \quad \text{V} \end{aligned}$$

注意，$\mathbf{V}_{ac} = -\mathbf{V}_{ca} = 230\underline{/-60^\circ}$ V。

相电流 $\mathbf{I}_{aA}$ 由相电压 $\mathbf{V}_{an}$ 除以相阻抗 $4+j15\ \Omega$ 得到：

$$\mathbf{I}_{aA}=\frac{\mathbf{V}_{an}}{4+j15}=\frac{(230/\sqrt{3})\underline{/-30^\circ}}{4+j15}\ \text{A}$$
$$=8.554\underline{/-105.1^\circ}\ \text{A}$$

现在计算 #1 瓦特计测量出的功率如下：

$$P_1=|\mathbf{V}_{ac}|\,|\mathbf{I}_{aA}|\cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{ac}-\text{ang}\ \mathbf{I}_{aA})$$
$$=(230)(8.554)\cos(-60^\circ+105.1^\circ)\ \text{W}$$
$$=1389\ \text{W}$$

同样，通过计算得到：

$$P_2=|\mathbf{V}_{bc}|\,|\mathbf{I}_{bB}|\cos(\text{ang}\ \mathbf{V}_{bc}-\text{ang}\ \mathbf{I}_{bB})$$
$$=(230)(8.554)\cos(-120^\circ-134.9^\circ)\ \text{W}$$
$$=-512.5\ \text{W}$$

负载吸收的总功率为

$$P=P_1+P_2=876.5\ \text{W}$$

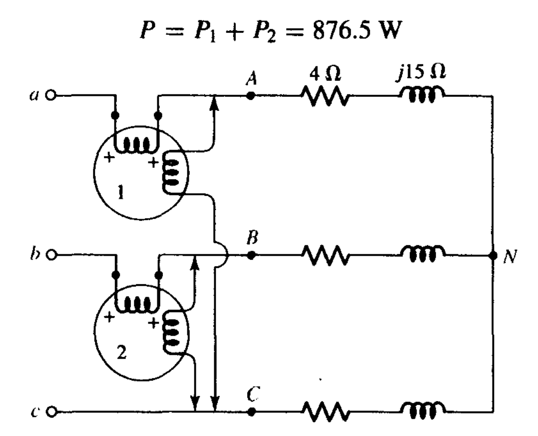


图 12.28　平衡三相系统连接平衡三相负载，利用双瓦特计技术测量功率

说明：由于测量结果将使指针停在低刻度上，因此为得到读数需要把其中的一个线圈反过来。

练习

12.10　电路如图 12.26 所示，已知负载 $\mathbf{Z}_A=25\underline{/60^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{Z}_B=50\underline{/-60^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{Z}_C=50\underline{/60^\circ}\ \Omega$，有效值 $\mathbf{V}_{AB}=600\underline{/0^\circ}$ V rms，符合正相序列规则，点 x 设置在 C 处，求：(a) P_A；(b) P_B；(c) P_C。

答案：0；7200 W；0。

总结和复习

- 大多数发电厂提供的都是三相电形式的电能。
- 北美的大多数民用电是单相交流电，频率为 60 Hz，电压有效值为 115 V，其余地方采用得最普遍的是 50 Hz、有效值为 240 V 的电压。
- 三相电源可以是Y形或Δ形连接。两种接法的电源都有3个终端，每个终端为一相，Y形接法的电源还有一条中线。

- 平衡三相系统中每一相电压的幅度相同，但相位之间两两相差 120°。
- 接在三相系统中的负载也有两种接法：Y 形和 Δ 形。
- 平衡的 Y 形三相电源符合正相序列（“abc”）规则，其线电压为

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_p\angle 30^\circ \qquad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p\angle -90^\circ$$
$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3}V_p\angle -210^\circ$$

相电压为

$$\mathbf{V}_{an} = V_p\angle 0^\circ \qquad \mathbf{V}_{bn} = V_p\angle -120^\circ \qquad \mathbf{V}_{cn} = V_p\angle -240^\circ$$

- 接有 Y 形负载的系统的线电流等于相电流。
- 接有 Δ 形负载的系统的线电压等于相电压。
- 符合正相序列规则的平衡系统的负载是平衡的 Δ 形，其线电流为

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB}\sqrt{3}\angle -30^\circ \qquad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC}\sqrt{3}\angle -150^\circ \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA}\sqrt{3}\angle +90^\circ$$

相电流为

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{bc}}{\mathbf{Z}_\Delta} \qquad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ca}}{\mathbf{Z}_\Delta}$$

- 假设系统是平衡的，则大多数功率计算都建立在每一相的基础上，否则，节点/网孔分析方法始终是有效的。
- 可以使用两个瓦特计测量三相系统（平衡或非平衡）的功率。
- 任何平衡三相系统中的瞬时功率都为常数。

深入阅读

下面这本书的第 2 章回顾了交流功率的概念：

B. M. Weedy, *Electric Power Syetems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984。

下面是一本关于风力发电的综合性书籍：

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins 和 E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Chichester, England: Wiley, 2001。

习题

12.1 多相系统

1. 用电压表测量实验室制作的一个电路，得到 $V_{be} = 0.7$ V，$V_{ce} = 10$ V。求 V_{bc}，V_{eb} 和 V_{cb}。
2. 采用 PSpice 对一个共源组态的场效应管放大器进行仿真。(a) 如果 $V_{gs} = -1$ V，$V_{ds} = 5$ V，求 V_{gd}；(b) 如果 $V_{ds} = 4$ V，$V_{gd} = 2.5$ V，求 V_{sg}。
3. 开发一个六相电源系统并作为大电流直流磁铁供能系统的一部分，写出下列两种情况下的相电压：(a) 正相序列；(b) 反相序列。
4. 如果 $\mathbf{V}_{xy} = 110\angle 20^\circ$ V，$\mathbf{V}_{xz} = 160\angle -50^\circ$ V 和 $\mathbf{V}_{ay} = 80\angle 130^\circ$ V，求：(a) $\mathbf{V}_{yz}$；(b) $\mathbf{V}_{az}$；(c) $\mathbf{V}_{zx}/\mathbf{V}_{xy}$。
5. 已知某电路的 $\mathbf{V}_{12} = 100\angle 0^\circ$，$\mathbf{V}_{45} = 60\angle 75^\circ$，$\mathbf{V}_{42} = 80\angle 120^\circ$ 和 $\mathbf{V}_{35} = -j120$，所有单位都是伏特（V），求：(a) $\mathbf{V}_{25}$；(b) $\mathbf{V}_{13}$。

6. 已知某交流系统的 $\mathbf{V}_{12} = 9\angle 87^\circ$ V，$\mathbf{V}_{23} = 8\angle 45^\circ$ V，计算：(a) $\mathbf{V}_{21}$；(b) $\mathbf{V}_{32}$；(c) $\mathbf{V}_{12} - \mathbf{V}_{32}$。
7. 已知某电力系统有 $\mathbf{V}_{an} = 400\angle -45^\circ$ V 和 $\mathbf{V}_{bn} = 400\angle 75^\circ$ V。(a) 画出包含 $\mathbf{V}_{cn}$ 的相量图；(b) 这是正相序列还是反相序列的系统？给出解释。
8. 给定的交流电流为 $\mathbf{I}_{12} = 33\angle 12^\circ$ A 和 $\mathbf{I}_{23} = 40\angle 12^\circ$ A，则 $\mathbf{I}_{31}$ 等于多少？
9. 如果已知某交流电路的电流 $\mathbf{I}_{12} = 5\angle 55^\circ$ A 和 $\mathbf{I}_{23} = 4\angle 33^\circ$ A，当工作频率为 50 Hz 时，电流 $\mathbf{I}_{31}$ 等于多少？

12.2　单相三线系统

10. 某三线系统如图 12.29 所示，电源电压为有效值 230/460 V，工作频率为 60 Hz，向 3 个负载提供能量：负载 AN 获得的复功率为 $10\angle 40^\circ$ kVA，负载 NB 获得 $8\angle 10^\circ$ kVA，负载 AB 需要 $4\angle -80^\circ$ kVA。求两个线电流和中线电流。
11. 平衡三线单相系统的负载 $\mathbf{Z}_{AN} = \mathbf{Z}_{NB} = 10\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{AB} = 16 + j12\ \Omega$。假设 3 条电线都没有电阻。设 $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 120\angle 0^\circ$ V。(a) 求 I_{aA} 和 I_{nN}；(b) 在负载 $\mathbf{Z}_{AN}$ 的边上并联另外一个 10 Ω 的电阻后系统不再平衡，求 I_{aA}，I_{bB} 和 I_{nN}。
12. 某低效率的三线单相系统的电源电压 $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 720\angle 0^\circ$ V，线电阻是 $R_{aA} = R_{bB} = 1\ \Omega$、$R_{nN} = 10\ \Omega$，负载 $\mathbf{Z}_{AN} = 10 + j3\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{NB} = 8 + j2\ \Omega$ 和 $\mathbf{Z}_{AB} = 18 + j0\ \Omega$。求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) $\mathbf{I}_{nN}$；(c) $P_{\text{wiring.total}}$；(d) $P_{\text{gen.total}}$。
13. 某平衡三线单相系统如图 12.30 所示，设 $V_{AN} = 220$ V，频率为 60 Hz。(a) 电容 C 的值为多少才能使负载的功率因数 PF = 1？(b) 电容传送了多少 kVA 的功率？

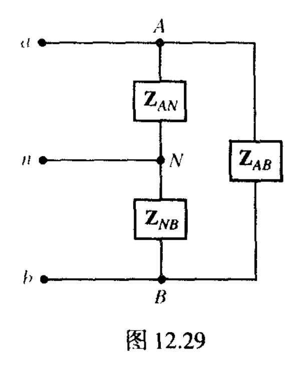


图 12.29

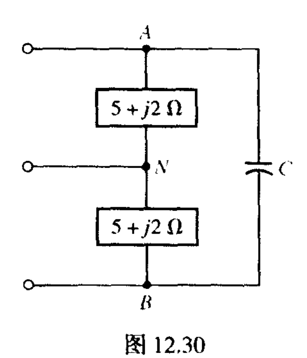


图 12.30

14. 某平衡三线单相系统如图 12.29 所示，电源电压 $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{nb} = 200\angle 0^\circ$ V，边线和中线电阻均为零，负载 $\mathbf{Z}_{AN} = \mathbf{Z}_{NB} = 12 + j3\ \Omega$。求阻抗 $\mathbf{Z}_{AB}$，使得：(a) $X_{AB} = 0$ 且 $I_{aA} = 30$ A rms；(b) $R_{AB} = 0$ 且 ang $\mathbf{I}_{aA} = 0^\circ$。

12.3　三相 Y-Y 形接法

15. 三相三线平衡系统如图 12.31 所示，符合正相序列规则。设 $\mathbf{V}_{BC} = 120\angle 60^\circ$ V 和 $R_w = 0.6\ \Omega$。如果总负载（包括线电阻）获得 5 kVA 的功率，PF 为 0.8 滞后，求：(a) 损失在线电阻上的总功率；(b) $\mathbf{V}_{an}$。
16. 平衡系统如图 12.31 所示，设 $\mathbf{V}_{an} = 2300\angle 0^\circ$ V，$R_w = 2\ \Omega$。假设符合正相序列规则，电源提供的总复功率为 $\mathbf{S} = 100 + j30$ kVA。求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) $\mathbf{V}_{AN}$；(c) $\mathbf{Z}_p$；(d) 传输效率。
17. 三相平衡系统如图 12.31 所示，设 $\mathbf{Z}_p = 12 + j5\ \Omega$，$\mathbf{I}_{bB} = 20\angle 0^\circ$ A，符合正相序列规则，如果电源的功率因数为 0.935，求：(a) R_w；(b) $\mathbf{V}_{bn}$；(c) $\mathbf{V}_{AB}$；(d) 电源提供的复功率。

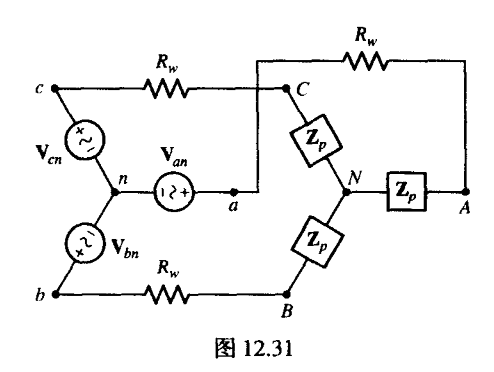


图 12.31

18. 某三相三线系统接有平衡 Y 形负载，每一条线和中心点之间由 75 Ω 电阻、125 mH 电感和 55 μF 电容串联而成。假设为正相序列，且 $V_p = 125$ V，频率为 60 Hz，求：线电流、负载吸收的总功率及负载的功率因数。

19. 一个无损耗的中线导体接在图 12.31 所示的三相系统的 n 和 N 之间，假设系统是平衡的且符合正相序列规则，但负载是不平衡的：$\mathbf{Z}_{AN} = 8 + j6\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{BN} = 12 - j16\ \Omega$，$\mathbf{Z}_{CN} = 5\ \Omega$。如果电压 $\mathbf{V}_{an} = 120\underline{/0^\circ}$ V rms，$R_w = 0.5\ \Omega$，求 $\mathbf{I}_{nN}$。

20. 某平衡电路如图 12.31 所示，$\mathbf{V}_{an} = 40\underline{/0^\circ}$ V（正相序列）。确定线电流和提供给负载的总功率，假设相阻抗 $\mathbf{Z}_p = 5 + j10\ \Omega$，$R_w$ 为：(a) 0 Ω；(b) 3 Ω。

21. 图 12.31 所示系统的相阻抗 $\mathbf{Z}_p$ 由 $75\underline{/25^\circ}$ Ω 的阻抗和 25 μF 的电容并联组成。设 $\mathbf{V}_{an} = 240\underline{/0^\circ}$ V，工作频率为 60 Hz，$R_w = 2\ \Omega$。求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) P_{wires}；(c) P_{load}；(d) 电源的功率因数。

22. 图 12.31 所示电路中的每一个负载都由感性阻抗 $100\underline{/28^\circ}$ Ω 和 500 nF 的电容并联而成。电阻 $R_w = 1\ \Omega$，正相序列，$\mathbf{V}_{ab} = 240\underline{/0^\circ}$ V，频率 $f = 50$ Hz，确定线电流的有效值、负载获得的总功率及电线损失的功率。用适当的 PSpice 仿真对答案进行验证。

23. 参见图 12.31 所示的平衡三相系统，$R_w = 0$，每一相的阻抗 $\mathbf{Z}_p = 10 + j5\ \Omega$。(a) 电源的功率因数是多少？(b) 假设工作频率 $f = 60$ Hz，求使得该电容与每一个相阻抗并联后的 PF 增加到 0.93 滞后的电容值；(c) 如果负载上的线电压为 440 V，则每一个电容获得的无功功率为多少？

24. 图 12.31 所示电路中的每一个负载由 1.5 H 的电感和 100 μF 的电容以及 1 kΩ 的电阻并联而成。电阻 $R_w = 0\ \Omega$，正相序列，$\mathbf{V}_{ab} = 115\underline{/0^\circ}$ V，频率 $f = 60$ Hz，确定线电流的有效值和提供给负载的总功率。用适当的 PSpice 仿真对答案进行验证。

12.4 Δ形接法

25. 图 12.32 所示是一个平衡三相三线电路。设 $R_w = 0\ \Omega$，$\mathbf{V}_{an} = 200\underline{/60^\circ}$ V。每一相负载吸收的复功率 $\mathbf{S}_p = 2 - j1$ kVA。假设符合正相序列规则，求：(a) $\mathbf{V}_{bc}$；(b) $\mathbf{Z}_p$；(c) $\mathbf{I}_{aA}$。

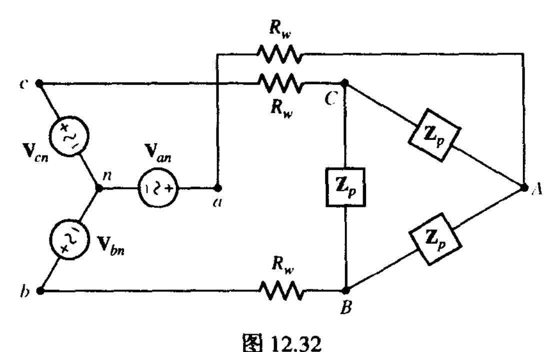


图 12.32

26. 图12.32所示的平衡Δ形负载需要15 kVA的功率，PF为0.8滞后。假设符合正相序列规则，$\mathbf{V}_{BC} = 180\underline{/30^\circ}$ V。若$R_w = 0.75\ \Omega$，求：(a) $\mathbf{V}_{bc}$；(b) 电源产生的总复功率。
27. 图12.32所示平衡负载获得的总复功率为$3 + j1.8$ kVA，电源产生的功率为$3.45 + j1.8$ kVA。若$R_w = 5\ \Omega$，求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) $\mathbf{I}_{AB}$；(c) $\mathbf{V}_{an}$。
28. 图12.32所示的Δ形负载获得1800 W的功率，PF为$\sqrt{2}/2$滞后，有240 W的功率损耗在线上，$R_w = 2.3\ \Omega$，求电源相电压的有效值和负载相电流的有效值。
29. 图12.33所示的电源是平衡的，且符合正相序列规则。求：(a) $\mathbf{I}_{aA}$；(b) $\mathbf{I}_{bB}$；(c) $\mathbf{I}_{cC}$；(d) 电源提供的总复功率。
30. 在图12.33所示的电路中，$\mathbf{V}_{AB} = 200\underline{/0^\circ}$ V，正相序列，设$R_w = 200\ \text{m}\Omega$，相阻抗$\mathbf{Z}_p$由10 Ω电阻和感抗30 Ω并联而成。确定电源提供的总功率、电源的功率因数和传输效率。
31. 参见图12.32所示的平衡三相Y形电源，$\mathbf{V}_{an} = 140\underline{/0^\circ}$ V rms，正相序列，设$R_w = 0\ \Omega$。平衡三相负载获得的功率为15 kW + 9 kVAR。求：(a) $\mathbf{V}_{AB}$；(b) $\mathbf{I}_{AB}$；(c) $\mathbf{I}_{aA}$。
32. 某三相系统如图12.34所示，假设电源是平衡的正相序列，工作频率为60 Hz，求下列参数值：(a) $\mathbf{V}_{AN}$；(b) $\mathbf{V}_{BN}$；(c) $\mathbf{V}_{CN}$。用PSpice仿真对答案进行验证。

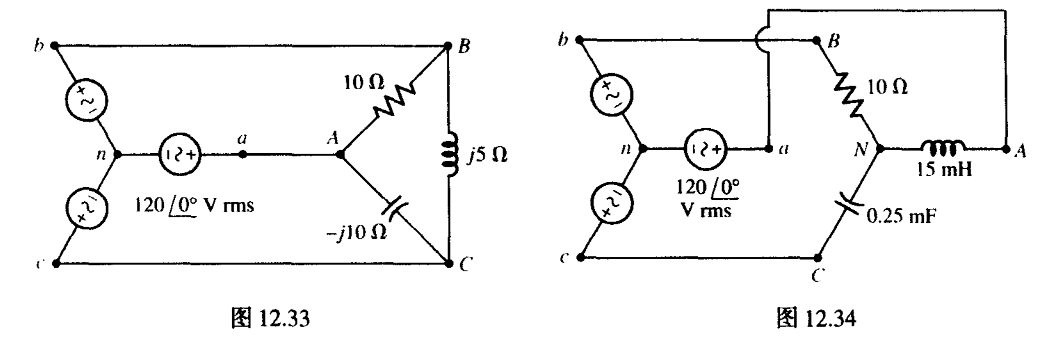


图12.33　　　　图12.34

33. (a) 在图12.33所示电路的每一条边线上接入1 Ω的电阻，按照习题29的要求，再做一遍。(b) 用PSpice仿真对答案进行验证。
34. 平衡三相系统的线电压为240 V rms，包含Δ形阻抗和Y形阻抗，其中Δ形负载的每一相阻抗均为负载12 + j kΩ，Y形负载的每一相阻抗为5 + j3 kΩ。求线电流、组合负载获得的功率及负载的功率因数。

12.5 三相系统的功率测量

35. 在图12.35所示电路中，如果端点A和B分别接：(a) x和y；(b) x和z；(c) y和z，确定瓦特计的读数（指出是否需要反接两个端点）。

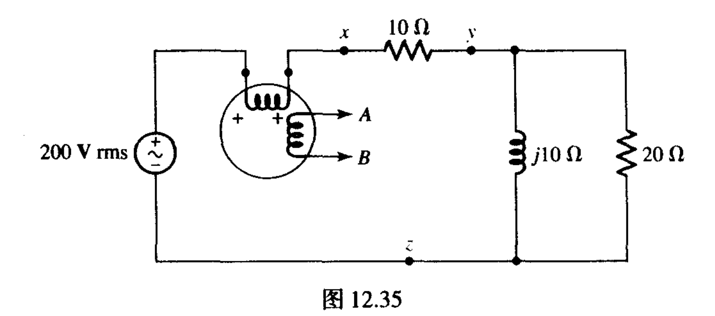


图12.35

36. 将瓦特计连接到图 12.36 所示的电路中，使得电流 $\mathbf{I}_1$ 流入电流线圈的“+”端，电压 $\mathbf{V}_2$ 就是跨接在电压线圈上的电压。求瓦特计的读数，并用 PSpice 仿真对答案进行验证。

37. 求连接在图 12.37 所示电路中的瓦特计的读数。

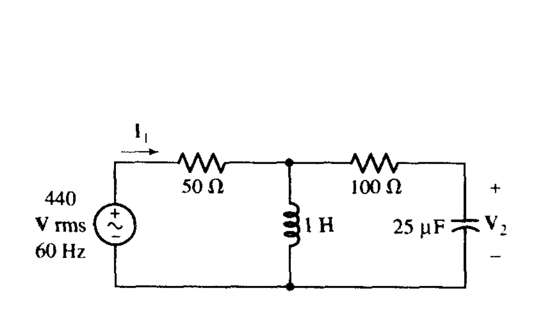


图 12.36

图 12.37

38. (a) 求图 12.38 所示电路中两个瓦特计的读数，假设电压 $\mathbf{V}_A = 100\underline{/0^\circ}$ V rms，$\mathbf{V}_B = 50\underline{/90^\circ}$ V rms，阻抗 $\mathbf{Z}_A = 10 - j10\ \Omega$，$\mathbf{Z}_B = 8 + j6\ \Omega$ 以及 $\mathbf{Z}_C = 30 + j10\ \Omega$；(b) 3 个瓦特计的读数之和等于 3 个负载获得的总功率吗？用 PSpice 仿真对答案进行验证。

39. 图 12.39 所示电路的参数如下：$\mathbf{V}_{ab} = 200\underline{/0^\circ}$，$\mathbf{V}_{bc} = 200\underline{/120^\circ}$，$\mathbf{V}_{ca} = 200\underline{/240^\circ}$ V rms，$\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_6 = 25\underline{/30^\circ}\ \Omega$，$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = 50\underline{/-60^\circ}\ \Omega$，求每一个瓦特计的读数。

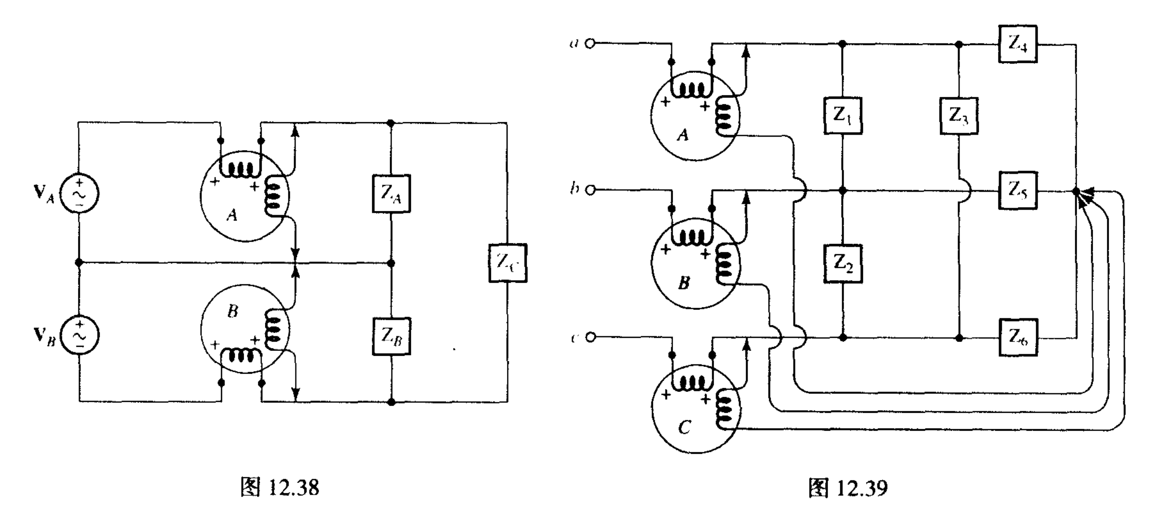


图 12.38　　图 12.39

40. 电路如图 12.32 所示，说明如何用下列两种方法测量负载上吸收的功率：(a) 3 个瓦特计；(b) 两个瓦特计。

41. 电路如图 12.31 所示，说明如何用下列两种方法测量负载上吸收的功率：(a) 3 个瓦特计；(b) 两个瓦特计。

第13章 磁耦合电路

主要概念

- 互感
- 自感
- 同名端规则
- 反射阻抗
- T形和Π形等效网络
- 理想变压器
- 理想变压器的匝数比
- 阻抗匹配
- 电压调整
- 含有变压器电路的 PSpice 分析

引言

不管是交流电流还是直流电流，当它们流过导线的时候，就会在导线的周围产生磁场。在电路领域中，通常会和穿过线圈的磁通量相关联，磁通量等于线圈磁场垂直分量的平均值与线圈截面积的乘积。当一个线圈产生的时变磁场穿过第二个线圈时，第二个线圈两端就会感应出电压。为了把这个现象与我们先前定义的电感区别开来，前者用一个新名词“互感”表示，后者更适合叫做“自感”。

虽然不存在“互感”这样的设备，但却有一种源于这个概念的非常重要的设备——变压器。变压器由两个靠得很近的独立线圈组成，通常根据应用完成对交流电压的升压或降压。所有需要在直流电下工作但却使用市电进行供电的电器在整流之前都会利用变压器进行变压，以使电压调整到合适的范围。整流功能通常由二极管实现，所有电子学导论的教材都有关于二极管的介绍。

13.1 互感

在第7章定义电感的时候，我们关注的是端口上的电压和电流关系：

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

这里假设满足无源符号规则。电压－电流特性建立在以下两个基本的物理概念之上：

1. 电流产生磁通量，磁通量与线性电感上的电流成正比。
2. 时变磁场产生电压，电压与磁场随时间的变化率或者磁通量随时间的变化率成正比。

互感系数

互感是在电感的基础上稍做推广而得到的。一个线圈中流过的电流不仅在自己周围产生磁通量，也在相邻的第二个线圈中产生磁通量。围绕第二个线圈的时变磁通量将在本线圈两端产生电压，

该电压与流过第一个线圈的时变电流成正比。图 13.1(a)所示的是线圈 L_1 和 L_2 的简单模型，两个线圈靠得足够近，流过电感 L_1 的电流 $i_1(t)$ 产生的磁通量在电感 L_2 两端建立起了开路电压 $v_2(t)$。若不考虑此处关系式中合适的代数符号，可将互感系数（或者简称互感）M_{21} 定义为

$$v_2(t) = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \qquad [1]$$

M_{21} 的下标顺序表示 L_1 中的电流源在 L_2 中产生的电压响应。如果系统反接，如图 13.1(b)所示，则

$$v_1(t) = M_{12}\frac{di_2(t)}{dt} \qquad [2]$$

采用两个互感系数是不必要的，稍后利用能量关系可以证明 M_{12} 和 M_{21} 是相等的，即 $M_{12} = M_{21} = M$。两个电感之间存在的相互耦合由图 13.1(a)和(b)中的双箭头表示。

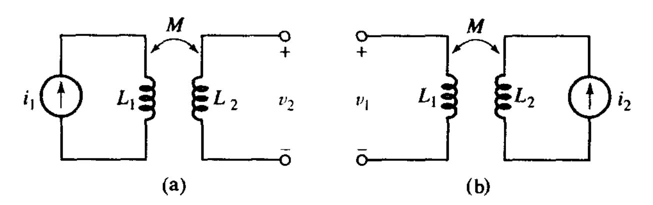


图 13.1 (a) 流过 L_1 的电流 i_1 在 L_2 两端产生开路电压 V_2;
(b) 流过 L_2 的电流 i_2 在 L_1 两端产生开路电压 V_1

互感的单位是亨利（H），与电阻、电感、电容一样，其值为正①。但是电压 $M\,di/dt$ 可以是正值也可以是负值，具体取决于某个时刻的电流是增加还是减少。

同名端规则

电感是两端元件，因此可以利用无源符号规则为电压 $L\,di/dt$ 或者 $j\omega L\mathbf{I}$ 选择正确的符号。如果流入电流的那端正好也是电压的正参考端，那么选用正号。但是这个方法不适合互感，因为互感有4个端点。有几种方法可以为互感选取正确的符号，其中包括同名端规则，或者通过考察每个线圈的缠绕方向来判断。我们经常使用"同名端"的方法，极少使用观察线圈物理结构的方法。当只有两个线圈的时候，则不需要使用其他的特殊符号。

两个线圈相互耦合，粗黑点表示的同名端置于每一个线圈的一端，我们可以按照以下规则确定感应电压的符号：

从一个线圈同名端流入的电流在第二个线圈的同名端产生正的感应电压。

因此，在图 13.2(a)中，电流 i_1 流入 L_1 的同名端，产生的 L_2 上的电压 v_2 在同名端为正，且 $v_2 = M\,di_1/dt$。以前曾经遇到过这样的情况，即在选取电路中电压和电流的参考极性时，并不总是能满足无源符号规则。在互感中也存在相同的情况。例如，电压 v_2 的正极性选择在非同名端比较方便，如图 13.2(b)所示，这时电压 $v_2 = -M\,di_1/dt$。电流也不是一直流入同名端的，如图 13.2(c)和(d)所示。因此我们注意到：

从一个线圈的非同名端流入的电流在第二个线圈的非同名端产生正的感应电压。

① 互感不总是假设为正的，当3个或更多的线圈相互耦合时，"自带符号"是特别方便的方法，本书只关注最重要的从而也是最简单的两个线圈的情况。

注意，前面的讨论没有涉及自感产生的电压。事实上，当电流 i_2 不等于零时是存在自感电压的。我们要详细讨论这个重要特性，但是在此之前先看一个例题。

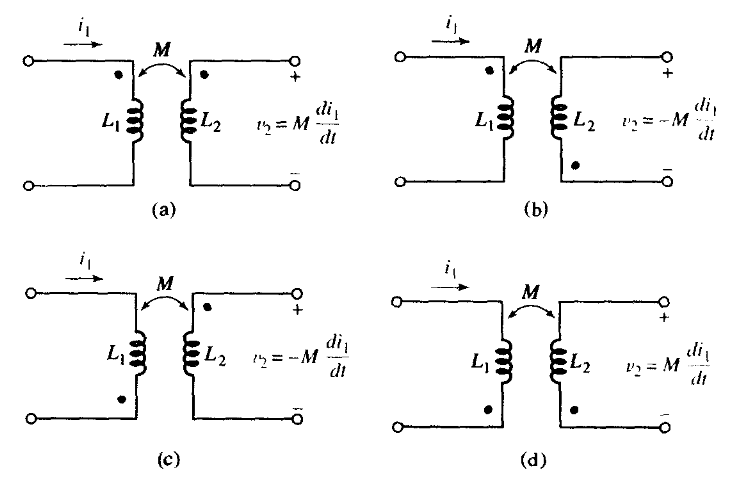


图 13.2 从一个线圈的同名端流入的电流在第二个线圈的同名端产生正的感应电压。从一个线圈的非同名端流入的电流在第二个线圈的非同名端产生正的感应电压

例题 13.1 电路如图 13.3 所示：(a) 当 $i_2 = 5\sin 45t$ A 和 $i_1 = 0$ 时，确定 v_1 的值；(b) 当 $i_1 = -8e^{-t}$ A 和 $i_2 = 0$ 时，确定电压 v_2 的值。

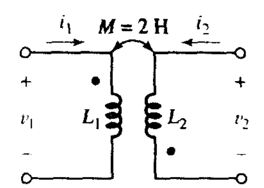


图 13.3 同名端规则提供了流入一个线圈的电流与另一个线圈上的正参考电压之间的关系

解： (a) 因为电流 i_2 从右边线圈的非同名端流入，从而在左边线圈感应产生的电压的正端应该位于非同名端，因此开路输出电压为

$$v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t \text{ V}$$

这是右边线圈中的电流 i_2 产生的时变磁通量在左边线圈中产生的电压，由于左边线圈中没有电流，所以自感对电压 v_1 没有贡献。

(b) 同名端有电流流入，但 v_2 的正参考极性位于非同名端，因此，

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t} \text{ V}$$

练习

13.1 假设 $M = 10$ H，线圈 L_2 开路，电流 $i_1 = -2e^{-5t}$ A，求下列两个电路图中的电压 v_2：(a) 图 13.2(a)所示电路；(b) 图 13.2(b)所示电路。

答案： $100e^{-5t}$ V；$-100e^{-5t}$ V。

互感和自感电压的组合

至此，我们只考虑了开路线圈上的互感电压。通常情况下，每一个线圈上的电流都不等于零，每一个线圈上产生的互感电压源于另一个线圈流过的电流。这个互感电压与自感电压无关，但却要叠加在自感电压上。换句话说，电感 L_1 两端的电压包含两项——$L_1\, di_1/dt$ 和 $M\, di_2/dt$，其中每一项的符号取决于电流的方向、电压的参考方向和两个同名端的位置。假定图 13.4 所示电路中的电流 i_1 和 i_2 均从同名端流入，则 L_1 两端的电压由两部分组成：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

同样，L_2 两端的电压为

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

在图 13.5 所示的电路中，标定的电压和电流并不能保证 v_1 和 v_2 的所有各项都为正。经过观察 i_1 和 v_1 的参考极性，显然不符合无源符号规则，$L_1\, di_1/dt$ 的符号应该是负的。同样的结论对 $L_2\, di_2/dt$ 也同样适用。v_2 的互感项根据 i_1 和 v_2 的方向确定。由于 i_1 流入同名端，v_2 的正参考极性在同名端，因此 $M\, di_1/dt$ 肯定是正的。最后，i_2 流入 L_2 的非同名端，v_1 的正参考极性在 L_1 的非同名端，从而 v_1 的互感部分 $M\, di_2/dt$ 也肯定是正的。由此得到

$$v_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

当激励源是频率为 ω 的正弦信号时，采用同样的分析方法可得到一致的符号，即

$$\mathbf{V}_1 = -j\omega L_1\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2 = -j\omega L_2\mathbf{I}_2 + j\omega M\mathbf{I}_1$$

图 13.4 由于 v_1，i_1 和 v_2，i_2 中的每一对都符合无源符号规则，因此各自的自感电压均为正。而电流 i_1 和 i_2 均流入同名端，v_1 和 v_2 在同名端为正，所以两个互感电压均为正

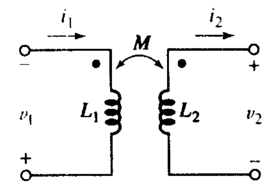


图 13.5 由于 v_1，i_1 和 v_2，i_2 不符合无源符号规则，所以各自的自感电压均为负。由于电流 i_1 流入同名端，电压 v_2 在同名端为正，所以 v_2 的互感项为正；而 i_2 流入非同名端，v_1 在非同名端为正，因此 v_1 的互感项仍为正

同名端的物理依据

现在来看一下同名端的物理依据，从而加深对同名端规则的深入理解。同名端在这里被诠释为磁通量。从图 13.6 中可见，圆柱体上绕着两个线圈，电线的缠绕方向清晰可见。假设电流 i_1 为正且随时间增大，根据右手法则，可以确定 i_1 电流在圆柱体中产生的磁通的方向：用右手握住线圈，手

指指向电流方向，则大拇指所指的方向即为线圈内磁通的方向。可见电流 i_1 产生的磁通方向向下，由于电流随时间增大，磁通量又与电流成正比，所以磁通量也随时间增加。我们再来看第二个线圈，同样假设电流 i_2 为正且随时间增大，利用右手法则同样可以知道 i_2 产生的磁通方向向下且随时间增加。换句话说，i_1 和 i_2 产生相加的磁通量。

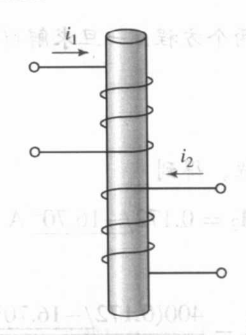


图 13.6　两个线圈相互耦合的物理结构。考虑到两个线圈产生的磁通方向，同名端或者位于每个线圈的上端，或者位于每个线圈的下端

任何线圈两端的电压源于线圈中磁通量随时间的变化率。第一个线圈两端的电压在有 i_2 电流流过时要比 i_2 电流等于零时大，电流 i_2 在第一个线圈感应产生的电压与第一个线圈产生的自感电压具有相同极性，自感电压符合无源符号规则，因此可以得到互感电压的符号。

同名端规则仅仅忽略了线圈的物理结构，只用一个点分别放置在每个线圈的一端，使得从同名端流入的电流可产生相加的磁通。很显然，总有两种可能的设置同名端的方法，因为同时将两个线圈的同名端移到其另一端，因此这种磁通相加关系仍然成立。

例题 13.2　电路如图 13.7(a)所示，求 400 Ω 电阻上的电压与电源电压的比值，用相量（phasor）形式表示。

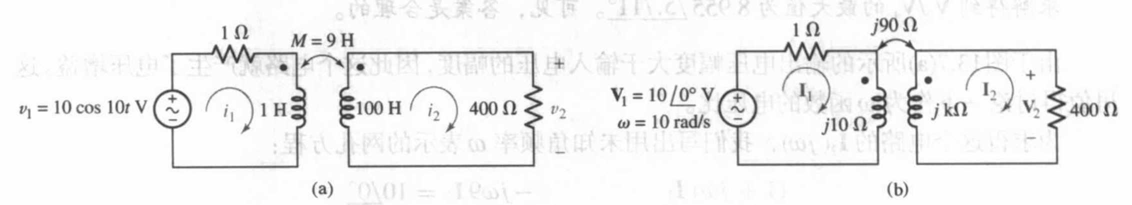


图 13.7　(a) 含有互感的电路，需要求解电压比 V_2/V_1；(b) 将自感和互感用相应的阻抗替换

解：▶ 明确题目要求

我们需要求出 $\mathbf{V}_2$ 的数值，然后除以 $10\underline{/0°}$ V。

▶ 收集已知信息

首先将 1 H 和 100 H 的电感分别用相应的阻抗 $j10\ \Omega$ 和 $j\text{k}\Omega$ 代入，如图 13.7(b)所示。同样，还需要将 9 H 的电感用阻抗 $j\omega M = j90\ \Omega$ 代入。

▶ 设计方案

因为有两个定义清晰的网孔，所以网孔分析是比较好的方法。一旦得到 $\mathbf{I}_2$，则 $\mathbf{V}_2$ 仍等于 $400\,\mathbf{I}_2$。

▶ 建立一组合适的方程

对左边的网孔，互感项的符号由同名端确定。由于 $\mathbf{I}_2$ 流入 L_2 的非同名端，因此产生在 L_1 上的互感电压在非同名端的参考极性为正，所以，

$$(1 + j10)\mathbf{I}_1 - j90\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

因为$\mathbf{I}_1$流入同名端，则右边互感电压参考极性在100 H电感的同名端为正，因此可以写出

$$(400 + j1000)\mathbf{I}_2 - j90\mathbf{I}_1 = 0$$

▶ 确定是否还需要其他信息

由于有两个未知变量$\mathbf{I}_1$和$\mathbf{I}_2$以及两个方程，一旦求解得到两个电流，则输出电压$\mathbf{V}_2$为$\mathbf{I}_2$乘以400 Ω。

▶ 尝试求解

利用科学计算器求解上述两个方程，得到

$$\mathbf{I}_2 = 0.172\underline{/-16.70^\circ}\ \text{A}$$

因此，

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400(0.172\underline{/-16.70^\circ})}{10\underline{/0^\circ}} = 6.880\underline{/-16.70^\circ}$$

▶ 验证结果是否合理或是否与预计相符

我们注意到输出电压$\mathbf{V}_2$的幅度远大于输入电压$\mathbf{V}_1$。这是我们预期的吗？答案是否定的。后面会讲到，变压器既可以实现升压，也可以实现降压。现在做一个快速的估计以得到结果的上限和下限。如果400 Ω的电阻被短路，则$\mathbf{V}_2 = 0$ V；如果400 Ω的电阻被开路，则$\mathbf{I}_2 = 0$。因此，

$$\mathbf{V}_1 = (1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1$$

和

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1$$

求解得到$\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$的最大值为$8.955\underline{/5.711^\circ}$。可见，答案是合理的。

由于图13.7(a)所示的输出电压幅度大于输入电压的幅度，因此这个电路就产生了电压增益。这里值得讨论一下作为ω函数的电压比。

为求得这个电路的$\mathbf{I}_2(j\omega)$，我们写出用未知角频率ω表示的网孔方程：

$$(1 + j\omega)\mathbf{I}_1 \qquad -j\omega 9\mathbf{I}_2 = 10\underline{/0^\circ}$$

和

$$-j\omega 9\mathbf{I}_1 + (400 + j\omega 100)\mathbf{I}_2 = 0$$

代入求解，得到

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

此时可以求出作为频率ω的输出电压与输入电压的比值函数：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{400\mathbf{I}_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

比值的幅度也称为电路传输函数，如图13.8所示，其峰值出现在频率4.6 rad/s处且约等于7。但在频率很低和很高时，传输函数的幅度值小于1。

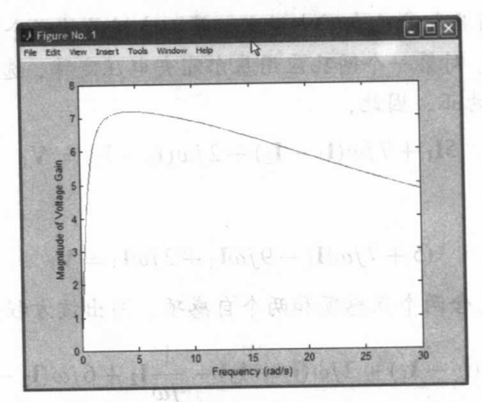


图 13.8　图 13.7(a)所示电路的电压增益 $|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$ 随着 ω 变化的曲线，该曲线由下面的 MATLAB 语句描述：

```
>>w = linspace(0,30,1000);
>>num = j*w*3600;
>>for indx = 1:1000
den = 400+j*500*w(indx)-19*w(indx)*w(indx);
gain(indx) = num(indx)/den;
end
>>plot(w,abs(gain));
>>xlabe('Frequency(rad/s)');
>>ylabe('Magnitude of Voltage Gain')
```

除了电压源，该电路是无源的。此外，不要将电压增益误解为功率增益。在 $\omega = 10$ rad/s 时，电压增益等于6.88，而理想电压源的端口电压是10 V，输出总功率为8.07 W，但是400 Ω 的电阻负载上得到的功率只有5.94 W。输出功率与电源功率的比值也称为功率增益，该值只有0.736。

练习

13.2　电路如图13.9所示，对左边和右边网孔写出正确的网孔方程，设 $v_s = 20e^{-1000t}$ V。

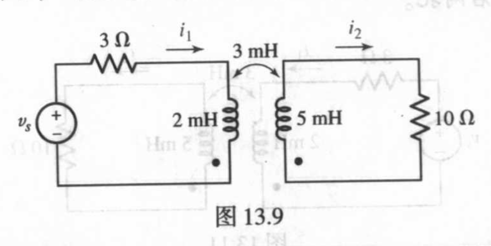


图 13.9

答案：$20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002di_1/dt - 0.003di_2/dt$；$10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003di_1/dt = 0$。

例题 13.3　电路如图13.10(a)所示，写出完整的相量方程组。

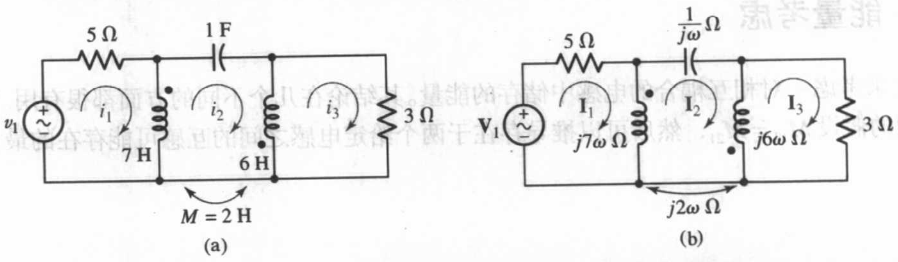


图 13.10　(a) 含有互感的三网孔电路；(b) 1 F的电容以及自感和互感均被相应的阻抗代替

解： 电路含有3个网孔，网孔电流已在图中设定。第一步还是将两个互感和自感用相应的阻抗代入，如图13.10(b)所示。对第一个网孔应用基尔霍夫电压定律，选择流过第二个线圈的电流为（$\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2$），使得互感项为正，因此，

$$5\mathbf{I}_1+7j\omega(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)+2j\omega(\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)=\mathbf{V}_1$$

或者

$$(5+7j\omega)\mathbf{I}_1-9j\omega\mathbf{I}_2+2j\omega\mathbf{I}_3=\mathbf{V}_1 \qquad [3]$$

第二个网孔方程包含两个互感项和两个自感项，写出该方程如下：

$$7j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)+2j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)+\frac{1}{j\omega}\mathbf{I}_2+6j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_3)$$
$$+2j\omega(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)=0$$

或者

$$-9j\omega\mathbf{I}_1+\left(17j\omega+\frac{1}{j\omega}\right)\mathbf{I}_2-8j\omega\mathbf{I}_3=0 \qquad [4]$$

最后写出第三个网孔方程：

$$6j\omega(\mathbf{I}_3-\mathbf{I}_2)+2j\omega(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)+3\mathbf{I}_3=0$$

或者

$$2j\omega\mathbf{I}_1-8j\omega\mathbf{I}_2+(3+6j\omega)\mathbf{I}_2=0 \qquad [5]$$

任何传统的方法都可以求解式[3]~式[5]。

练习

13.3 电路如图13.11所示，对下列两个网孔分别写出以相量电流$\mathbf{I}_1$和$\mathbf{I}_2$为变量的网孔方程：(a) 左网孔；(b) 右网孔。

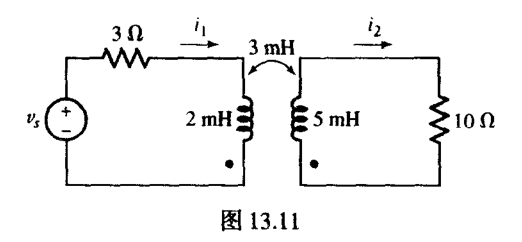


图 13.11

答案： $\mathbf{V}_s=(3+j10)\mathbf{I}_1-j15\mathbf{I}_2$；$0=-j15\mathbf{I}_1+(10+j25)\mathbf{I}_2$。

13.2 能量考虑

现在来考虑一对相互耦合的电感中储存的能量。其结论在几个不同的方面都很有用。首先可以证明我们的假设$M_{12}=M_{21}$，然后可以推导存在于两个给定电感之间的互感可能存在的最大值。

M_{12} 和 M_{21} 的等价性

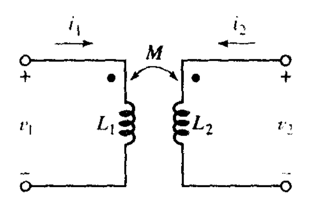


图 13.12 具有互感 $M_{12}=M_{21}=M$ 的一对耦合线圈

一对耦合线圈如图 13.12 所示，电流、电压和同名端均在图中标出。为了证明 $M_{12}=M_{21}$，首先假设所有的电压和电流均为零，即网络中的初始储能等于零。然后令右边的一对端点开路，从零开始增加电流 i_1，在 $t=t_1$ 时，电流达到恒定（直流）值 I_1。任何时刻从左边进入网络的功率为

$$v_1i_1=L_1\frac{di_1}{dt}i_1$$

从右边进入网络的功率为

$$v_2i_2=0$$

因为电流 $i_2=0$。

当电流 $i_1=I_1$ 时，网络储存的能量由下式求得：

$$\int_0^{t_1}v_1i_1\,dt=\int_0^{I_1}L_1i_1\,di_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

现在保持 i_1 恒定（$i_1=I_1$），而让 i_2 在 $t=t_1$ 时从零增加到 $t=t_2$ 时的恒定值 I_2，则右边电源提供给网络的能量为

$$\int_{t_1}^{t_2}v_2i_2\,dt=\int_0^{I_2}L_2i_2\,di_2=\frac{1}{2}L_2I_2^2$$

即使电流 i_1 保持恒定，左边的电源仍然在这段时间内向网络提供能量：

$$\int_{t_1}^{t_2}v_1i_1\,dt=\int_{t_1}^{t_2}M_{12}\frac{di_2}{dt}i_1\,dt=M_{12}I_1\int_0^{I_2}di_2=M_{12}I_1I_2$$

当电流 i_1 和 i_2 都达到恒定值时，网络中储存的总能量为

$$W_{\text{total}}=\tfrac{1}{2}L_1I_1^2+\tfrac{1}{2}L_2I_2^2+M_{12}I_1I_2$$

现在，我们用相反的顺序在网络中建立相同的电流值，即首先让电流 i_2 从零增加到 I_2 并保持不变，然后再将电流 i_2 从零增加到 I_1。如此一来计算得到的网络储存的总能量必定为

$$W_{\text{total}}=\tfrac{1}{2}L_1I_1^2+\tfrac{1}{2}L_2I_2^2+M_{21}I_1I_2$$

两者唯一的差别是互换了互感量 M_{12} 和 M_{21}。由于网络的初始条件和终止条件是相同的，因此这两个储存的能量值必须相等，即

$$M_{12}=M_{21}=M$$

和

$$W=\tfrac{1}{2}L_1I_1^2+\tfrac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2 \tag{6}$$

如果一个电流流入同名端，而另一个电流流出同名端，则应改变互感项的符号：

$$W=\tfrac{1}{2}L_1I_1^2+\tfrac{1}{2}L_2I_2^2-MI_1I_2 \tag{7}$$

尽管式[6]和式[7]是在两个电流的终值达到恒定值时推导出来的，但是恒定值可以是任何数值。当瞬时值 i_1 和 i_2 分别达到 I_1 和 I_2 的时候，能量表达式正确反映了储存的能量。换句话说，也可以用小写符号表示能量：

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 \pm M[i_1(t)][i_2(t)] \tag{8}$$

式[8]成立的唯一假设是当两个电流都为零时能量为零。

建立 *M* 的上限

式[8]可以用来建立 M 值的上限。因为 $w(t)$ 表示的是无源网络储存的能量，因此对任何 i_1、i_2、L_1、L_2 和 M，其值非负。首先假设电流 i_1 和 i_2 同时为正或者同时为负，则它们的乘积为正。式[8]可能取负值的唯一情况是

$$w = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

配方后得到

$$w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2\right)^2 + \sqrt{L_1 L_2}i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

现实情况中，能量不可能为负值，所以上式的右边不能为负。由于第一项的最小值为零，所以得到后两项不为负的约束条件为

$$\sqrt{L_1 L_2} \geqslant M$$

或者

$$M \leqslant \sqrt{L_1 L_2} \tag{9}$$

互感的幅度存在可能的最大值，该值不超过两个线圈电感量的几何平均值。虽然推导出的不等式是建立在两个电流 i_1 和 i_2 具有相同数学符号的假设基础上的，但是如果符号相反，则只要在式[8]中选择正号，同样可以推导出上述结论。

从磁耦合的物理含义上一样可以说明不等式[9]的真实性。如果电流 i_2 保持为零，电流 i_1 产生的磁通量贯串 L_1 和 L_2，显然穿过 L_2 的磁通量不可能大于 L_1 中的磁通量，也就是总的磁通量。定性地讲，存在于两个给定电感之间的互感受最大值的限制。

耦合系数

M 趋于其最大值的程度由耦合系数来表示，其定义为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{10}$$

因为 $M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$，所以

$$0 \leqslant k \leqslant 1$$

当两个线圈相距很近或者由于采用某种缠绕方法使它们的公共磁通较大时，或者由于采用特殊的材料（高导磁率材料）使磁通集中通过该材料时，得到的耦合系数都很大。由于线圈的耦合系数非常接近于1，因此称其为紧耦合。

例题 13.4 电路如图 13.13 所示，设 $L_1 = 0.4$ H，$L_2 = 2.5$ H，$k = 0.6$，电流 $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500t - 20^\circ)$ mA。计算 $t = 0$ 时下列各物理量的值：(a) i_2；(b) v_1；(c) 系统储存的总能量。

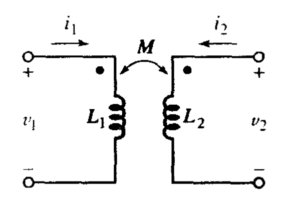


图13.13 互感系数为0.6的两个耦合线圈：$L_1 = 0.4$ H；$L_2 = 2.5$ H

解：(a) 由于 $i_2(t) = 5\cos(500t - 20°)$ mA，因此 $i_2(0) = 5\cos(-20°) = 4.698$ mA。

(b) 为了确定电压 v_1，既需要考虑线圈1的自感也需要考虑互感，注意同名端的规则：

$$v_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

要计算上式，首先需求出 M 的值，利用式[10]：

$$M = k\sqrt{L_1L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6\text{ H}$$

从而可得 $v_1(0) = 0.4[-10\sin(-20°)] + 0.6[-2.5\sin(-20°)] = 1.881$ V。

(c) 每个电感储存的能量之和即为总能量，它由3部分组成。由于已知线圈之间的磁耦合且电流均流入同名端，因此，

$$w(t) = \tfrac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \tfrac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 + M[i_1(t)][i_2(t)]$$

利用(a)得到的 $i_2(0) = 4.698$ mA和 $i_1(0) = 4i_2(0) = 18.79$ mA，求得两个线圈中储存的总能量在 $t = 0$ 时为151.2 μJ。

练习

13.4 设 $i_s = 2\cos 10t$ A，电路如图13.14所示，在 $t = 0$ 时求储存在无源网络中的总能量。假设 $k = 0.6$，端点 x 和 y 有两种连接方式：(a) 开路；(b) 短路。

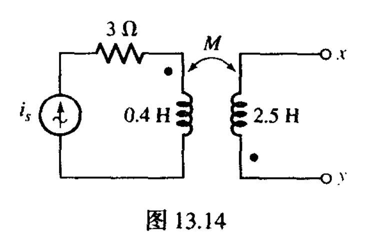


图13.14

答案：0.8 J；0.512 J。

13.3 线性变压器

现在利用磁耦合的概念来解释两个实际使用的器件,其中每一个都可以用含有互感的模型来表示。这两个器件都叫变压器,我们用这样的术语来定义含有两个或更多个线圈且实现了精致磁耦合的网络（见图13.15）。本节讨论的是线性变压器，它是应用在射频波段或更高频段的实际线性变压器的最好模型。13.4节讨论的是理想变压器，它是实际变压器的理想化模型，耦合系数等于1。其中磁芯由某种磁性材料制成，通常采用铁合金。

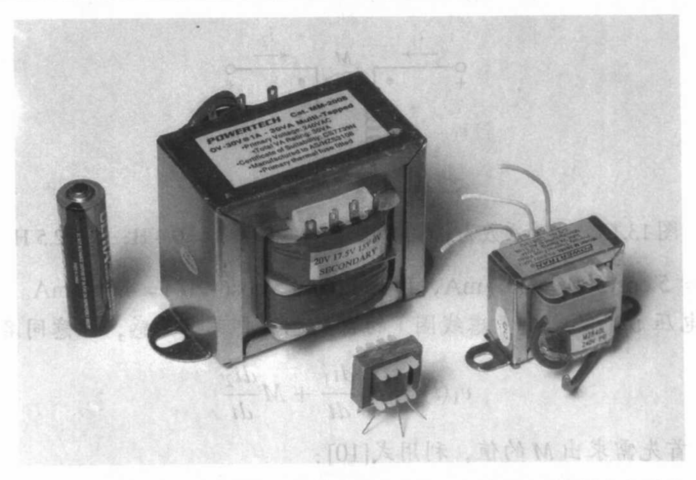


图 13.15 应用于电子设备中的小变压器，电池 AA 用于尺寸对比

图 13.16所示的电路有两个网孔电流。第一个网孔通常包含激励源，称为初级；第二个网孔通常包含负载，称为次级。标记L_1和L_2的电感也分别称为变压器的初级线圈和次级线圈。假设变压器是线性的，也就是说不含磁芯材料（它会导致非线性时变磁通关系）。如果没有磁芯，耦合系数要超过零点几都是非常困难的。两个电阻代表初级和次级线圈的导线电阻以及任何损耗。

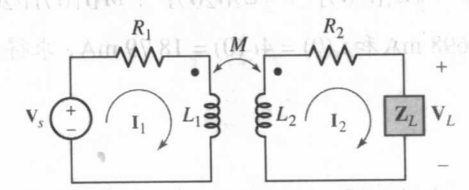


图 13.16 线性变压器初级线圈接电源，次级线圈接负载，初级和次级回路均含有电阻

反射阻抗

考虑初级线圈端口的输入阻抗，写出两个网孔方程：

$$\mathbf{V}_s = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \tag{11}$$

和

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \tag{12}$$

将阻抗定义如下，从而将上式简化为

$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 + j\omega L_1 \qquad 和 \qquad \mathbf{Z}_{22} = R_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

因此，

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \tag{13}$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{14}$$

求解第二个方程，得到电流$\mathbf{I}_2$。将其代入第一个方程，得到输入阻抗为

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega)^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \tag{15}$$

说明： $\mathbf{Z}_{in}$ 是从变压器初级线圈两端看进去的阻抗。

展开表达式之前，我们可以得到几个结论：第一，输入阻抗与同名端的位置无关，即使其中一个线圈的同名端改变了位置，也只是在式[11]至式[14]中含有 M 的项前面改变了符号，而不会改变式[15]。也可以这样理解：将 M 用 $-M$ 代入对输入阻抗没有任何影响，因为式[15]不变。我们还注意到，当耦合降低至零时，输入阻抗（见式[15]）将与 $\mathbf{Z}_{11}$ 相同。当耦合从零开始增加时，输入阻抗与 $\mathbf{Z}_{11}$ 之间相差一项，即 $\omega^2M^2/\mathbf{Z}_{22}$，我们称其为反射阻抗。如果展开 $\mathbf{Z}_{in}$，可以更清楚地理解变化的部分：

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

对反射阻抗进行有理化，得到

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

由于 $\omega^2M^2R_{22}/(R_{22}^2 + X_{22}^2)$ 必定为正，所以次级电路的存在增加了初级电路的损耗。换句话说，次级电路其实是增加了初级电路的电阻 R_1 的值。更进一步说，次级电抗反射到初级的结果与 X_{22} 符号相反。这里 X_{22} 是次级回路的净电抗，它等于 ωL_2 与 X_L 的和，对感性负载而言是正的；对容性负载而言，可能是正的，也可能是负的，具体取决于负载电抗的幅度。

练习

13.5　线性变压器的元件参数为：$R_1 = 3\ \Omega$，$R_2 = 6\ \Omega$，$L_1 = 2$ mH，$L_2 = 10$ mH，$M = 4$ mH。如果 $\omega = 5000$ rad/s，求 $\mathbf{Z}_{in}$，其中 $\mathbf{Z}_L$ 分别为：(a) $10\ \Omega$；(b) $j20\ \Omega$；(c) $10 + j20\ \Omega$；(d) $-j20\ \Omega$。

答案： $5.32 + j2.74\ \Omega$；$3.49 + j4.33\ \Omega$；$4.24 + j4.57\ \Omega$；$5.56 - j2.82\ \Omega$。

T 形和 Π 形等效网络

为方便起见，通常需要将变压器变换为T形或Π形等效网络。如果将初级和次级线圈的电阻从变压器中分离出来，那么剩下的就只有相互耦合的两个电感，如图 13.17 所示。注意，变压器的两个下端点已经连在一起，从而成为一个三端网络。这样做是因为等效网络都是三端的缘故。这里再次写出描述电路特性的微分方程：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad [16]$$

和

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} \qquad [17]$$

我们很熟悉这两个方程，用网孔分析法可以很容易地给出方程的解释。选择顺时针电流 i_1 和逆时针电流 i_2，这两个电流恰好就是如图 13.17 所示的电流 i_1 和 i_2。式[16]中的 $M\ di_2/dt$ 和式[17]中的 $M\ di_1/dt$ 表明两个网孔有一个共同的自感 M。由于围绕左边网孔的总电感是 L_1，所以只在第一个网孔插入自感 $L_1 - M$，该自感不插入第二个网孔；同样，第二个网孔需要插入 $L_2 - M$，但不需要插入第一个网孔。结果得到如图 13.18 所示的等效网络。由于这两个网络的相关 v_1，i_1，v_2 和 i_2 不变，所以两个网络一定是等效的。



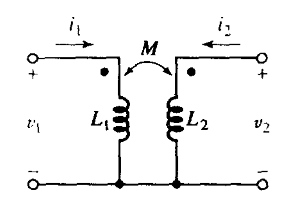


图 13.17 可用T形或Π形等效网络替换的给定变压器

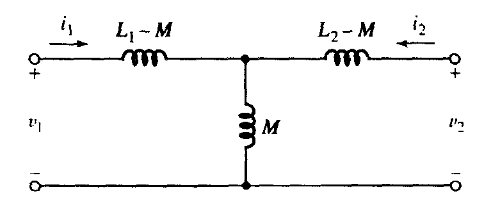


图 13.18 图 13.17 所示变压器的T形等效网络

如果给定变压器的一个同名端位置发生了改变且置于线圈的另一端，则式[16]和式[17]的互感项前面改为负号。在图 13.18 中将 M 用 $-M$ 代替可以类推出这种情况下的等效网络，其中 3 个电感值分别为：L_1+M，$-M$，L_2+M。

T形网络中的电感都是自感，不存在互感。电路等效时，可能会得到负值的电感。如果只是进行数学分析，这也不是什么本质问题。然而在构建一个实际的等效网络时，任何形式的负电感都是不允许的。有时候在对给定的传输函数进行网络综合时，会出现含有负电感的T形网络，这时必须采用合适的线性变压器来实现该网络。

例题 13.5 某线性变压器如图 13.19(a)所示，求等效的T形网络。

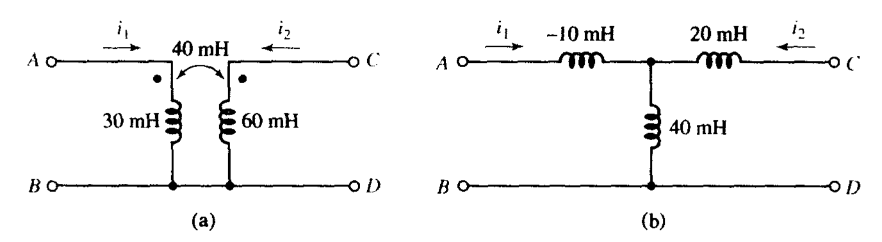


图 13.19 (a) 线性变压器的例子；(b) 变压器的T形等效网络

解： 从图中可知 $L_1 = 30\text{ mH}$，$L_2 = 60\text{ mH}$，$M = 40\text{ mH}$，且同名端全部位于上端点，可见与图 13.17 所示的基本电路一致。

因此，$L_1 - M = -10\text{ mH}$ 位于左上臂，$L_2 - M = 20\text{ mH}$ 位于右上臂，中间的 $M = 40\text{ mH}$。完整的等效T形网络如图 13.19(b)所示。

为了证明这两个网络是等效的，在图 13.19(a)中令 C 和 D 之间开路，电压 $v_{AB} = 10\cos 100t$ V 加在输入端，则

$$i_1 = \frac{1}{30\times10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\sin 100t \text{ A}$$

和

$$\begin{aligned} v_{CD} &= M\frac{di_1}{dt} = 40\times10^{-3}\times3.33\times100\cos 100t \\ &= 13.33\cos 100t \quad \text{V} \end{aligned}$$

在T形网络中加入同样的电压，可得

$$i_1 = \frac{1}{(-10+40)\times10^{-3}}\int 10\cos(100t)\,dt = 3.33\sin 100t \quad \text{A}$$

同样，CD 间的电压等于 40 mH 电感两端的电压，即

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \quad \text{V}$$

由此证明两个网络等效。

练习

13.6　(a) 假如图 13.20 所示的两个网络等效，确定 L_x，L_y 和 L_z 的值。(b) 如果图 13.20(b) 中的次级线圈的同名端位于底部，重新确定电感的值。

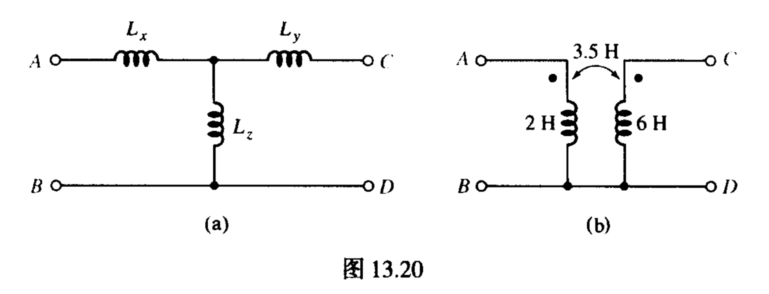


图 13.20

答案：(a) −1.5 H，2.5 H，3.5 H；5.5 H，9.5 H，−3.5 H。

等效Π形网络不太容易得到。这种网络很复杂，也不常用。构造该模型的方法如下：求解式[17]，得到 di_2/dt，将其代入式[16]，可得

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

或者

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2$$

从 0 到 t 积分，可得

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 \, dt' - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 \, dt' \quad [18]$$

同理可得

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 \, dt' + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 \, dt' \quad [19]$$

式[18]和式[19]可解释为一对节点方程，其中每个节点都需要加入一个阶跃电流源以保证满足初始条件。每个积分项前面的系数可以写成更一般的形式，即某个等效电感的倒数，比如，式[18]的第二项系数 $M/(L_1L_2 - M^2)$ 等于 $1/L_B$，即节点 1 和节点 2 之间存在的电感的倒数，如图 13.21 所示。所以，

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$$

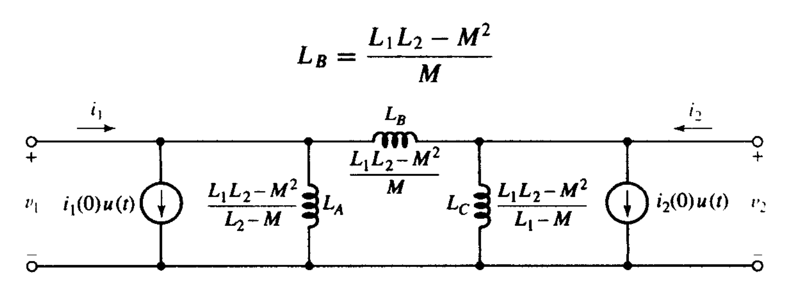


图 13.21　图 13.17 所示变压器的等效Π形网络

式[18]中的第一个系数 $L_2/(L_1L_2 - M^2)$就是 $1/L_A + 1/L_B$，即

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

或

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

最后，

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

Π形等效电路中不存在磁耦合，3个自感中的初始电流均为零。

由于变压器中的一个同名端改变了位置，因此只需在等效电路中含有M的地方改变符号即可。与处理T形网络相同，等效Π形电路中也可能出现负自感。

例题 13.6 某变压器如图 13.19(a)所示，假设初始电流等于零，求等效的Π形网络。

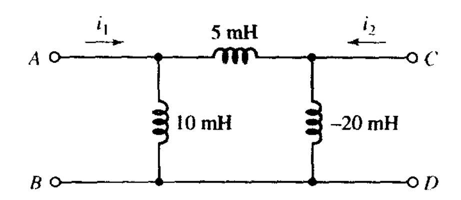


图 13.22 图 13.19(a)所示线性变压器的等效Π形网络。假设 $i_1(0) = 0$，$i_2(0) = 0$

解： 由于 $L_1L_2 - M^2$ 是 L_A，L_B，L_C 的公共项，所以应先求出这个值：

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4}\ \mathrm{H}^2$$

因此，

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10\ \mathrm{mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20\ \mathrm{mH}$$

和

$$L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5\ \mathrm{mH}$$

等效Π形网络如图 13.22 所示。

现在来检验结果，设 $v_{AB} = 10\cos 100t$ V，CD 间开路，利用分压定理可很快得到开路输出电压：

$$v_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10\cos 100t = 13.33\cos 100t \qquad \mathrm{V}$$

该结果与前面所得结果相同，从而说明图 13.22 所示网络与图 13.19(a)和图 13.19(b)所示网络在电性能上是等效的。

练习

13.7　如果图 13.23 所示的两个网络是等效的，确定 L_A，L_B，L_C 的值，单位采用 mH。

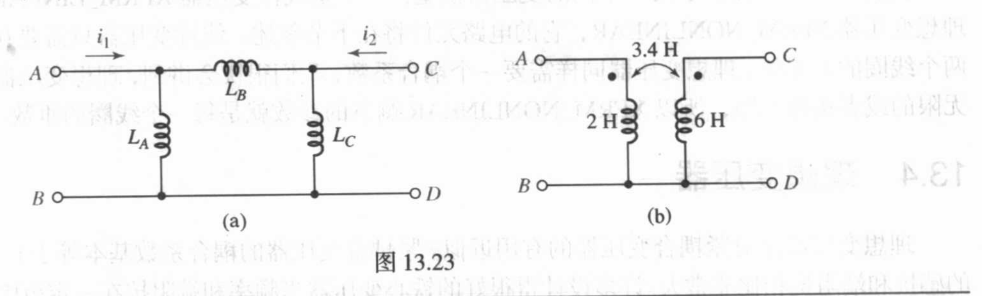


图 13.23

答案： $L_A = 169.2$ mH，$L_B = 129.4$ mH，$L_C = -314.3$ mH。

计算机辅助分析

对含有磁耦合电感的电路进行仿真是一种很有用的技能，尤其对尺寸持续减少的现代电路更是如此。新的电路设计使得导线回路靠得非常近，各种电路或者子电路之间虽然要求隔离，但是不可避免地会由于寄生磁场耦合而导致相互作用。使用 PSpice 通过 K_Linear 可以处理这种效应，它将原理图中的一对电感的耦合关系用耦合系数 k 表示出来，其中 $0 \leqslant k \leqslant 1$。

例如，对图 13.19(a)所示的电路进行仿真。该电路含有两个线圈，耦合关系由互感 $M = 40$ mH 体现，相应的耦合系数 $k = 0.9428$。原理电路如图 13.24 所示。注意，图中没有显示电感边上的同名端符号。将电感符号水平放置在原理图上的时候，默认的同名端位于左端，同名端也是该符号旋转的中心，同时我们注意到 K_Linear 器件没有接到电路中，可以将其放到任何地方，而两个耦合电感 L1 和 L2 则与耦合系数一起通过该器件的对话框加以设定。

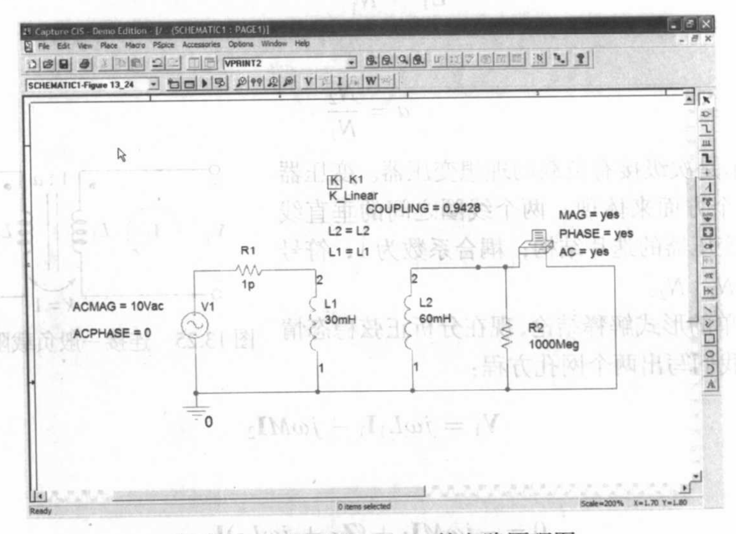


图 13.24　基于图 13.19(a)的电路原理图

电路与一个 100 rad/s(15.92 Hz)的正弦电压源相连，事实上相当于进行单频交流扫描。原理图上需要增加两个电阻，从而仿真时可以不出现错误信息。首先用一个小的串联电阻接在电感 L1 和电压源之间，电阻值取 1 pΩ 且尽量减小其影响。接着将一个 1000 MΩ（基本上是无限的）的大电

阻接在L2两端，输出电压的仿真结果是幅度为13.33 V，相角为-3.819×10^{-8}°（基本上为零），这与例题13.5通过手工计算得到的结果相一致。

同样，PSpice提供了两个不同的变压器模型：一个是线性变压器XFRM_LINEAR，另一个是理想变压器XFRM_NONLINEAR，它的电路元件将在下节叙述。线性变压器只需要互感系数以及两个线圈的电感量，理想变压器同样需要一个耦合系数，我们很快会讲到，理想变压器的电感量是无限的或者接近无限，所以XFRM_NONLINEAR剩下的参数就是每一个线圈的匝数。

13.4 理想变压器

理想变压器是对紧耦合变压器的有用近似。紧耦合变压器的耦合系数基本等于1，初级和次级的感抗和端阻抗相比非常大。许多设计得很好的铁心变压器当频率和端阻抗在一定范围内时非常符合紧耦合变压器的特性。含有铁芯变压器的电路进行近似电路分析时只需简单地将铁芯变压器换成理想变压器即可，理想变压器可以看成是铁芯变压器的一阶模型。

理想变压器的匝数比

理想变压器引入了一个新的概念——匝数比a。线圈的自感和绕成的导线匝数的平方成正比，这个关系只有在流过线圈的电流产生的磁通穿过所有匝线圈时才有效。为了推导定量的结果，需要用到磁场的概念，然而这不属于电路分析讨论的内容，但是定性讨论还是能做的。假设电流i流过N匝线圈，产生的磁通量将是单匝线圈产生的N倍，如果认为N匝线圈是完全一致的，则全部磁通穿过所有的匝。当电流和磁通随时间变化时，每一匝感应产生的电压就等于单匝感应产生的电压的N倍，那么N匝线圈产生的感应电压将是单匝的N^2倍，从而便得到了电感与匝数平方之间的关系：

$$\frac{L_2}{L_1}=\frac{N_2^2}{N_1^2}=a^2 \qquad [20]$$

或者

$$a=\frac{N_2}{N_1} \qquad [21]$$

图13.25所示是次级接有负载的理想变压器。变压器的理想特性由几个方面来体现：两个线圈之间的垂直线表示大多数铁芯变压器的迭片结构；耦合系数为1；符号$1:a$表示匝数比$N_1:N_2$。

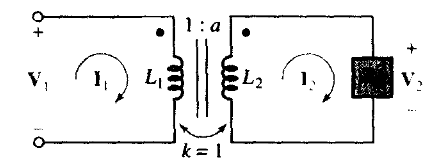


图13.25 连接一般负载阻抗的理想变压器

为了用最简单的形式解释结论，现在分析正弦稳态情况下的变压器。我们写出两个网孔方程：

$$\mathbf{V}_1=j\omega L_1\mathbf{I}_1-j\omega M\mathbf{I}_2 \qquad [22]$$

和

$$0=-j\omega M\mathbf{I}_1+(\mathbf{Z}_L+j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \qquad [23]$$

首先确定理想变压器的输入阻抗。求解第一个方程（即式[23]），得到电流$\mathbf{I}_2$并代入式[22]：

$$\mathbf{V}_1=\mathbf{I}_1 j\omega L_1+\mathbf{I}_1\frac{\omega^2M^2}{\mathbf{Z}_L+j\omega L_2}$$

和

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

因为$k=1$，$M^2=L_1L_2$，所以，

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

除了耦合系数为1之外，理想变压器的另一个特性是不管工作频率为多少，初级和次级线圈均有非常大的阻抗。也就是说，理想情况下，电感L_1和L_2都趋于无限，但是它们的比值为有限值，如定义所描述的那样：

$$L_2 = a^2 L_1$$

因此，

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1}$$

现在假设L_1为无限，则上述表达式右边的两项均趋于无限，其结果无法确定。所以，先把这两项组合起来：

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} \qquad [24]$$

或者

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_L / j\omega L_1 + a^2} \qquad [25]$$

现在令$L_1 \to \infty$，$\mathbf{Z}_{\text{in}}$成为

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} \qquad [26]$$

这里，$\mathbf{Z}_L$是有限值。

该结果隐含了一些有趣的东西，其中至少有一个因素看起来与线性变压器的某个特性是冲突的。理想变压器的输入阻抗与负载阻抗成正比，与匝数比的平方成反比。换句话说，如果负载阻抗是容性的，那么输入阻抗也是容性的。但是在线性变压器中，其反射阻抗的电抗部分的符号会发生改变，容性负载会产生感性的输入阻抗。其原因可以这样解释：首先，$\mathbf{Z}_L/a^2$通常不严格地被称为反射阻抗，但它并不是反射阻抗，理想变压器真正的反射阻抗是无穷大的，否则它无法“抵消”初级电感的无限阻抗，式[24]的分母体现了这种抵消作用。阻抗$\mathbf{Z}_L/a^2$表示没有完全抵消时的量，此项很小。理想变压器真正的反射阻抗的电抗部分将改变符号，不过，当初级和次级电感变为无穷大时，初级线圈的无穷大电抗和次级线圈的负无穷大的反射电抗相抵消。

理想变压器的第一个重要特性是能够改变阻抗的幅度值或者大小。若理想变压器初级线圈为100匝，次级线圈为10 000匝，则匝数比为10 000/100，即100。任何接在次级线圈两端的负载阻抗呈现在初级端口的幅度值都要降低100^2倍，即10 000倍。比如，一个20 000 Ω的电阻看起来只有2 Ω，一个200 mH的电感看起来只有20 μH，100 pF的电容看起来只有1 μF。如果交换初级和次级线圈的匝数，则$a=0.01$，负载阻抗的幅度将增大。实际上，负载阻抗幅度的改变并不总是精

确的。必须记住：在推导的最后一步，要求式[25]中的L_1成为无穷大，条件是$\mathbf{Z}_L$与$j\omega L_2$相比可以忽略，但是L_2永远不可能趋于无穷大。可见在负载阻抗相当大时，理想变压器的模型是无效的。

利用变压器实现阻抗变换

利用铁芯变压器作为阻抗变换器件的实际例子是耦合真空管音频功率放大器和扬声器。为了实现最大功率传输，必须要求负载电阻等于信号源内阻。扬声器的阻抗值（通常假设为电阻）只有几个欧姆，而典型的功率放大器具有几千欧姆的内电阻，这时就需要理想变压器采用$N_2 < N_1$的形式。例如，若放大器（或发生器）的内阻为4000 Ω，扬声器的阻抗只有8 Ω，则要求：

$$\mathbf{Z}_g = 4000 = \frac{\mathbf{Z}_L}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

即

$$a = \frac{1}{22.4}$$

因此，

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

理想变压器的初级和次级线圈电流有很简单的关系，由式[23]得到

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{\mathbf{Z}_L + j\omega L_2}$$

再假设L_2为无限，则

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

或者

$$\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a} \qquad [27]$$

可见，初级和次级线圈电流之比等于匝数比。如果$N_2 > N_1$，即$a > 1$，那么匝数越少的线圈中流过的电流越大。换句话说，

$$N_1\mathbf{I}_1 = N_2\mathbf{I}_2$$

必须注意，当两个电流之一被反向或者两个同名端其中的一个改变了位置时，电流比取为匝数比的负值。

在上面这个例子中，理想变压器用于实现扬声器和功率放大器之间的有效匹配，初级线圈中1000 Hz，50 mA rms的电流在次级线圈中为1000 Hz，1.12 A rms。提供给扬声器的功率是$(1.12)^2(8) = 10$ W，而放大器提供给变压器的功率为$(0.05)^2(4000) = 10$ W。该结论是合理的，因为变压器既不包含提供功率的有源器件，也不包含消耗功率的电阻器件。

利用变压器进行电压调整

由于传递给理想变压器的功率等于传递给负载的功率，而初级和次级线圈的电流比与匝数比有关，可以想象初级和次级线圈的端口电压也一定与匝数比有关。如果定义次级线圈的电压或负载电压为

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_L$$

跨接在 L_1 上的初级电压为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{\text{in}} = \mathbf{I}_1\frac{\mathbf{Z}_L}{a^2}$$

则两个电压的比值为

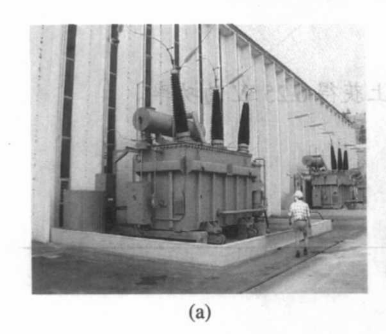
$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a^2\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

即

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = a = \frac{N_2}{N_1} \qquad [28]$$

可见，次级和初级电压的比值等于匝数比。注意，这个等式与式[27]正好相反，很多学生在这里会犯错误。如果两个电压之一被反相或者其中一个同名端改变了位置，则比值取负值。

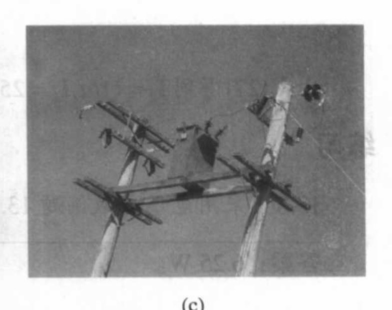
只要简单地选择匝数比，就能够任意变换交流电压值。例如，当 $a > 1$ 时，次级电压将大于初级电压，我们一般称其为升压变压器；如果 $a < 1$，则次级电压小于初级电压，一般称其为降压变压器。典型的电力公司产生的电力电压一般为 12~25 kV，虽然该电压值已经很大了，但是仍然需要采用升压变压器［见图 13.26(a)］将其增压至几百千伏，从而可以减小长距离的传输损耗。然后当地的变电所再利用降压变压器［见图 13.26(b)］将高电压降至几十千伏。另外一些降压变压器安装在室外，用于将传输线电压降至 110 V 或者 220 V，从而使机器运转［见图 13.26(c)］。



(a)



(b)



(c)

图 13.26　(a) 升压变压器用于升高发电机产生的电压以便于电力传输；(b) 变电站使用的变压器，用于将 220 kV 的传输电压降到几百千伏以进行区域配电；(c) 降压变压器，用于将配电电压降到 240 V 以供日常使用

结合电压与电流比的表达式（即式[27]和式[28]），可得

$$\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_1\mathbf{I}_1$$

可见，初级和次级的复数伏安值相等。上述乘积项的幅度一般称为电力变压器的最大允许值。如果负载的相角为 θ，或写成

$$\mathbf{Z}_L = |\mathbf{Z}_L|\underline{/\theta}$$

则 $\mathbf{V}_2$ 超前 $\mathbf{I}_2$ 的角度为 θ。更进一步说，由于输入阻抗等于 $\mathbf{Z}_L/a^2$，所以 $\mathbf{V}_1$ 同样超前 $\mathbf{I}_1$ 相同的角度 θ。假设电压和电流均用有效值表示，则 $|\mathbf{V}_2|\,|\mathbf{I}_2|\cos\theta = |\mathbf{V}_1|\,|\mathbf{I}_1|\cos\theta$，所有输送到初级线圈的功率都能够传输到负载上，理想变压器上不消耗也不产生任何功率。

理想变压器的特性都是在相量分析基础上得到的，因此对正弦稳态而言也是正确的。但是我们没有理由认为对完全响应也是正确的。实际上，它们可以应用于一般的情况，采用比我们刚完成的相量分析更简单的方法就可以说明结论的正确性。前面的分析指出，要将一个实际的变压器看成理想变压器，需要对一个更加精确的实际变压器模型做出特定的近似，例如，已经知道的次级绕组的感抗幅度必须远大于所接负载的阻抗幅度，因此也就知道了一个变压器不再是理想变压器的条件。

例题 13.7 某电路如图 13.27 所示，确定 10 kΩ 电阻上获得的平均功率。

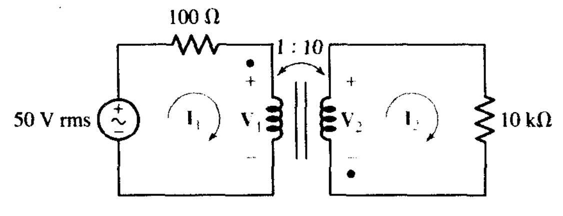


图 13.27 理想变压器的简单电路

说明： 在这个例子中相角可以忽略，它们不影响纯电阻负载消耗的平均功率的计算。

解： 10 kΩ 电阻上获得的平均功率可简单地由下式求得：

$$P = 10\,000|\mathbf{I}_2|^2$$

从 50 V rms 电源看到的变压器输入阻抗为 $\mathbf{Z}_L/a^2$，即 100 Ω，因此，

$$\mathbf{I}_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

由式[27]得到 $\mathbf{I}_2 = (1/a)\mathbf{I}_1 = 25$ mA rms，因此求得 10 kΩ 电阻上获得 6.25 W 的功率。

练习

13.8 采用电压重做例题 13.7，求功率。

答案： 6.25 W。

实际应用——超导变压器

很多时候我们忽略了变压器中可能存在的各种损耗。尽管变压器的典型效率可以达到97%或者更高，但是，在分析大功率变压器时，必须特别注意变压器的损耗。如此高的效率看起来近乎理想，但如果变压器中的电流达到几千安培，其能量损耗将是非常大的。所谓 i^2R 损耗表示热量形式的损耗，即热量促使变压器线圈温度升高。由于导线的电阻随温度增加，因此热量只会导致更大的损耗。高温还使得导线的绝缘性下降，从而缩短变压器的寿命。因此，许多现代电力变压器都使用液体油浸的办法来消除变压器线圈中产生的热量。然而这种方法有一些缺点，即长时间腐蚀会导致漏油，从而产生严重的环境污染以及引发火灾（见图 13.28）。

一种提高变压器性能的办法是用超导导线来替换普通变压器中具有电阻的导线。超导体材料在高温的时候具有电阻，但是当低于某个临界温度时其电阻会突然消失。绝大部分材料只在接近绝对零度时呈现超导特性，因此需要用非常昂贵的液态氦来进行冷却。20世纪80年代，人们发现陶瓷的临界温度高达 90 K（-183°C）甚至更高，因此可能成为取代液态氦低温设备的有效且便宜的液态氮低温系统。

图 13.29 所示是一个 15 kVA 超导变压器的原型，由 Canterbury 大学研制。该设计采用环保液态氮取代油，与同类型的传统变压器相比，其体积更小。测量得到的传输效率有所提高，这对用户而言降低了运行成本。

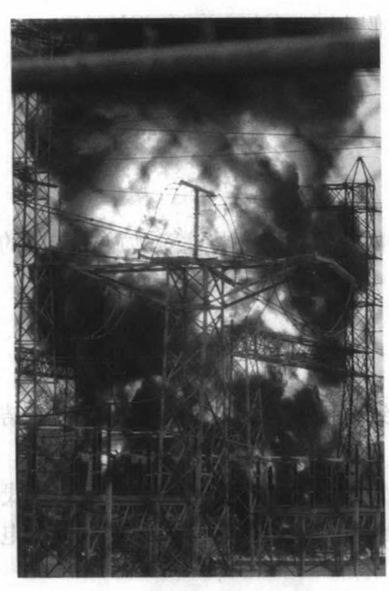


图 13.28　发生在美国印第安那州 Mishawaka 附近 34 万伏变电站的大火

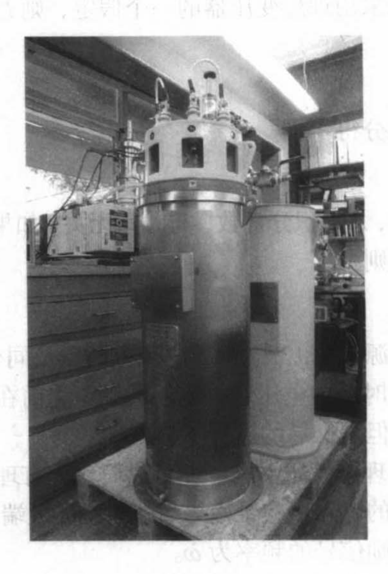


图 13.29　15 kVA 超导变压器的原型

当然，任何一种设计都有其不利的一面，超导变压器也不例外，因此必须权衡利弊。目前最大的障碍在于制造几千米长的超导线的价格要比制造同等长度的铜导线的成本高很多。一方面是因为制造长超导线带来的挑战，另一方面是因为包围超导线的银管［万一冷却系统失灵，银管可以为电流提供一条低阻值的通路（虽然铜要比银便宜很多，但是铜和陶瓷会发生反应，因此铜不是可选方案）］。综上所述，长远来看（许多变压器工作寿命超过 30 年），使用超导变压器可以节省开支，但其初期投入要比普通变压器高得多。目前，许多工厂（包括电厂）受短期成本的驱动，不愿意为了长期的成本收益而投入大量资金。

时域电压关系

现在讨论理想变压器在时域的电压量 v_1 和 v_2 的关系。回到图 13.17 所示的电路以及式[16]和式[17]，求解第二个方程得到 di_2/dt，代入第一个方程：

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2}v_2 - \frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}$$

对于完全耦合，$M^2 = L_1L_2$，因此，

$$v_1 = \frac{M}{L_2}v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}v_2 = \frac{1}{a}v_2$$

于是就得到了初级和次级电压在完全响应下的时域关系。

将式[16]各项除以 L_1，很快得到时域中初级和次级电流关系的表达式：

$$\frac{v_1}{L_1}=\frac{di_1}{dt}+\frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt}=\frac{di_1}{dt}+a\frac{di_2}{dt}$$

如果采用理想变压器的一个假定，则 L_1 为无穷大。如果假定 v_1 不是无穷大，则

$$\frac{di_1}{dt}=-a\frac{di_2}{dt}$$

求积分得

$$i_1=-ai_2+A$$

其中，A 是积分常数，与时间无关。如果忽略两个绕组中的直流电流而将注意力放在响应的时变部分，则

$$i_1=-ai_2$$

符号源于图 13.17 中的电流方向以及同名端的位置。

时域中电压和电流的关系与先前在频域中的关系一致，条件是必须忽略直流项。时域结果更一般，但是推导的过程不够正规。

理想变压器的特性可以简化含有理想变压器的电路分析。为说明问题，假设位于初级线圈端口左边的电路由戴维南等效代替，次级端口的右边做同样的处理。然后考虑图 13.30 所示的电路，假设激励信号的频率为 ω。

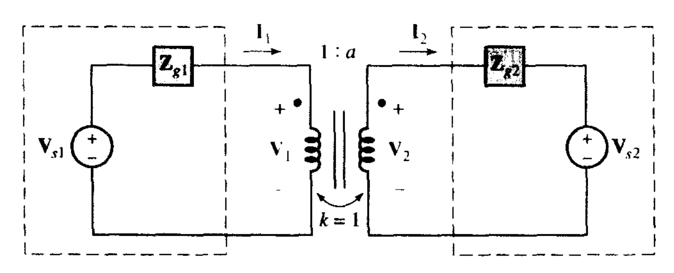


图 13.30 连接理想变压器的初级和次级端口的网络用它们的戴维南等效电路表示

等效电路

现在用戴维南和诺顿定理来推导不含变压器的等效电路。例如，确定次级线圈左边网络的戴维南等效。令次级端口开路，即 $\mathbf{I}_2=0$，则 $\mathbf{I}_1=0$（记住 L_1 是无限的）。由于 $\mathbf{Z}_{g1}$ 上没有电压，则 $\mathbf{V}_1=\mathbf{V}_{s1}$，$\mathbf{V}_{2oc}=a\mathbf{V}_{s1}$。求戴维南等效阻抗需要令 $\mathbf{V}_{s1}$ 短路，要小心应用匝数比的平方及其倒数，因为现在是从次级线圈的两端看入，因此得到 $\mathbf{Z}_{th2}=\mathbf{Z}_{g1}a^2$。

检验等效性。确定次级线圈的短路电流 $\mathbf{I}_{2sc}$。令次级端口短路，初级激励源面对的阻抗是 $\mathbf{Z}_{g1}$，因此 $\mathbf{I}_1=\mathbf{V}_{s1}/\mathbf{Z}_{g1}$，那么 $\mathbf{I}_{2sc}=\mathbf{V}_{s1}/a\mathbf{Z}_{g1}$。开路电压与短路电流的比值等于 $a^2\mathbf{Z}_{g1}$，该结果与前面得到的结果一致。变压器初级电路的戴维南等效如图 13.31 所示。

现在可以把每个初级电压乘以匝数比，电流除以匝数比，阻抗乘以匝数比的平方，然后用修改后的这些电压、电流和阻抗值代替给定的电压、电流、阻抗，之后再加上变压器。如果任何一个同名端改变了位置，则需要将匝数比取负值之后再进行等效处理。

需要指出的是：只有当连接到初级和次级的网络可以用它们的戴维南等效电路表示时，才能得到图 13.31 所示的等效电路。也就是说，每一个网络都必须是二端网络。例如，变压器初级的两个电极断了，电路就被分成了两个独立的网络，其间没有任何元件或者网络将初级和次级连接起来。

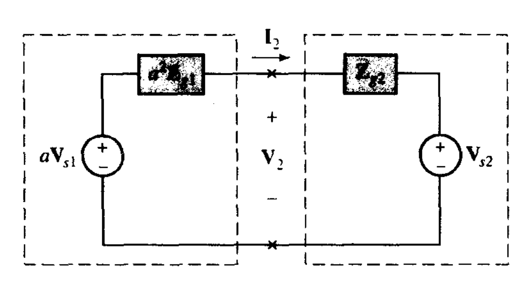


图 13.31　采用戴维南等效简化图 13.30 所示的次级端口左边的网络

采用同样的分析可以得到变压器次级端点右边的网络，网络中没有变压器，其中每个电压为原来的电压除以 a，每个电流为原来的电流乘以 a，而每个阻抗为原来的阻抗除以 a^2。如果其中一个绕组的缠绕方向反了，则将匝数比改为 $-a$ 即可。

例题 13.8　某电路如图 13.32 所示，确定取代变压器和次级电路的等效电路，同样确定取代变压器和初级电路的等效电路。

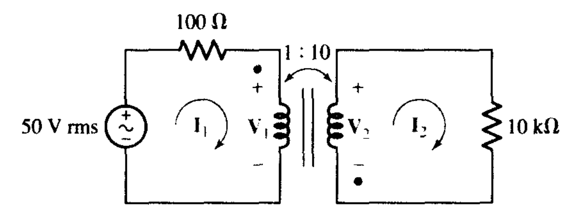


图 13.32　电阻性负载通过理想变压器与电源阻抗相匹配的简单电路

解：该电路与例题 13.7 分析的电路相同。之前已求得输入阻抗等于 10 000/(10)²，即 100 Ω，所以电流 $|\mathbf{I}_1| = 250$ mA rms。同样可以计算得到初级线圈两端的电压为

$$|\mathbf{V}_1| = |50 - 100\mathbf{I}_1| = 25 \text{ V rms}$$

因此电源提供的功率为 $(25 \times 10^{-3})(50) = 12.5$ W，其中 $(25 \times 10^{-3})^2(100) = 6.25$ W 消耗在电源的内阻上，$12.5 - 6.25 = 6.25$ W 消耗在负载上。这是向负载传输最大功率的条件。

如果用戴维南等效电路取代理想变压器和次级电路，则从 50 V 电源和 100 Ω 电阻看去就只是 100 Ω 的阻抗，从而可得到图 13.33(a)所示的简化电路。这时立刻可以求得初级电压和电流。

如果将次级端口左边的电路用戴维南等效电路替换，可以得到（记住同名端的位置）$\mathbf{V}_{th} = -10 \times (50) = -500$ V rms，$\mathbf{Z}_{th} = (-10)^2(100) = 10$ kΩ。所求的等效电路如图 13.33(b)所示。

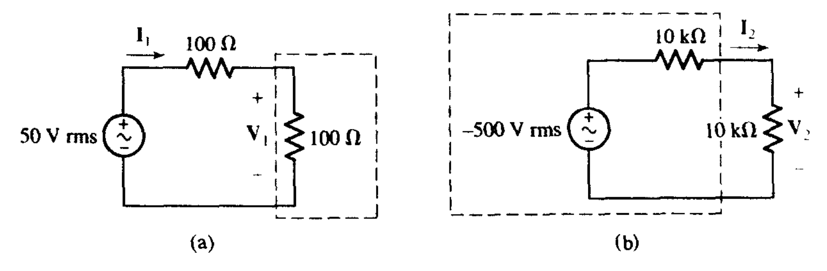


图 13.33　图 13.32 所示电路的简化：(a) 对变压器和次级电路进行戴维南等效的结果；(b) 对变压器和初级电路进行戴维南等效的结果

练习

13.9 设理想变压器的 $N_1 = 1000$ 圈，$N_2 = 5000$ 圈，如图 13.34 所示。如果 $\mathbf{Z}_L = 500 - j400\ \Omega$，求下列情况下负载 $\mathbf{Z}_L$ 获得的平均功率：(a) $\mathbf{I}_2 = 1.4\underline{/20^\circ}$ A rms；(b) $\mathbf{V}_2 = 900\underline{/40^\circ}$ V rms；(c) $\mathbf{V}_1 = 80\underline{/100^\circ}$ V rms；(d) $\mathbf{I}_1 = 6\underline{/45^\circ}$ A rms；(e) $\mathbf{V}_s = 200\underline{/0^\circ}$ V rms。

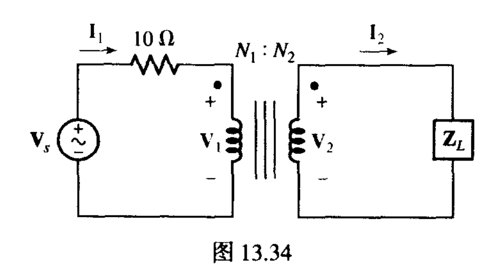


图 13.34

答案：980 W；988 W；195.1 W；720 W；692 W。

总结和复习

- 互感描述的是一个线圈产生的磁场在另一个线圈两端感应出的电压。
- 同名端规则使得互感项可以带符号。
- 根据同名端规则，流入同名端的电流在另一个线圈的同名端产生的开路电压极性为正。
- 一对耦合线圈中储存的总能量分 3 部分：每一个自感储存的能量（$\frac{1}{2}Li^2$）以及互感储存的能量（Mi_1i_2）。
- 耦合系数定义为 $k = M/\sqrt{L_1L_2}$，其值限制在 0 和 1 之间。
- 线性变压器有两个耦合线圈：初级绕组和次级绕组。
- 理想变压器是实际使用的铁芯变压器的有用近似，耦合系数等于 1，电感量假设为无穷大。
- 理想变压器的匝数比 $a = N_1/N_2$ 将初级和次级电压联系在一起：$\mathbf{V}_2 = a\mathbf{V}_1$。
- 匝数比 a 同样将初级电流和次级电流联系在一起：$\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2$。

深入阅读

几乎所有有关变压器的内容都可以参考下面的书籍：

M. Heathcote, *J & P Transformer Book*, 12th ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998。

另一本关于变压器的综合性书籍是：

W. T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook*, 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004。

下面是一本强调经济概念的变压器书籍：

B. K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers*. New York: McGraw-Hill, 1998。

习题

13.1 互感

1. 考虑图 13.35 所示的电路，如果 $i_1(t) = 400\cos 120\pi t$ A，$v_2(t)$的最大值为 100 V，则 L_1 和 L_2 之间的互感为多少？
2. 电路如图 13.36 所示，已知电压 $v_1 = 115\sqrt{2}\cos(120\pi t - 16°)$ V，测得电流 i_2 的峰值为 45 A，求 L_1 和 L_2 之间的互感值。



图 13.35　　　　图 13.36

3. 3 对耦合线圈的物理结构如图 13.37 所示，证明每一对线圈上的同名端有两种不同的设置方法。

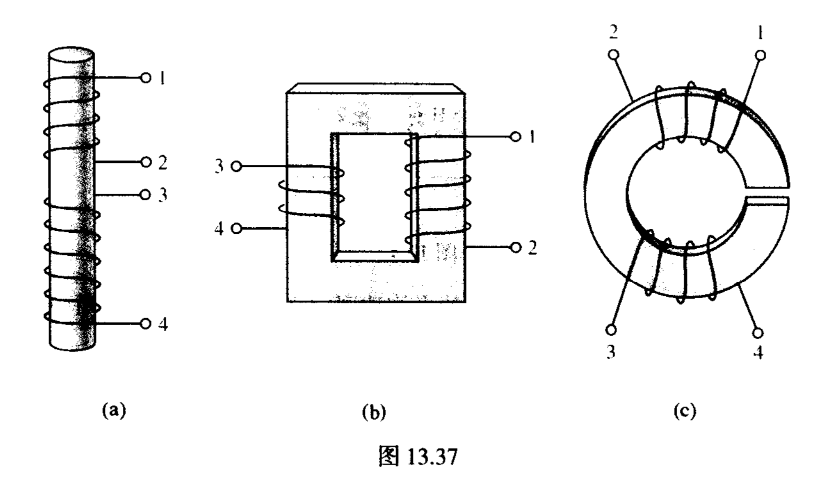


图 13.37

4. 两个耦合电感如图 13.38 所示，电压和电流如图所示。其中，$L_1 = 1$ H，$L_2 = 3$ H，$M = 0.5$ H。当 $i_1 = 30\sin 80t$ A 和 $i_2 = 30\cos 80t$ A 时，计算：(a) v_1；(b) v_2。
5. 两个耦合电感如图 13.39 所示，电压和电流参见图示。$L_1 = 22$ μH，$L_2 = 15$ μH，$M = 5$ μH。当 $i_1 = 3\cos 800t$ nA 和 $i_2 = 2\cos 800t$ nA 时，计算：(a) v_1；(b) v_2。



图 13.38　　　　图 13.39

6. 参见图 13.40，假设 $v_1 = 5e^{-t}$ V，$v_2 = 3e^{-2t}$ V。如果 $L_1 = L_2 = 8$ H 和 $M = 0.4$ H，确定：(a) di_1/dt；(b) di_2/dt；(c) $i_1(t)$，设 $t = 0$ 时储能等于零。

7. 电路如图 13.41 所示，设 $v_1 = 2e^{-t}$ V，$v_2 = 4e^{-3t}$ V。如果 $L_1 = L_2 = 2$ mH，$M = 1.5$ mH，确定：(a) di_1/dt；(b) di_2/dt；(c) $i_2(t)$，设 $t = 0$ 时储能等于零。



图 13.40 图 13.41

8. 求图 13.42 所示的每一个网络的电压 $v(t)$，设频率 $f = 50$ Hz。

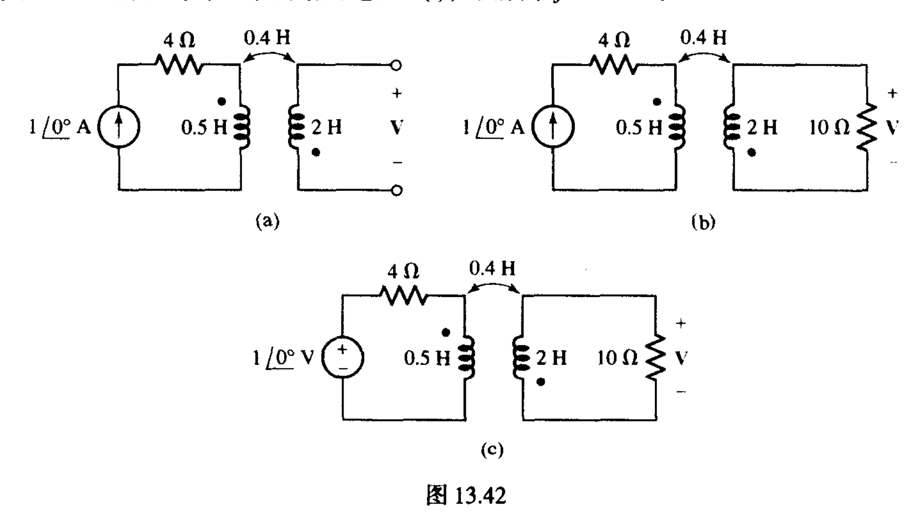


图 13.42

9. 电路如图 13.43 所示，求下列元件吸收的平均功率：(a) 电源；(b) 两个电阻中的每一个；(c) 两个电感中的每一个；(d) 互感。

10. 电路如图 13.44 所示，设 $i_{s1}(t) = 4t$ A 和 $i_{s2}(t) = 10t$ A，求：(a) v_{AG}；(b) v_{CG}；(c) v_{BG}。

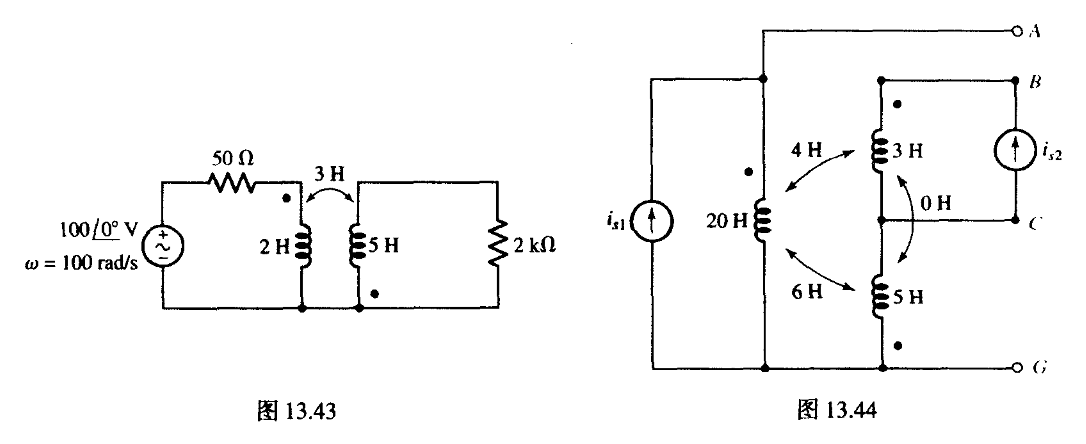


图 13.43 图 13.44

11. (a) 电路同习题 9，求从 2 kΩ 电阻两端看进去的戴维南等效电路；(b) 当 $\mathbf{Z}_L$ 为最佳值（代替 2 kΩ 电阻）时，它从网络吸收的最大平均功率为多少？

12. 电路如图 13.45 所示，如果频率 $f = 50\text{ Hz}$，求电流 $i_1(t)$, $i_2(t)$和 $i_3(t)$。

13. 电路如图 13.46 所示，设 $v_s(t) = 10t^2 u(t)/(t^2 + 0.01)\text{ V}$，确定 $t > 0$ 时 $i_C(t)$的表达式。

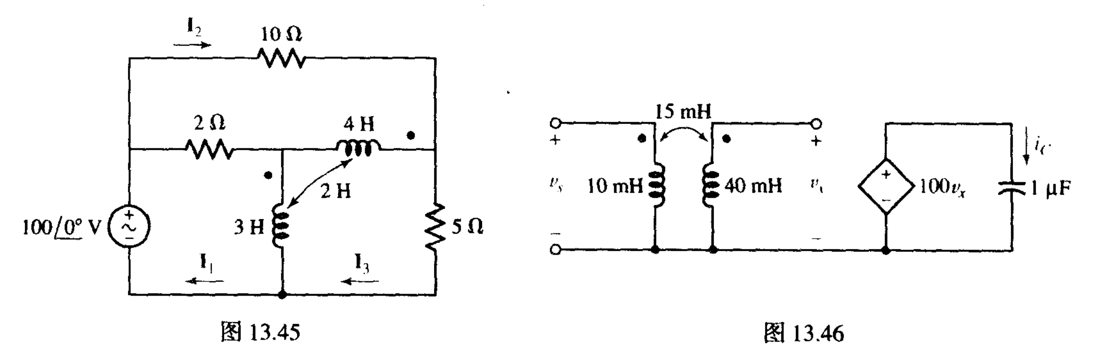


图 13.45　　　　图 13.46

14. (a) 网络如图 13.47(a)所示，写出用 $i_1(t)$和 $i_2(t)$表示的 $v_A(t)$和 $v_B(t)$的方程；(b) 网络如图 13.47(b)所示，写出用 $\mathbf{I}_A(j\omega)$和 $\mathbf{I}_B(j\omega)$表示的 $\mathbf{V}_1(j\omega)$和 $\mathbf{V}_2(j\omega)$的方程。

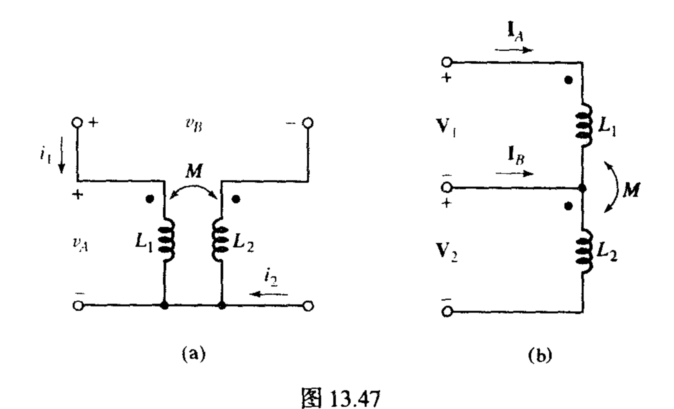


图 13.47

15. 电路如图 13.48 所示，5 H 电感和 6 H 电感之间没有互感。(a) 写出用 $\mathbf{I}_1(j\omega)$，$\mathbf{I}_2(j\omega)$和 $\mathbf{I}_3(j\omega)$表示的一组方程；(b) 当 $\omega = 2\text{ rad/s}$ 时，求 $\mathbf{I}_3(j\omega)$。

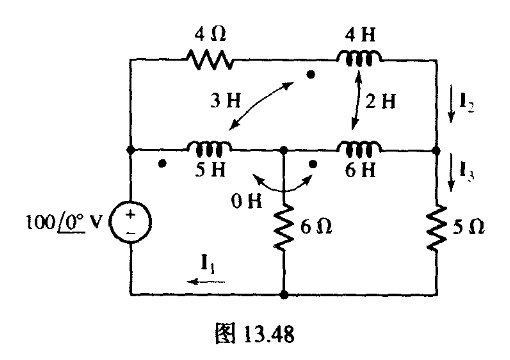


图 13.48

16. 对图 13.49 所示的每个电路，求用 $\mathbf{I}_1(j\omega)$和 $\mathbf{I}_2(j\omega)$表示的 $\mathbf{V}_1(j\omega)$和 $\mathbf{V}_2(j\omega)$。

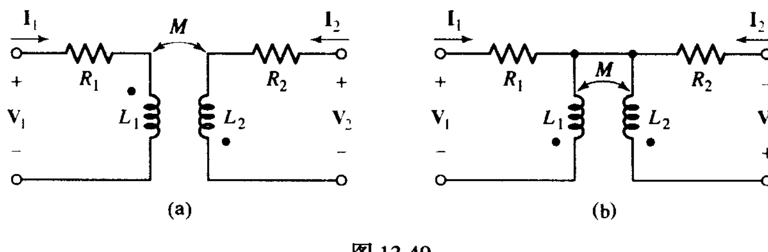


图 13.49

17. (a) 网络如图 13.50 所示，求 $\mathbf{Z}_{in}(j\omega)$；(b) 画出 0 rad/s $\leq \omega \leq$ 1000 rad/s 范围内 $\mathbf{Z}_{in}$ 与频率的关系曲线；(c) 当 $\omega = 50$ rad/s 时，求 $\mathbf{Z}_{in}(j\omega)$的值。
18. 电路如图 13.51 所示，求 M 的值，使得 8 Ω 的低音喇叭在音频 160 Hz 时能够精确获得 3.2 W 的平均功率。

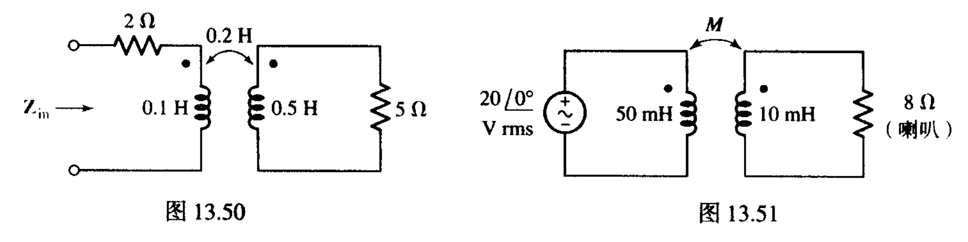


图 13.50　　　　图 13.51

19. 电路如图 13.52 所示，设 $i_{s1} = 2\cos 10t$ A 和 $i_{s2} = 1.2\cos 10t$ A，求：(a) $v_1(t)$；(b) $v_2(t)$；(c) 每个电源提供的平均功率。
20. 有一种方法可以使线圈 A 和 B 之间互感耦合，B 和 C 之间互感耦合，但是 A 和 C 之间不存在互感耦合，如图 13.53 所示。求电压 $v(t)$。

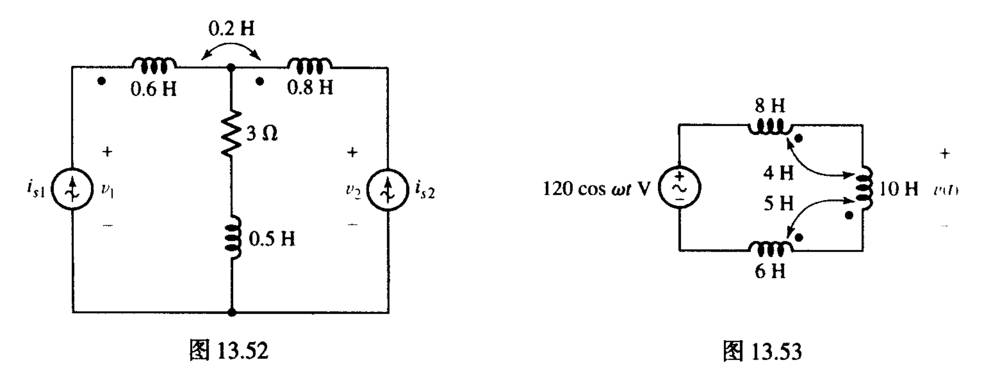


图 13.52　　　　图 13.53

21. 求图 13.54 所示电路中的电流 $\mathbf{I}_L$。

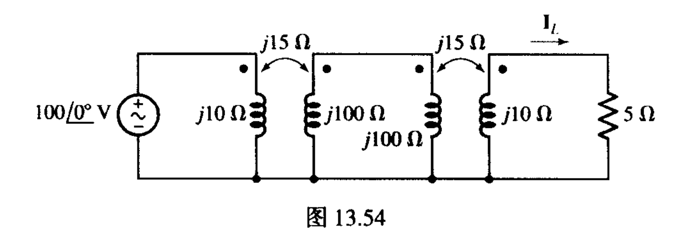


图 13.54

13.2 能量考虑

22. 设图 13.55 所示电路的 $i_s = 2\cos 10t$ A，求 $t = 0$ 时以下两种情况下系统储存的总能量：(a) a-b 间开路；(b) a-b 间短路。
23. 线性变压器如图 13.56 所示，设有效值电压 $\mathbf{V}_s = 12\underline{/0^\circ}$ V，$\omega = 100$ rad/s，求提供给 24 Ω 电阻的平均功率（以 k 的函数形式表示）。

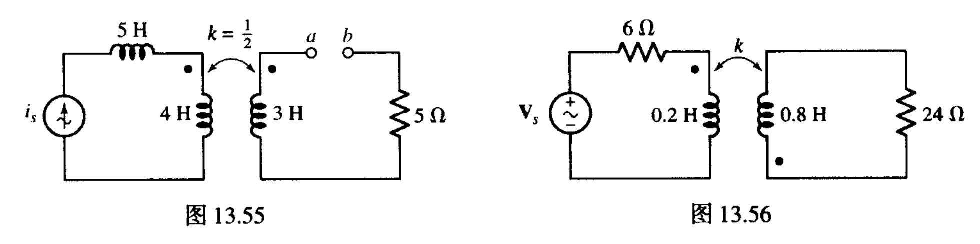


图 13.55　　图 13.56

24. 电感 $L_1 = 2$ μH 和 $L_2 = 80$ μH 相互耦合，且 $k = 1$，负载 $\mathbf{Z}_L = 2 + j10$ Ω 接在 L_2 两端，求 L_1 两端的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$ 的值，$\omega = 250$ krad/s。
25. 电路如图 13.57 所示，设 $\omega = 100$ rad/s，求平均功率：(a) 10 Ω 负载获得的平均功率；(b) 20 Ω 负载获得的平均功率；(c) 电源产生的平均功率。

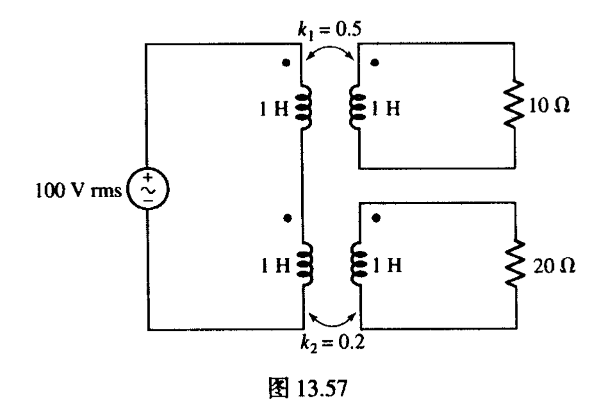


图 13.57

26. 耦合线圈如图 13.58 所示，设 $i_1(t) = 4e^{-t/10}$ A 和 $i_3(t) = 5e^{-t/5}$ A。求：(a) M；(b) $i_2(t)$；(c) $t = 0$ 时系统储存的总能量。
27. 电路如图 13.59 所示，设 $\omega = 1000$ rad/s，确定电压比 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ 的值，条件是：(a) $L_1 = 1$ mH，$L_2 = 25$ mH，$k = 1$；(b) $L_1 = 1$ H，$L_2 = 25$ H，$k = 0.99$；(c) $L_1 = 1$ H，$L_2 = 25$ H，$k = 1$。

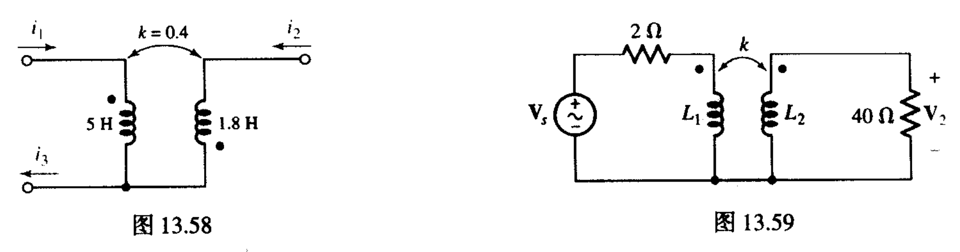


图 13.58　　图 13.59

28. (a) 电感桥用于测量图13.60所示的耦合电感，在开路和短路情况下测得的数值如下：$L_{AB,\,CD=OC} = 10$ mH，$L_{CD,\,AB=OC} = 5$ mH，$L_{AB,\,CD=SC} = 8$ mH。求 k。
(b) 假设同名端位于 A 和 D，$i_1 = 5$ A，求 i_2 的值，使得系统储存的能量为 100 mJ。

29. 电路如图 13.61 所示，$f = 60$ Hz，计算电压 $\mathbf{V}_2$（以 k 的函数形式表示）并画出 $|\mathbf{V}_2|$ 与 k 的关系曲线。

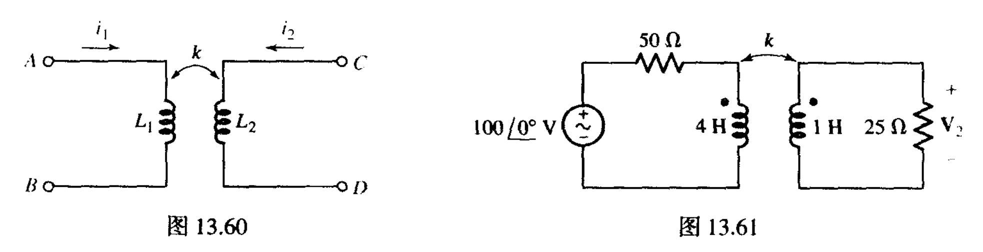


图 13.60　　图 13.61

30. 如果图 13.62 所示网络中的 $i_1 = 2\cos 500t$ A，求网络储存的最大能量值。

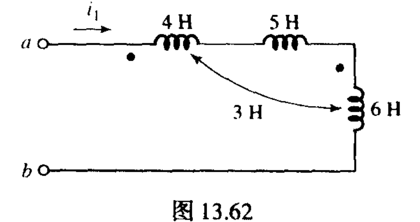


图 13.62

13.3 线性变压器

31. 图 13.63 所示电路中的负载阻抗 $\mathbf{Z}_L = 7\underline{/32^\circ}\ \Omega$，工作频率为 50 Hz。初级和次级线圈之间的互感为 800 nH，计算：(a) 反射阻抗；(b) 从 $\mathbf{V}_s$ 看进去的输入阻抗。

32. 图 13.64 所示电路工作在 60 Hz 频率上，$\mathrm{Re}\{\mathbf{Z}_L\} = 2\ \Omega$，求 $\mathbf{Z}_L$ 的电抗部分，使得 $M = 1$ mH 时反射阻抗等于 $\mathbf{Z}_{11}$($\mathbf{Z}_{11} \triangleq R_1 + j\omega L_1$)。

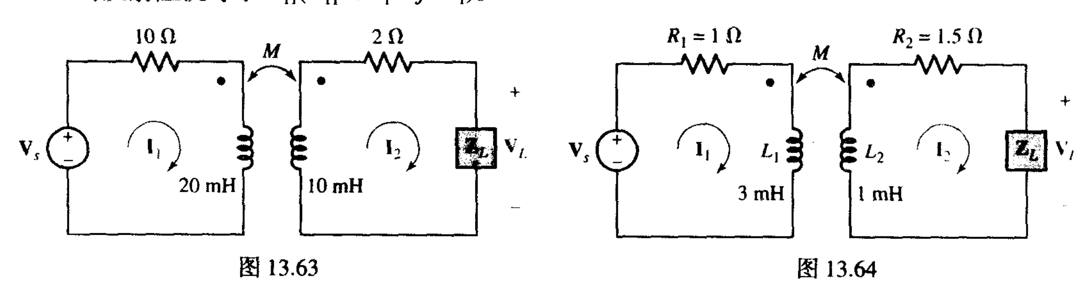


图 13.63　　图 13.64

33. 如果图 13.65 所示的网络等效，计算 L_1，L_2 和 M 的值。

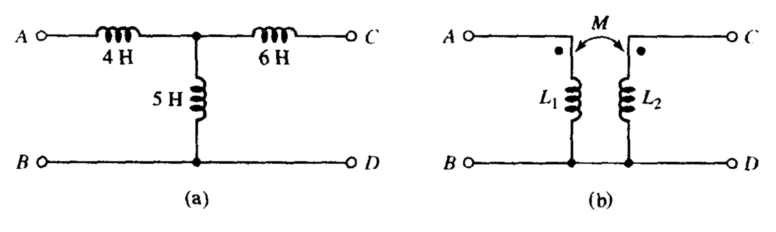


图 13.65

34. 如果图 13.66 所示的网络等效，求 L_z，L_y 和 L_3 的值。

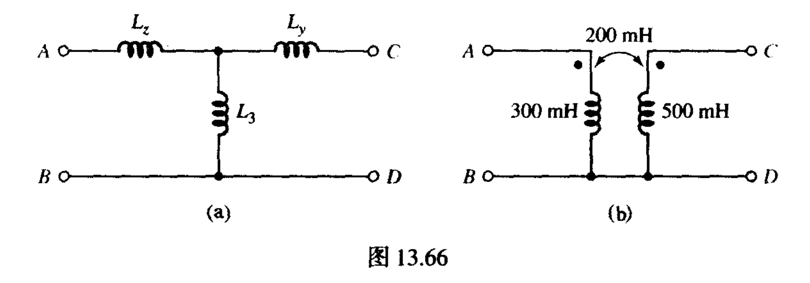


图 13.66

35. 网络如图 13.67 所示，求端点 1 和端点 2 之间的等效电感，假设下面的端点连在一起：(a) 没有端点连接；(b) A 和 B；(c) B 和 C；(d) A 和 C。

36. 参见图 13.68：(a) 利用等效 T 网络求解比值 $\mathbf{I}_L(j\omega)/\mathbf{V}_s(j\omega)$；(b) 设 $v_s(t) = 100u(t)$ V，求 $i_L(t)$。［提示：写出两个微分方程有助于求解 $t = 0^+$ 时的比值 di_L/dt。］

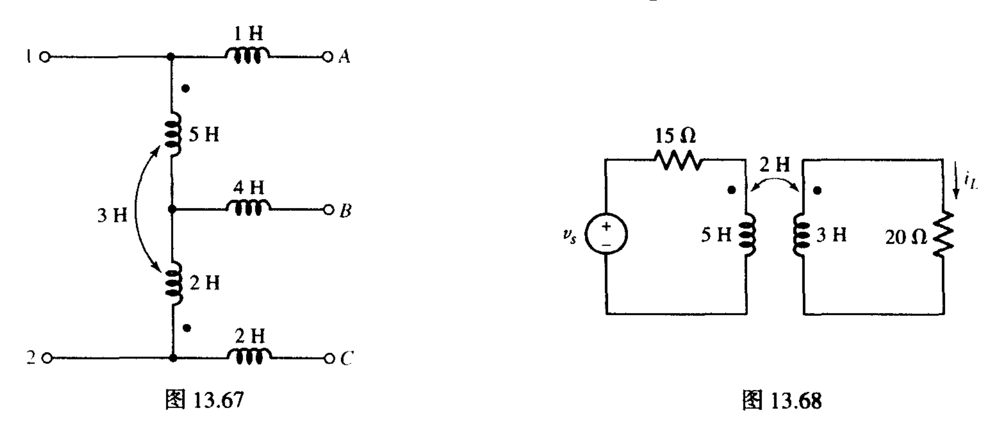


图 13.67　　图 13.68

37. 无损耗线性变压器的 $L_1 = 4$ mH，$L_2 = 18$ mH，$M = 8$ mH，分别确定两种同名端放置方式下的等效 T 形网络。利用 T 形等效电路确定下面 3 种情况下的等效输入电感：(a) 次级线圈开路；(b) 次级线圈短路；(c) 次级线圈与初级并联。

38. 求图 13.69 所示电路的 $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$。

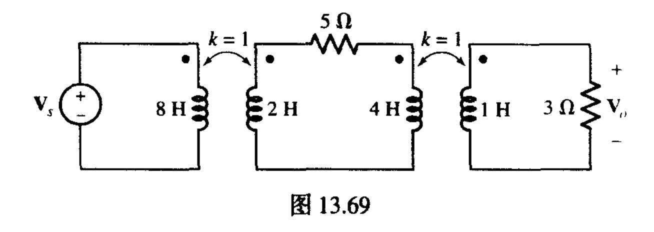


图 13.69

39. 利用等效 T 形网络，确定图 13.70 所示网络的输入阻抗 $\mathbf{Z}(j\omega)$。

40. 电路如图 13.71 所示，设 $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0^\circ}$ V，$\omega = 100$ rad/s，求网络的戴维南等效：(a) 端点 a 和端点 b 的右边；(b) 端点 c 和端点 d 的左边。

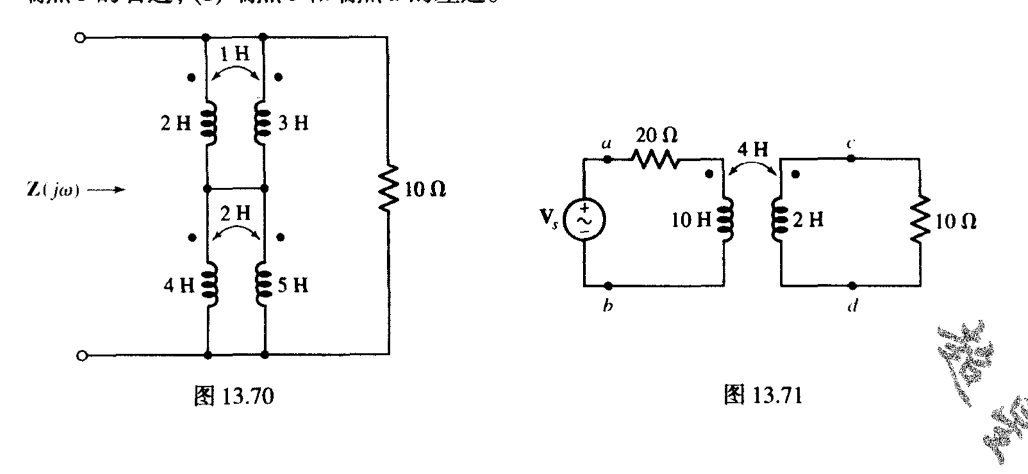


图 13.70　　图 13.71

41. 某线性变压器的$L_1 = 1$ H，$L_2 = 4$ H，耦合系数等于1，负载接在次级，若$\omega = 1000$ rad/s，求负载$\mathbf{Z}_L$为下列值时从输入端看到的串联等效网络（R，L和C的值）：(a) 100 Ω; (b) 0.1 H; (c) 10 μF。

42. 线性变压器的$L_1 = 6$ H，$L_2 = 12$ H，$M = 5$ H，有8种可能连接成二端网络的方式，求各种方式以及L_{in}的8个不同值（单个电感，串并联组合，变压器短路，不同位置的同名端组合）。给出每个网络以及L_{in}的值。

43. 电路如图13.72所示，设$\mathbf{Z}_L$是100 μF的电容，阻抗是$-j31.83$ Ω。求k为下列各值时$\mathbf{Z}_{in}$的值：(a) 0; (b) 0.5; (c) 0.9; (d) 1。用适当的PSpice仿真对答案进行验证。

44. 重复习题41，假设L_1增加到125 H，L_2增加到20 H，M增加至使$k = 1$。用适当的PSpice仿真对答案进行验证。

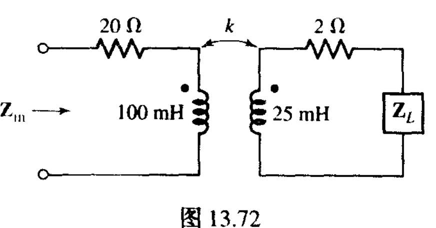


图 13.72

13.4 理想变压器

45. 电路如图13.73所示，求4个电阻各获得多少平均功率？用PSpice仿真对答案进行验证。

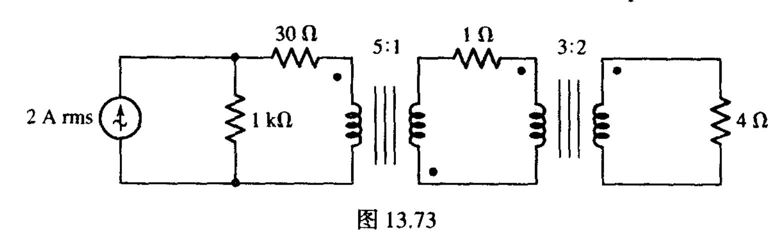


图 13.73

46. (a) 电路如图13.74所示，R_L上能够获得的最大平均功率是多少？(b) 设$R_L = 100$ Ω，在初级和次级线圈的上端接有一个40 Ω的电阻，求P_L。

47. 电路如图13.75所示，求c为下列各值时8 Ω负载上获得的功率：(a) 0; (b) 0.04 S; (c) −0.04 S。

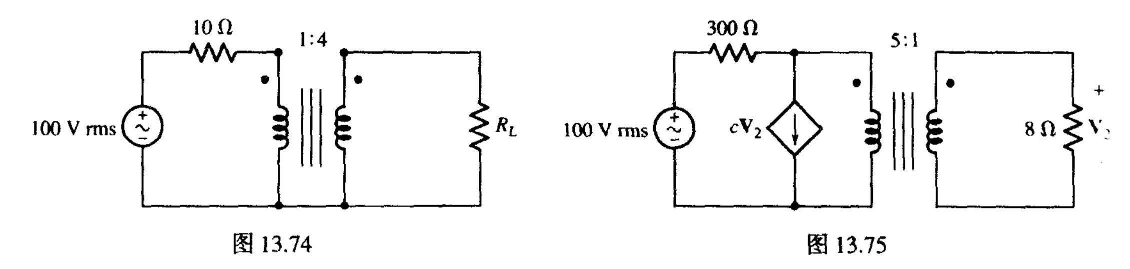


图 13.74 图 13.75

48. 网络如图13.76所示，求a和b之间的戴维南等效电路。

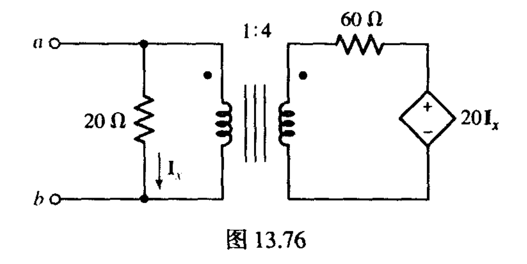


图 13.76

49. 电路如图 13.77 所示，求 a 和 b 的值，使得理想电源提供 1000 W 的功率，其中一半的功率消耗在负载上。

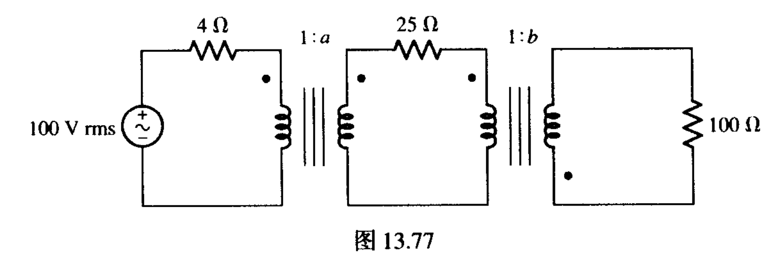


图 13.77

50. 电路如图 13.78 所示，求：(a) $\mathbf{I}_1$；(b) $\mathbf{I}_2$；(c) $\mathbf{I}_3$；(d) $P_{25\,\Omega}$；(e) $P_{2\,\Omega}$；(f) $P_{3\,\Omega}$。

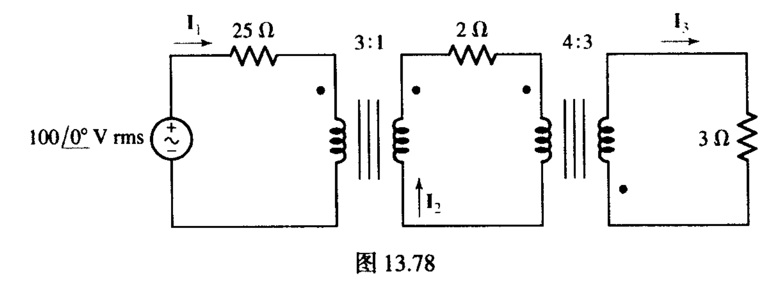


图 13.78

51. 求图 13.79 所示电路中的 $\mathbf{V}_2$。

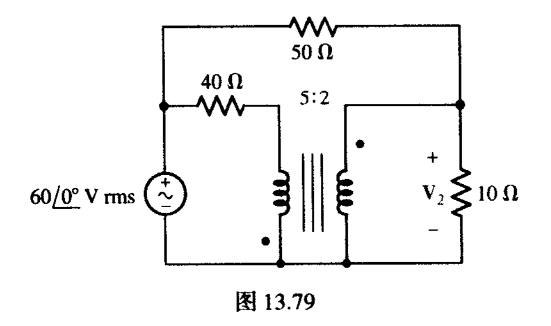


图 13.79

52. 求图 13.80 所示电路中每个电阻消耗的功率。

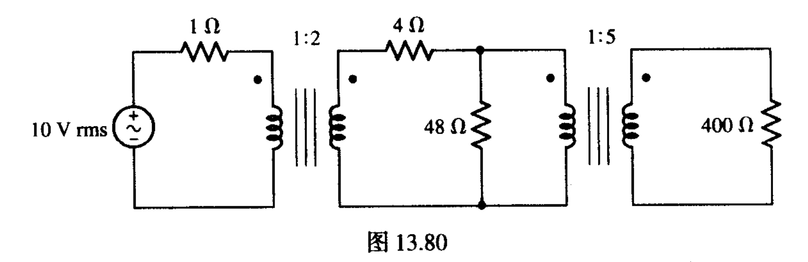


图 13.80

53. 求图 13.81 所示电路中的 $\mathbf{I}_x$。

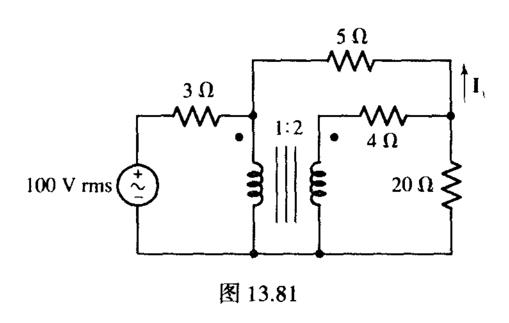


图 13.81

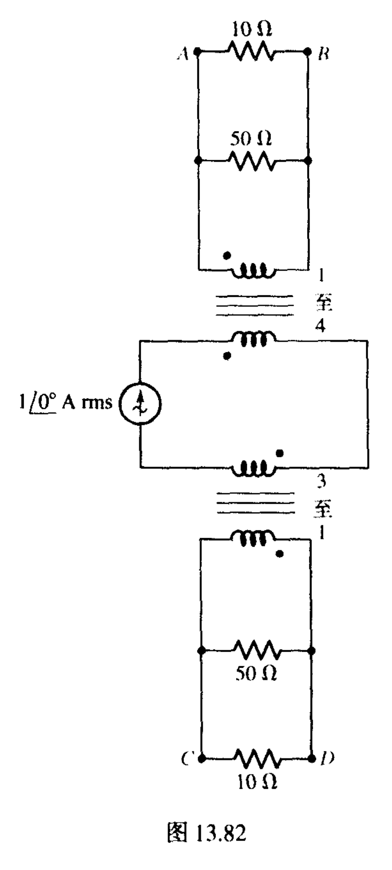


图 13.82

54. (a) 电路如图 13.82 所示，求每个 10 Ω 电阻消耗的平均功率；(b) 连接 A 和 C，B 和 D，重复计算(a)。

55. 证明两个理想变压器能够实现这样的阻抗匹配：信号发生器的输出阻抗为 $4 + j0$ kΩ，负载包含一个 8 W 和一个 10 W 的扬声器，且 8 W 扬声器所吸收的平均功率是 10 W 的两倍。画出合适的电路图并确定匝数比。

56. 某变压器的铭牌上标有 2300/230 V，25 kVA，它表明其初级和次级的工作电压分别为 2300 V 和 230 V rms，次级绕组能够提供 25 kVA 的功率。如果变压器获得的电压是 2300 V rms，当功率因数 PF 为 1 时，次级所接的负载需要的功率为 8 kW；当 PF 为 0.8 滞后时，负载需要的功率为 15 kVA，问：(a) 初级电流是多少？(b) 当 PF 等于 0.95 滞后时，变压器能提供给负载多少千瓦的功率？(c) 用 PSpice 对答案进行验证。

57. 深夜，电视里正在播放一则测量 IQ（智商）值的产品广告，售价为 19.95 美元。假设你一时冲动，拿起电话订了一台产品。4 ~ 6 周后货到，根据说明书的要求，你在标有 R_H 的拨号盘上输入身高（cm），在标有 R_M 的拨号盘上输入体重（kg），然后在标有 R_A 的拨号盘上输入年龄（岁）。然而显示器上显示的数字使你很不高兴，便顺手把设备扔了出去，哪知其后盖掉了下来，从而露出了如图 13.83 所示的原理图。你发现身高、体重和岁数都与电阻值（Ω）相对应，而瓦特计所测得的功率用 mW 表示，即显示为 IQ。问：(a) 用这个设备测量你室友的 IQ 将是多少？(b) 用此设备测得的 IQ 最高的人有什么特点？(c) 你损失了多少钱？

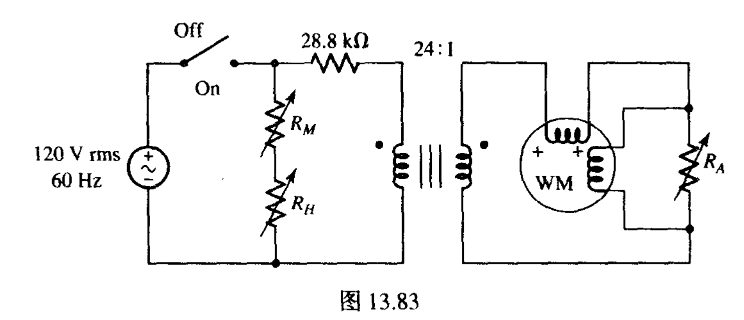


图 13.83

58. 假设你所在的公司派你从美国加州的 Fresno 到德国的 Rostock 去帮助建立一个半导体制造工厂，时间是 6 周。Fresno 的市电电压是 120 V 有效值，频率为 60 Hz，而 Rostock 的市电电

压是240 V有效值，频率为50 Hz。幸运的是，只有要一个电压适配器，你的便携式计算机均可以在这两种不同的电压下工作。但是，外带的CD刻录机只能在120 V交流电下工作，所以需要设计一个电路使得CD刻录机能够在德国的50 Hz电压下工作。（只针对60 Hz频率下工作的变压器比起工作在50 Hz频率下的变压器铁芯来重量要轻，因此在50 Hz频率下工作很可能会过热，所以很多变压器都标有50/60 Hz以表示可以在这两种频率下工作。）

59. 假设你从事新工作的第一项任务是设计一个电路，使工作在美国的氦低温压缩机也可以工作在澳大利亚。该低温压缩机含有一个三相电动机，当线电压为208 V时每相的电流为10 A rms。但澳大利亚只能提供400 V rms的三相交流电。设计相应的电路。

60. 图13.84所示网络的一个非同一般的特性是只允许正的$v(t)$通过网络到达输出端，负的$v(t)$将使$v_o(t) = 0$。(a) 如果输入电压为115 V rms，通过如图13.84所示的网络，要求输出电压$v_o(t)$的峰值为5 V，设计一个合理的电路，画出所设计电路的输出；(b) 修改所设计的电路，使得输出更“平滑”一些（即“波动”更小些）。

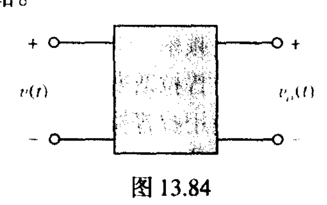


图 13.84

第14章　复频率和拉普拉斯变换

主要概念

- 奈培频率
- 复频率
- 拉普拉斯变换
- 使用拉普拉斯变换表
- 留数法
- 使用MATLAB处理多项式
- 使用MATLAB确定留数和有理分式
- 初值定理
- 终值定理

引言

现在介绍电路分析的第4个主要部分，即对复频率的概念进行讨论。稍后我们将讲到，这是一个能把以前所学的分析方法有机地统一起来的概念。前面讲过的电阻性电路分析、正弦稳态分析、瞬态分析、受迫响应、完全响应和指数函数激励的电路分析以及指数衰减的正弦函数激励的电路分析等都将成为采用复频率概念进行电路分析的特例。

通常，讨论这个话题的方法是直接给出完整的拉普拉斯变换，但这种方式不便于理解，所以我们首先介绍复频率的基本概念以及与电路分析的关系。然后，我们将把拉普拉斯变换作为一种解决一般时变电源电路的手段介绍给读者，并将讲解如何将其反变换成为时域响应以及一些能够利用频域特性的定理。当然，这些方法在电路分析中的应用范围也将在第15章中得到扩展。

14.1　复频率

为了引入“复频率”的概念，考虑一个指数衰减的正弦函数所表示的电压：

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad [1]$$

其中，σ为实数，且通常为负值。虽然这个函数经常被认为是“衰减”的，但是也存在正弦振荡幅度递增的情况，当$\sigma > 0$时就会产生这种情况。不过更为实际的是衰减函数。此外，对*RLC*电路自由响应的分析也表明指数衰减系数σ为负值。

对于式[1]，令$\sigma = \omega = 0$，可以得到一个常数电压：

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \quad [2]$$

如果只是令$\sigma = 0$，得到的是一个普通的正弦电压：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad [3]$$

而如果令 $\omega=0$，则可以得到指数电压：

$$v(t) = V_m \cos\theta\, e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \qquad [4]$$

因此，式[1]中的衰减正弦函数包含 3 种特例，分别是式[2]的直流、式[3]的正弦函数和式[4]的指数函数。

将式[4]中的指数函数和下面的相位为 0 的正弦函数进行比较，可以进一步看到 σ 的重要性：

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \qquad [5]$$

很显然，式[4]和式[5]这两个函数有许多共同之处，唯一不同的是式[4]的指数因子是实数而式[5]是虚数。若将 σ 称为"频率"，则可以突出它们之间的相似性。下面几节将会对这个术语进行详细讨论，现在只需要知道 σ 称为复频率的实部，但是不能称之为"实频率"，因为这个术语更适合于 f（不严谨的情况下，也可以用于 ω）。我们也称 σ 为奈培频率（neper frequency），这一名称源于以 e 为底的指数幂的无量纲单位。例如，给定 e^{7t}，则 $7t$ 的量纲为奈培（Np），而 7 为奈培频率，单位为奈培 / 秒。

说明："奈培"这个单位是以苏格兰哲学家和数学家约翰·奈培（1550—1617）及其奈培算法系统而命名的。历史上对其名字的拼写不是很确定。（如，有的称之为 H. A. Wheeler, *IRE Transactions on Circuit Theory* 2, 1955, p. 219。）

一般形式

对于形如式[1]的一般形式的激励函数，采用几乎完全与基于相量分析法一样的方法可以很容易求得网络的受迫响应。一旦求出了该衰减正弦函数的受迫响应，就相当于求出了直流电压、指数电压、正弦电压的受迫响应。接下来将讲到，为什么可以将 σ 和 ω 看做复频率的实部和虚部。

我们首先给出纯代数形式的复频率定义，随着本章的展开，将逐渐地对其做出物理上的解释。注意，任何可以写成下述形式的函数都可由复频率 **s** 表征：

$$f(t) = \mathbf{K} e^{\mathbf{s}t} \qquad [6]$$

其中，**K** 和 **s** 是复常数（与时间无关）。因此，复频率 **s** 只是复指数表达式中与时间 t 相乘的因子。为了通过观察就可以直接确定其复频率，有必要将一个给定的函数写成式[6]的形式。

直流情况

首先将这个定义应用于我们较为熟悉的激励函数，比如常数电压：

$$v(t) = V_0$$

可以将它写为以下形式：

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

因此，可以得到结论：直流电压或电流的复频率为 0（即 $\mathbf{s}=0$）。

指数情况

下一种简单的情况是指数函数：

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

该式已经是所希望的形式了。因此，电压的复频率为 σ（即 $s = \sigma + j0$）。

正弦情况

现在考虑可能令人感到惊讶的正弦电压。若给定：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

我们希望求出它在复频率下的等效表达式。根据以前的经验，我们使用欧拉公式：

$$\cos(\omega t + \theta) = \tfrac{1}{2}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}]$$

于是得到

$$\begin{aligned} v(t) &= \tfrac{1}{2}V_m[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] \\ &= \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right)e^{j\omega t} + \left(\tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right)e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

或

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{\mathbf{s}_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{\mathbf{s}_2 t}$$

我们得到的是两个复指数函数的和，因此存在两个与之对应的复频率。其中第一项的复频率为 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = j\omega$，第二项的复频率为 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 = -j\omega$。这两个 s 互为共轭，即 $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^*$；两个 K 也互为共轭：$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$ 和 $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^* = \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$，因此整个第一项和第二项也是复共轭的。其实该结果早就可以预料到，因为它们的和必须是一个实数 $v(t)$。

说明： 因为已经选取 $j = +\sqrt{-1}$，所以通过把所有出现的"j"替换成"$-j$"就可以得到任何复数的复共轭。其实也可以取负根，由此可以得到复共轭的定义。

指数衰减的正弦函数情况

最后来求指数衰减的正弦函数式[1]的复频率。我们再次使用欧拉公式，同样可以得到下面的复指数表达式：

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) \\ &= \tfrac{1}{2}V_m e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}] \end{aligned}$$

因此，

$$v(t) = \tfrac{1}{2}V_m e^{j\theta}e^{j(\sigma+j\omega)t} + \tfrac{1}{2}V_m e^{-j\theta}e^{j(\sigma-j\omega)t}$$

可以看到，为了表示指数衰减的正弦函数，同样也需要一对共轭复频率：$\mathbf{s}_1 = \sigma + j\omega$ 和 $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1^* = \sigma - j\omega$。通常情况下，$\sigma$ 和 ω 均不为 0，也就是说，指数变化的正弦波形是一般情况，而常数、正弦和指数波形是特殊情况。

s 的物理意义

s 为正实数时，例如 $\mathbf{s} = 5 + j0$，表示一个指数增长的函数 $\mathbf{K}e^{+5t}$，对于物理可实现的函数，K 必须为实数。s 为负数时，例如 $\mathbf{s} = -5 + j0$，表示一个指数衰减的函数 $\mathbf{K}e^{-5t}$。

当 s 为纯虚数时，例如 $\mathbf{s} = j10$，则无论如何都不能表示一个实数，其函数形式为 $\mathbf{K}e^{j10t}$，它还可以表示成 $\mathbf{K}(\cos 10t + j\sin 10t)$，很显然它包含实部和虚部，且每一项都是正弦形式。为了构造一个实函数，有必要考虑 s 的共轭，比如 $\mathbf{s}_{1,2} = \pm j10$，相应的 K 也必须是共轭的。然而不严格地说，

可以将$s_1 = +j10$或者$s_2 = -j10$看做是角频率为10 rad/s的正弦电压。出现共轭复频率是可以理解的。正弦电压的幅度和相位与每个频率的**K**的选择有关，因此，如果取$s_1 = j10$和$\mathbf{K}_1 = 6 - j8$，则

$$v(t) = \mathbf{K}_1 e^{s_1 t} + \mathbf{K}_2 e^{s_2 t}, \qquad s_2 = s_1^* \qquad 和 \qquad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^*$$

于是我们得到了实的正弦函数$20\cos(10t - 53.1°)$。

同样，在s取一般值的时候，例如$s = 3 - j5$，只有与其共轭（$3 + j5$）一起才能表示实函数。同样，不严格地说，这两个表示一个指数增长的正弦函数$e^{3t}\cos 5t$的共轭频率中的任何一个，其幅度和相位与**K**的选择有关。

说明： 注意，$|6 - j8| = 10$，所以$V_m = 2|\mathbf{K}| = 20$。同样，$\angle(6 - j8) = -53.13°$。

到目前为止，我们应该对复频率s的物理意义有所了解了，通常情况下，它表示一个指数变化的正弦波。s的实部与指数变化的特性有关，如果实部为负数，则随着t的增加函数值减小；如果它为正数，则相应的函数值增加；如果它等于零，则正弦函数的幅度为常数。s的实部的绝对值越大，指数增长或衰减的速度就越快。s的虚部表示正弦波的变化情况，它实际上就是角频率。s的虚部越大，则函数随时间的变化率越大。

说明： 当s的实部和虚部很大时，即s的幅度很大时，则表示一个快速变化的函数。

通常用字母σ表示s的实部，用ω（不是$j\omega$）表示虚部：

$$s = \sigma + j\omega \tag{7}$$

角频率有时也称为"实频率"，不过，如果采用这种称呼，则必须说"实频率为复频率的虚部！"这很容易引起混淆。在需要将它们区别开来的时候，应称s为复频率，σ为奈培频率，ω为角频率，$f = \omega/2\pi$为周期频率；当不会产生混淆时，可以将这4个量统称为"频率"。奈培频率的单位为奈培/秒，角频率的单位为弧度/秒，复频率s的单位有两种，分别为复奈培/秒和复弧度/秒。

练习

14.1　求下列实时域函数的复频率：(a) $(2e^{-100t} + e^{-200t})\sin 2000t$; (b) $(2 - e^{-10t})\cos(4t + \phi)$; (c) $e^{-10t}\cos 10t \sin 40t$。

14.2　用实常数A，B，C和ϕ等构造一个表示电流的实时域函数，使之含有以下频率成分：(a) 0, 10, $-10\ s^{-1}$; (b) $-5, j8, -5 - j8\ s^{-1}$; (c) $-20, 20, -20 + j20, 20 - j20\ s^{-1}$。

答案： 14.1：$-100 + j2000$，$-100 - j2000$，$-200 + j2000$，$-200 - j2000\ s^{-1}$；$j4$，$-j4$，$-10 + j4$，$-10 - j4\ s^{-1}$；$-10 + j30$，$-10 - j30$，$-10 + j50$，$-10 - j50\ s^{-1}$；14.2：$A + Be^{10t} + Ce^{-10t}$；$Ae^{-5t} + B\cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t}\cos(8t + \phi_2)$；$Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t}\cos(20t + \phi_1) + De^{20t}\cos(20t + \phi_2)$。

14.2　衰减正弦激励函数

前面已经花了足够的时间定义并介绍了复频率的物理意义，现在我们开始使用它。

指数变化的正弦函数的一般形式可以用下面的电压函数来表示：

$$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta) \tag{8}$$

与前面一样，可以用欧拉公式将其写成用复频率 s 表示的形式：

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t+\theta)}\} \tag{9}$$

或

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t-\theta)}\} \tag{10}$$

这两个表达式都是正确的，它也提醒我们：一对共轭复频率表示一个正弦函数或者一个指数衰减的正弦函数。式[9]更直接地表示了给出的衰减正弦函数，我们主要考虑这种形式。提取因子并用 $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ 替换下式中的 s：

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t}\}$$

可得

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\} \tag{11}$$

在将这种形式的激励函数作用于电路之前，应该注意到最后这种衰减正弦函数的表达式与第 10 章中讲到的非衰减正弦函数的表达式

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

有相似性，唯一的差别在于现在用的是 s 而不是 $j\omega$。这里不局限于正弦激励函数和它们的角频率，而是将这种概念扩展到在某个复频率下衰减的正弦激励函数。稍后我们会讲到：导出指数衰减正弦函数的频域表达式的方法与推导正弦函数频域的表达式相同，即简单地忽略掉符号 Re{}，并且隐藏 $e^{\mathbf{s}t}$。

现在，可以将式[8]、式[9]、式[10]或式[11]中给出的指数衰减正弦函数表达式作用于一个电网络，要求解出其受迫响应（可能是网络的某个支路电流）。因为受迫响应与激励函数及其积分和导数的形式相同，因此其响应可以假设为

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

或

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

其中，激励源和响应的复频率必须相同。

现在，如果回忆一下复激励函数实部产生响应的实部，复激励函数的虚部产生响应的虚部，则可以讨论网络的激励函数为复数的情况，即得到的复响应的实部即为所求的实响应。事实上，可以不使用符号 Re{}，但应该意识到，在任何需要得到时域响应的时候可以将它加进去。因此，给定实激励函数：

$$v(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}\}$$

用其对应的复激励函数 $V_m e^{j\theta} e^{\mathbf{s}t}$ 表示，相应的受迫响应 $I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}$ 也是复数，其实部必然是所求时域的受迫响应：

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{\mathbf{s}t}\}$$

结果包含了未知响应的幅度 I_m 和相位 ϕ。

在对问题进行详细计算以及考察其与正弦分析过程如何相似之前，有必要将这种方法的基本步骤列出如下：

- 首先，将电路用回路或节点的微积分方程组来描述。
- 将给定的激励函数和假设的受迫响应（均为复数形式）代入方程，然后求解微积分方程。
- 所有的方程都将包含因子 e^{st}，然后用 e^{st} 去除整个方程，或者说"隐藏 e^{st}"。需要注意的是：如果要求响应函数的时域形式，则必须重新将它加入表达式中。

在消去了符号 Re{ }和因子 e^{st} 后，便将所有的电压和电流从时域变换到了频域，微积分方程也就变成了代数方程，因此求解它们也就变得与正弦稳态的情况一样容易。下面用一个数值例子来说明这种基本方法。

例题 14.1　将激励函数 $v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°)$ V 作用于图 14.1 所示的串联 *RLC* 电路，求受迫响应的时域表达式 $i(t) = I_m e^{-2t}\cos(4t + \phi)$ 中 I_m 和 ϕ 的值。

解： 首先将激励函数用符号 Re{ }表示为

$$v(t) = 60e^{-2t}\cos(4t + 10°) = \text{Re}\{60e^{-2t}e^{j(4t+10°)}\}$$
$$= \text{Re}\{60e^{j10°}e^{(-2+j4)t}\}$$

或

$$v(t) = \text{Re}\{\mathbf{V}e^{\mathbf{s}t}\}$$

其中，

$$\mathbf{V} = 60\underline{/10°} \qquad \text{和} \qquad \mathbf{s} = -2 + j4$$

图 14.1　串联 *RLC* 电路受到衰减正弦电源激励，需要用频域方法求解 $i(t)$

除去符号 Re{ }，得到复激励函数：

$$60\underline{/10°}e^{\mathbf{s}t}$$

采用类似的方法，将未知响应表示为复数量 $\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$，其中 $\mathbf{I} = I_m \underline{/\phi}$。

下一步，列出该电路方程的微积分方程。根据基尔霍夫电压定律可得

$$v(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = 2i + 3\frac{di}{dt} + 10\int i\,dt$$

将给定的复激励函数和假设的未知受迫响应代入上述方程，可得

$$60\underline{/10°}e^{\mathbf{s}t} = 2\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t} + 3\mathbf{s}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}e^{\mathbf{s}t}$$

两边除以公因子 $e^{\mathbf{s}t}$，得到

$$60\underline{/10°} = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{s}\mathbf{I} + \frac{10}{\mathbf{s}}\mathbf{I}$$

因此，

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10°}}{2 + 3\mathbf{s} + 10/\mathbf{s}}$$

现在令 $\mathbf{s} = -2 + j4$，然后从这个复电流中求出 $\mathbf{I}$：

$$\mathbf{I} = \frac{60\underline{/10°}}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

整理可得

$$\mathbf{I} = 5.37\underline{/-106.6°}$$

因此，I_m 为 5.37 A，ϕ 为 −106.6°，受迫响应为

$$i(t) = 5.37e^{-2t}\cos(4t - 106.6^\circ)\ \text{A}$$

这样，通过将微积分表达式转化为代数表达式求出问题的解，可以看到这种方法的有效性。后面还将进一步介绍该方法。

练习

14.3 求与下列时域电流等效的相量表示法：(a) $24\sin(90t + 60^\circ)$ A；(b) $24e^{-10t}\cos(90t + 60^\circ)$ A；(c) $24e^{-10t}\cos 60^\circ \times \cos 90t$ A。如果 $\mathbf{V} = 12\underline{/35^\circ}$ V，当 s 等于下列值时求 $v(t)$的表达式：(d) 0；(e) $-20\ \text{s}^{-1}$；(f) $-20 + j5\ \text{s}^{-1}$。

答案：$24\underline{/-30^\circ}$ A；$24\underline{/60^\circ}$ A；$12\underline{/0^\circ}$ A；9.83 V；$9.83e^{-20t}$ V；$12e^{-20t}\cos(5t + 35^\circ)$ V。

14.3 拉普拉斯变换的定义

电路分析的常见目的之一是在线性电路的某点给定某个激励函数，然后求另外一点的受迫响应。本书开始几章主要讨论了直流激励函数，其响应形式为 V_0e^0。但在介绍了电感和电容之后，我们知道：对于简单 *RL* 和 *RC* 电路，突然加载直流激励将产生随时间按指数关系变化的响应 $V_0e^{\sigma t}$；对于 *RLC* 电路，响应的形式则为指数衰减的正弦函数 $V_0e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$。所有这些计算都是在时域中进行的，而且只考虑了直流激励函数的情况。

在开始接触正弦激励函数以后，由于求解微积分方程非常烦琐和复杂，因此需要找到一个比较简单的方法来解决这个问题。相量变换正是我们要寻找的，它是通过考虑形式为 $V_0e^{j\theta}e^{j\omega t}$ 的复激励函数来得到的。一旦意识到并不需要含有 t 的因子，则只剩下相量 $V_0e^{j\theta}$，这时就转入了频域。

历经一系列曲折的问题后，我们现在考虑形式为 $V_0e^{j\theta}e^{(\sigma+j\omega)t}$ 的激励函数。我们可以引入复频率 s，以前所讲的各种激励函数的形式现在均成了它的特殊情况：直流（$\mathbf{s} = 0$），指数（$\mathbf{s} = \sigma$），正弦（$\mathbf{s} = j\omega$），指数衰减的正弦（$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$）。通过将其与前面讨论的相量进行对比，可以看到同样能够忽略包含 t 的因子，因此可回到频域分析来得到问题的解。

双边拉普拉斯变换

我们知道，正弦激励函数产生正弦响应，而指数激励函数则产生指数响应。然而，作为一个工程师，在工作中将碰到许多既不是正弦也不是指数的波形，例如方波、锯齿波以及任意时刻的脉冲。当这些激励函数作用于一个线性电路时，得到的响应波既不是激励函数的形式，也不是指数形式。因此，我们不能通过除去含 t 的项而得到频域响应。这令人感到非常遗憾，因为事实已经证明，在频域中进行分析要比在时域中容易得多。

不过，有一种解决方法可以用来将任意函数波形展开成为指数波形相加的形式，其中每一项均有其各自的复频率。对于线性电路，已知总的响应可以通过将各指数波形的响应叠加起来得到。而且，在处理每个指数波形时，同样可以忽略含有 t 的项，从而可以在频域中进行分析。遗憾的是，为了精确地表示一般形式的时域函数，需要无限多个指数项的叠加，因此，如果硬要采用这种方法进行分解、然后将这些指数项叠加则显得有点愚蠢。实际上，可以采用积分的方法将这些项叠加起来，从而可以得到一个频域函数。

我们将使用一种称为拉普拉斯变换的方法来描述这种方法。对于一般函数$f(t)$，其拉普拉斯变换定义为

$$\mathbf{F(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad [12]$$

推导这个积分需要用到傅里叶级数和傅里叶变换的知识，这将在第 18 章中讨论。不过，有了对复频率概念、处理以及时域和频率互相变换的讨论，就可以理解拉普拉斯变换所蕴含的基本概念了。事实上，这正是拉普拉斯变换通常所做的：它将一般形式的时域函数$f(t)$变换为相应的频域函数 $\mathbf{F(s)}$。

双边拉普拉斯反变换

式[12]定义了$f(t)$的两边或双边拉普拉斯变换。“双边”这个词用来强调这样一个事实，即正t值和负t值均被包含在积分区间内。相反的操作（通常被称为拉普拉斯反变换）也用积分形式来定义[1]：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}\mathbf{F(s)}\, ds \qquad [13]$$

其中，实常数σ_0包含在积分限中是为了保证积分收敛。式[12]和式[13]构成了双边拉普拉斯变换对。幸运的是，在介绍电路分析时从来不会用到复杂的式[13]。下面将介绍一种快速且简单的方法。

单边拉普拉斯变换

在许多电路分析的问题中，激励函数和响应函数并不总是永远存在的，而是从某个特定的瞬间开始的，通常将这个起始时刻取为$t=0$。因此，对于那些在$t<0$时不存在的函数，或者不关心$t<0$时的取值的函数，可以将其看做是 $v(t)u(t)$。其拉普拉斯变换的下限取为0^-，因此可以将$t=0$时由于函数不连续性带来的影响包含在内，比如冲激或者高阶奇点等。相应的拉普拉斯变换形式为

$$\mathbf{F(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)u(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

这就是$f(t)$的单边拉普拉斯变换的定义，也可以省略“单边”，简称为拉普拉斯变换。反变换的表达式保持不变，只是在计算的时候要知道：只有在$t>0$时才有意义。下面是拉普拉斯变换对的定义，从现在开始就要用到它们：

$$\mathbf{F(s)} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad [14]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}\mathbf{F(s)}\, ds$$
$$f(t) \Leftrightarrow \mathbf{F(s)} \qquad [15]$$

也可以用符号$\mathcal{L}$来表示拉普拉斯变换及其反变换：

$$\mathbf{F(s)} = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad 和 \qquad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F(s)}\}$$

---

① 如果忽略因子 $1/2\pi j$ 并将该积分看做是相对于所有的频率求和，则$f(t) \propto \sum[\mathbf{F(s)}ds]e^{st}$，这强调了$f(t)$实际上是幅度与 $\mathbf{F(s)}$成比例的复频率项之和。

例题 14.2 求函数$f(t)=2u(t-3)$的拉普拉斯变换。

解： 为了求解$f(t)=2u(t-3)$的单边拉普拉斯变换，我们必须计算积分：

$$\mathbf{F(s)}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$
$$=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}2u(t-3)\,dt$$
$$=2\int_{3}^{\infty}e^{-st}\,dt$$

化简可得

$$\mathbf{F(s)}=\frac{-2}{\mathbf{s}}e^{-st}\bigg|_3^{\infty}=\frac{-2}{\mathbf{s}}(0-e^{-3\mathbf{s}})=\frac{2}{\mathbf{s}}e^{-3\mathbf{s}}$$

练习

14.4 设$f(t)=-6e^{-2t}[u(t+3)-u(t-2)]$。求：(a) 双边拉普拉斯变换$\mathbf{F(s)}$；(b) 单边拉普拉斯变换$\mathbf{F(s)}$。

答案： $\frac{6}{2+s}[e^{-4-2s}-e^{6+3s}]$；$\frac{6}{2+s}[e^{-4-2s}-1]$。

14.4 简单时间函数的拉普拉斯变换

本节将建立电路分析中常用时间函数的拉普拉斯变换表。假设感兴趣的函数为电压（这样的假设看似有点武断）。采用下面的定义来建立拉普拉斯变换表（在开始时这是必须的）：

$$\mathbf{V(s)}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}v(t)\,dt=\mathcal{L}\{v(t)\}$$

相应的反变换为

$$v(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty}e^{st}\mathbf{V(s)}\,ds=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V(s)}\}$$

$v(t)$与$\mathbf{V(s)}$构成了一一对应的关系。也就是说，对每一个$v(t)$，若$\mathbf{V(s)}$存在，则有且仅有一个$\mathbf{V(s)}$与之对应。看到反变换的这种奇怪的形式，可能使人感到惶惑。不过，我们很快会讲到，初涉拉普拉斯变换理论时并不需要计算这个积分。通过从时域出发变换到频域，并且利用刚才所提到的唯一性，可以得出拉普拉斯变换表，它几乎包含了所有希望进行变换的时域函数。

在继续讨论之前，先考虑一下是否存在这样一种可能，即某些函数$v(t)$根本就不存在拉普拉斯变换。一个能保证拉普拉斯积分在$\text{Re}\{\mathbf{s}\}>\sigma_0$时绝对收敛的充分条件是

1. 函数$v(t)$在每一个有限区间$t_1<t<t_2$内可积，其中$0\leq t_1<t_2<\infty$。
2. 对某些σ_0，极限$\lim_{t\to\infty}e^{-\sigma_0 t}|v(t)|$存在。

在电路分析中，不满足这两个条件的时域函数非常少①。

① 例如函数e^{t^2}和e^{e^t}，不是t^n或n^t，有关更详细的拉普拉斯变换及其应用的讨论可参阅Clare D. McGillem和George R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 3d ed. Oxford University Press, North Carolina: 1991, Chap. 5。

单位阶跃函数 $u(t)$

现在来看一看某些特殊函数的变换。首先考察单位阶跃函数 $u(t)$的拉普拉斯变换，根据定义：

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} u(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt$$
$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

因为 $\text{Re}\{s\} > 0$，满足条件 2，因此，

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad [16]$$

我们非常容易就得到了第一个拉普拉斯变换对。

说明：通常用双箭头符号表示拉普拉斯变换对。

单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$

有一个奇异函数的变换非常有意思，这个函数就是单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$。图 14.2 所示是其波形，它看起来很奇怪，然而在现实中却非常有用。单位冲激函数定义为包含单位面积的曲线，即

$$\delta(t-t_0) = 0 \qquad t \neq t_0$$
$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\, dt = 1$$

其中，ε为一个非常小的常数。因此，这个“函数”（许多纯数学家不敢这样称呼）只在点 t_0 处有非零值。若 $t_0 > 0^-$，其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t-t_0)\, dt = e^{-st_0}$$
$$\delta(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0} \qquad [17]$$

特别要注意的是：若 $t_0 = 0$，则

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \qquad [18]$$

单位冲激函数的一个有趣的特性是筛选性。考虑冲激函数与任意函数 $f(t)$乘积的积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\, dt$$

因为除了在 t_0 处之外，其余各处函数 $\delta(t-t_0)$的值均为 0，因此该积分的值为 $f(t_0)$。这一特性对于化简含有单位冲激函数的积分表达式非常有用。

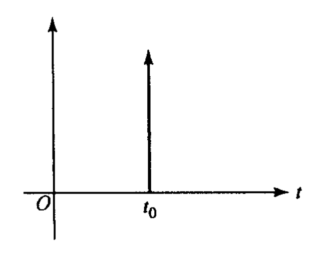


图 14.2　单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$。通常用它来表示持续时间相对于电路时间来说非常短的信号脉冲

指数函数 $e^{-\alpha t}$

之前，我们对指数函数一直存有很大兴趣，下面就来求解其变换：

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

因此，

$$e^{-\alpha t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha} \qquad [19]$$

容易看出 $\text{Re}\{s\} > -\alpha$。

斜坡函数 $tu(t)$

最后，我们考虑斜坡函数 $tu(t)$。其变换为

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} t\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \qquad [20]$$

通过分部积分或者查积分表，可以得到上面的结果。

函数 $te^{-\alpha t}u(t)$的变换是什么呢？我们把它留给读者证明，其结果为

$$t\,e^{-\alpha t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2} \qquad [21]$$

当然，还有很多时域函数值得考虑，不过在此之前先考虑一下拉普拉斯反变换会更好。

练习

14.5 分别求出 $v(t)$为下列函数时的$\mathbf{V}(s)$的表达式：(a) $4\delta(t) - 3u(t)$；(b) $4\delta(t-2) - 3tu(t)$；(c) $[u(t)]\,[u(t-2)]$。

14.6 分别求出$\mathbf{V}(s)$为下列表达式时相应的 $v(t)$：(a) 10；(b) $10/s$；(c) $10/s^2$；(d) $10/[s(s+10)]$；(e) $10/s(s+10)$。

答案：14.5：$(4s-3)/s$；$4e^{-2s} - (3/s^2)$；e^{-2s}/s。14.6：$10\delta(t)$；$10u(t)$；$10tu(t)$；$u(t) - e^{-10t}u(t)$；$10\delta(t) - 100e^{-10t}u(t)$。

14.5 反变换方法

线性原理

我们提到，运用积分表达式（即式[13]）可以将s域表达式转换为时域表达式。当然，我们也暗示过，如果使用拉普拉斯变换对的一些性质，这样的积分方法是可以避免的。为了更好地达到这个目的，我们首先引入众多非常有用的定理中的一个——最简单的线性原理：两个或者多个时域函数和的拉普拉斯变换等于各时域函数拉普拉斯变换之和。对于两个时域函数的情况：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}[f_1(t)+f_2(t)]\,dt$$
$$=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}f_1(t)\,dt+\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}f_2(t)\,dt$$
$$=\mathbf{F}_1(\mathbf{s})+\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$$

说明： 这就是拉普拉斯变换的“叠加性”。

下面举一个例子来说明这个原理的应用。假定已知某函数的拉普拉斯变换为$\mathbf{V}(\mathbf{s})$，求出相应的时域函数$v(t)$。通常可以将$\mathbf{V}(\mathbf{s})$分解成两个或多个函数相加的形式，比如分解为$\mathbf{V}_1(\mathbf{s})+\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$，它们的反变换$v_1(t)$和$v_2(t)$均可通过查表得到。根据线性原理可得

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}(\mathbf{s})\}=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})+\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\}$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\}+\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\}=v_1(t)+v_2(t)$$

根据拉普拉斯变换的定义，很容易得到线性原理的另一个重要结论。因为只是求积分，因此，一个函数乘以一个常数后的拉普拉斯变换等于该函数的拉普拉斯变换乘以该常数，即

$$\mathcal{L}\{kv(t)\}=k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

或

$$kv(t)\Leftrightarrow k\mathbf{V}(\mathbf{s}) \qquad [22]$$

其中，k为比例常数。后面将讲到，在许多电路分析中，这个结论非常有用。

说明： 这就是拉普拉斯变换的“齐次性”。

例题 14.3　已知$\mathbf{G}(\mathbf{s})=7/\mathbf{s}-31/(\mathbf{s}+17)$，求$g(t)$。

解： 该 s 域函数由$7/\mathbf{s}$和$-31/(\mathbf{s}+17)$两部分的和组成。通过线性原理可知，$g(t)$也将由两部分组成，分别对应 s 域的两部分的拉普拉斯反变换：

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\}$$

我们从第一项开始入手。根据拉普拉斯变换的齐次性原理，可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\mathbf{s}}\right\}=7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\mathbf{s}}\right\}=7u(t)$$

这里利用已知的变换对$u(t)\Leftrightarrow 1/\mathbf{s}$和齐次性得到了$g(t)$的第一项。同样也可以得到$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{\mathbf{s}+17}\right\}=31e^{-17t}u(t)$。将两项合并到一起可得

$$g(t)=[7-31e^{-17t}]u(t)$$

练习

14.7　已知函数$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\dfrac{7}{\mathbf{s}^2}+\dfrac{31}{(\mathbf{s}+17)^2}$，求$h(t)$。

答案： $h(t)=[7+31e^{-17t}]tu(t)$。

有理函数的反变换方法

在分析含有多个储能元件的电路时，常常会碰到s域表达式为s的两个多项式之比的形式：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})}$$

其中，**N(s)**和**D(s)**都是关于s的多项式。能使**N(s)** = 0的s值称为**V(s)**的零点，能使**D(s)** = 0的s值称为**V(s)**的极点。

说明：实际上，在电路分析中遇到的函数并不是必须要用式[13]来求其反变换，前提是能够熟练地使用本章中介绍的各种方法。

在求解拉普拉斯反变换时，用式[13]计算非常麻烦，通常可以采用留数的方法将这些表达式分解成若干简单项，其中每一项的反变换均可通过查表得到。这么做的前提是：**V(s)**必须为有理函数，并且分子**N(s)**的阶数必须小于分母**D(s)**的阶数。如果不是这样，则需要先做一个简单的除法运算，就像稍后给出的例子一样。结果将包含一个冲激函数（假设分子和分母多项式的阶数相同）和一个有理函数。第一项的反变换是简单的，剩下的有理函数的反变换若无法查表得到，则留数法就成为比较合适的方法。

例题 14.4 求 $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2\dfrac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}}$ 的拉普拉斯反变换。

解：**F(s)**不是一个有理函数，所以必须首先进行长除法：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}\overline{)2\mathbf{s}+4}\quad\begin{array}{r}2\\ \underline{2\mathbf{s}\quad}\\ 4\end{array}$$

因此 $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 2 + (4/\mathbf{s})$。根据线性原理可得

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\} = \mathcal{L}^{-1}\{2\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{\mathbf{s}}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t)$$

（注意，在不用长除法的情况下，这个特殊的函数可以得到简化。但这里只是为了提供一个解题的基本过程。）

练习

14.8 已知函数 $\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = \dfrac{3\mathbf{s}^2-4}{\mathbf{s}^2}$，求 $q(t)$。

答案：$q(t) = 3\delta(t) - 4tu(t)$。

使用留数法实际上是对**V(s)**进行部分分式分解，因此我们将注意力集中到分母的根上。也就是说，首先必须将关于s的多项式**D(s)**分解成二项式因子相乘的形式。**D(s)**的根可能由单根和重根组成，而且根既可以是实数，也可以是复数。然而值得注意的是，当**D(s)**的系数为实数时，复根必定是成对出现的共轭对。

相异极点和留数法

作为一个例子，让我们来求解下式的拉普拉斯反变换：

$$\mathbf{V}(s)=\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

分母已经表示为两个不同因子的乘积形式，这两个因子的根分别是$-\alpha$和$-\beta$。虽然可以将上式代入定义式中来求其反变换，但是使用线性原理来求解会简单得多。对上式进行部分分式展开可以将其分解为两个简单分式的和：

$$\mathbf{V}(s)=\frac{A}{(s+\alpha)}+\frac{B}{(s+\beta)}$$

其中，A 和 B 可以由多种方法求得，但最快的方法如下：

$$A=\lim_{s\to-\alpha}\left[(s+\alpha)\mathbf{V}(s)-\frac{(s+\alpha)}{(s+\beta)}B\right]$$

$$=\lim_{s\to-\alpha}\left[\frac{1}{(s+\beta)}-0\right]=\frac{1}{\beta-\alpha}$$

说明：该式使用了 $\mathbf{V}(s)$ 的简分式形式（即没有分解）。

注意，第二项总是为零，所以我们在实际中常把它写成

$$A=(s+\alpha)\mathbf{V}(s)|_{s=-\alpha}$$

同样可得

$$B=(s+\beta)\mathbf{V}(s)|_{s=-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}$$

因此，

$$\mathbf{V}(s)=\frac{1/(\beta-\alpha)}{(s+\alpha)}+\frac{1/(\alpha-\beta)}{(s+\beta)}$$

前面已经计算过这种形式的反变换，因此，

$$v(t)=\frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}u(t)+\frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}u(t)$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$$

如果需要，现在可以将下式加到拉普拉斯变换表中：

$$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)\Leftrightarrow\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

很容易将这种方法推广到分母为 s 的高阶多项式的情形（虽然有些烦琐）。注意，这里并没有限定常数 A 和 B 必须是实数。但是，在 α 和 β 为复数的情况下，将发现 α 和 β 互为共轭（这在数学上不是必须的，但对于物理电路而言是必须的），这时，可以得到 $A=B^*$，换句话说，这两个系数也是复共轭的。

例题 14.5　求 $\mathbf{P}(s)=\dfrac{7s+5}{s^2+s}$ 的反变换。

解：我们看到 $\mathbf{P}(s)$ 是一个有理函数（分子的阶为 1，分母的阶为 2），所以首先要将部分分式展开：

$$\mathbf{P(s)} = \frac{7s+5}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}$$

随后要确定 a 和 b 的值。我们采用留数法：

$$a = \frac{7s+5}{s+1}\bigg|_{s=0} = 5 \quad 和 \quad b = \frac{7s+5}{s}\bigg|_{s=-1} = 2$$

我们可以将 $\mathbf{P(s)}$ 写成

所以，该式的拉普萨拉斯反变换为 $p(t) = [5 + 2e^{-t}]u(t)$。

练习

14.9　已知函数 $\mathbf{Q(s)} = \dfrac{11s+30}{s^2+3s}$，求 $q(t)$。

答案：$q(t) = [10 + e^{-3t}]u(t)$。

重极点

接下来看一看重极点的情况。考虑以下函数：

$$\mathbf{V}(s) = \frac{\mathbf{N(s)}}{(s-p)^n}$$

将上式展开为

$$\mathbf{V(s)} = \frac{a_n}{(s-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(s-p)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{(s-p)}$$

为了求出每个常数，首先将未展开的 $\mathbf{V}$(s)乘以$(s-p)^n$，令 $s=p$ 可以得到常数 a_n。剩下的常数可以通过对式$(s-p)^n\,\mathbf{V}$(s)求若干次微分后再令 $s=p$、然后除以一个阶乘项得到。微分的目的是为了除去已经求得的常数，而令 $s=p$ 则是为了除去其他常数。比如，a_{n-2} 可以通过下式得到：

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s-p)^n\mathbf{V(s)}]_{s=p}$$

而 a_{n-k} 可以通过下式得到：

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}[(s-p)^n\mathbf{V(s)}]_{s=p}$$

为了说明这一过程，我们来求解一个包含这两种极点的函数：$s=0$ 的单极点和 $s=-6$ 的二重极点。

例题 14.6　求以下函数的反变换

$$\mathbf{V(s)} = \frac{2}{s^3+12s^2+36s}$$

解：我们注意到分母很容易进行因式分解，因此，

$$\mathbf{V(s)} = \frac{2}{s(s+6)(s+6)} = \frac{2}{s(s+6)^2}$$

正如前面所说，该函数有 3 个极点，在 $s=0$ 处有一个，在 $s=-6$ 处有两个。接下来，将该函数分解为

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{a_1}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{a_2}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{a_3}{\mathbf{s}}$$

采用刚才介绍的方法求出未知常数 a_1 和 a_2，使用以前介绍的方法可以求出 a_3，因此，

$$a_1 = \left[(\mathbf{s}+6)^2 \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{2}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-6} = \frac{-1}{3}$$

以及

$$a_2 = \frac{d}{d\mathbf{s}}\left[(\mathbf{s}+6)^2 \frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right]_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{d}{d\mathbf{s}}\left(\frac{2}{\mathbf{s}}\right)\right|_{\mathbf{s}=-6} = \left.\frac{-2}{\mathbf{s}^2}\right|_{\mathbf{s}=-6} = \frac{-1}{18}$$

采用相异极点的方法求出剩下的常数 a_3：

$$a_3 = \left.\mathbf{s}\frac{2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+6)^2}\right|_{\mathbf{s}=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

因此，可以将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 展开为

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{-\frac{1}{3}}{(\mathbf{s}+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(\mathbf{s}+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{\mathbf{s}}$$

根据线性原理，求出等式右边3项的反变换即可得到 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$ 的反变换。可以看到，右边第一项的形式为

$$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$$

根据式[21]，得到右边第一项的反变换为 $-\frac{1}{3}te^{-6t}u(t)$。用类似的方法得到第二项的反变换为 $-\frac{1}{18}e^{-6t}u(t)$，第三项的反变换为 $\frac{1}{18}u(t)$。所以，

$$v(t) = -\tfrac{1}{3}te^{-6t}u(t) - \tfrac{1}{18}e^{-6t}u(t) + \tfrac{1}{18}u(t)$$

上式也可表示为

$$v(t) = \tfrac{1}{18}[1-(1+6t)e^{-6t}]u(t)$$

练习

14.10　已知 $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 2\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2+4)^2$，求 $v(t)$。

答案： $\frac{1}{2}t\sin 2tu(t)$。

计算机辅助分析

MATLAB作为一个非常有用的数值分析软件包，可以用来求解在不同时变激励下对电路列出的方程组。最直接的办法是使用求解常微分方程（ODE）的函数ode23( )和ode45( )。这两个函数采用了基于微分方程数值解的方法，ode45( )的精度相对要高一些。不过这种方法求得的只是一些离散时刻上的解，并没有求出所有时刻上的解。当取的点足够密时，在许多情况下离散解也足以解决问题了。

拉普拉斯变换提供了求微分方程精确表达式的一种方法，这比用ODE函数求得的数值解要好得多。在后面介绍s域表达式时将讲到拉普拉斯变换的另一个突出的优点，特别是在对分母多项式分解因式之后。



前面讲到，进行拉普拉斯变换时采用查表的方法非常方便（虽然对于那些分母多项式阶数较高的函数来说在求留数时有些烦琐）。这时，也可以使用MATLAB来帮助求解，它有一些有用的函数能够处理多项式。

在 MATLAB 中，多项式

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

以矢量形式$[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_1\ a_0]$存储。

因此，对于多项式 **N(s)** = 2 和 **D(s)** = $\mathbf{s}^3 + 12\mathbf{s}^2 + 36\mathbf{s}$，输入：

```
EDU» N = [2];
EDU» D = [1 12 36 0];
```

每个多项式的根可以调用函数 roots(**p**)求得，其中 **p** 为一个矢量，它包含多项式的系数。例如，

```
EDU» q = [1 8 16];
EDU» roots(q)
```

可以得到

```
ans =
   - 4
   - 4
```

MATLAB 也可以用来求有理函数 **N(s)**/**D(s)**的留数，使用的函数是 residue( )。例如，

```
EDU» [r p y] = residue(N, D);
```

它返回 3 个矢量 **r**，**p** 和 **y**，因此，

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{x - p_n} + \mathbf{y(s)}$$

上式是没有重极点的情况。对于 n 个重极点的情况：

$$\frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + \mathbf{y(s)}$$

需要注意的是：只要分子多项式的阶数比分母多项式的阶数低，则矢量 **y(s)**总是空的。

将上面 MATLAB 命令中的分号去掉并执行，得到的输出为

```
r =
  -0.0556
  -0.3333
   0.0556

p =
  -6
  -6
   0

y =
  [ ]
```

这与例题 14.6 求得的结果一致。

14.6 拉普拉斯变换的基本定理

现在来看两个定理——微分定理和积分定理，它们被认为是在电路分析中需要使用拉普拉斯变换的原因。利用这两个定理，可以对电路时域方程中的求导和积分运算进行变换。

时域微分定理

首先通过时域函数 $v(t)$来看时域微分，已知其拉普拉斯变换存在且为 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$，希望求出 $v(t)$的一阶导数的变换：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{dv}{dt}\,dt$$

采用分部积分的方法：

$$U = e^{-st} \qquad dV = \frac{dv}{dt}dt$$

从而得到

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = v(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + \mathbf{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}v(t)\,dt$$

当 t 趋于无穷大时，右式的第一项必定趋于 0，否则 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$不存在，因此，

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0^-) + \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s})$$

并且考虑到

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-) \tag{23}$$

对于高阶导数，可以得到类似的关系：

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow \mathbf{s}^2\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}v(0^-) - v'(0^-) \tag{24}$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow \mathbf{s}^3\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^2v(0^-) - \mathbf{s}v'(0^-) - v''(0^-) \tag{25}$$

其中，$v'(0^-)$是 $v(t)$的一阶导数在 $t = 0^-$时的值，$v''(0^-)$是 $v(t)$的二阶导数在初始时刻的值，依次类推。当所有的初始条件为0时，我们可以发现，在时域中对 t 求一次微分对应于在频域中乘以 $\mathbf{s}$；在时域中求两次微分对应于在频域中乘以 $\mathbf{s}^2$；依次类推。所以，时域微分和频域中的乘法是等价的，这是一个本质上的简化！我们还会看到，如果初始条件不为0，上面的结论仍然成立，下面将给出一个简单的例子加以证明。

例题 14.7 已知图 14.3 所示的串联 RL 电路，求流过 4 Ω 电阻的电流。

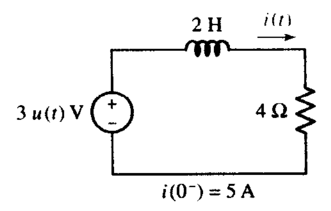


图 14.3 将微分方程 $2di/dt + 4i = 3u(t)$变换为 $2[\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s}) - i(0^-)] + 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 3/\mathbf{s}$ 来分析的电路

解：▶明确题目要求

需要求出标注电流 $i(t)$的表达式。

▶收集已知信息

网络由一个阶跃电压驱动，并且已知电流的初始值（在 $t=0^-$ 时）为 5 A。

▶设计方案

对该电路运用KVL，得到未知函数 $i(t)$ 的微分方程。对方程的两边进行拉普拉斯变换可得到一个s域的代数方程。求解该代数方程可以得到 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$，剩下的任务就是将其进行拉普拉斯反变换以得出 $i(t)$。

▶建立一组合适的方程

在时域中运用KVL，列出单回路方程，可以得到

$$2\frac{di}{dt}+4i=3u(t)$$

对各项分别进行拉普拉斯变换，得到

$$2[\mathbf{sI}(\mathbf{s})-i(0^-)]+4\mathbf{I}(\mathbf{s})=\frac{3}{\mathbf{s}}$$

▶确定是否还需要其他信息

我们已经得到了一个方程，从中可以解出与待求量 $i(t)$ 对应的频域表示 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$。

▶尝试求解

然后求解 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$，代入 $i(0^-)=5$：

$$(2\mathbf{s}+4)\mathbf{I}(\mathbf{s})=\frac{3}{\mathbf{s}}+10$$

于是，

$$\mathbf{I}(\mathbf{s})=\frac{1.5}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)}+\frac{5}{\mathbf{s}+2}$$

对上式第一项应用留数法：

$$\left.\frac{1.5}{\mathbf{s}+2}\right|_{\mathbf{s}=0}=0.75 \quad 和 \quad \left.\frac{1.5}{\mathbf{s}}\right|_{\mathbf{s}=-2}=-0.75$$

得到

$$\mathbf{I}(\mathbf{s})=\frac{0.75}{\mathbf{s}}+\frac{4.25}{\mathbf{s}+2}$$

然后用已知的变换对进行反变换，得到

$$\begin{aligned} i(t)&=0.75u(t)+4.25\mathrm{e}^{-2t}u(t)\\ &=(0.75+4.25\mathrm{e}^{-2t})u(t) \qquad \mathrm{A}\end{aligned}$$

▶验证结果是否合理或是否与预计相符

基于以前求解这类电路的经验，我们预计得到的结果为一个直流受迫响应叠加上一个指数衰减的自由响应。当 $t=0$ 时，得到 $i(0)=5$ A，这与初始条件一致；当 $t\to\infty$ 时，$i(t)\to\frac{3}{4}$，这也与预期的一致。

至此即完成了对 $i(t)$ 求解的全过程。得到的 $i(t)$ 中同时包含受迫响应 $0.75u(t)$ 和自由响应 $4.25\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，并且自动满足初始条件。这种方法为我们完整求解微分方程提供了一种十分简便的途径。

练习

14.11　在图 14.4 所示电路中，运用拉普拉斯变换的方法求 $i(t)$。

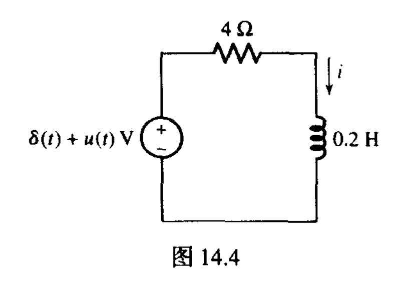


图 14.4

答案：$(0.25 + 4.75e^{-20t})u(t)$ A。

时域积分定理

当电路方程中含有时域积分时，也可以使用与上面类似的简化方法加以求解。首先求出时域函数 $\int_{0^-}^{t} v(x)dx$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right] dt$$

应用分部积分，并且令

$$u = \int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = v(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}$$

则

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} v(x)\,dx\right\} = \left\{\left[\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]\left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}v(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{\mathbf{s}}e^{-st}\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{V(s)}$$

然而，由于当 $t\to\infty$ 时 $e^{-st}\to 0$，因此右式第一项的值在积分上限时等于零，而当 $t\to 0^-$ 时，该项在取积分下限时也等于零，因此只剩下 $\mathbf{V(s)}/\mathbf{s}$ 这一项，于是，

$$\int_{0^-}^{t} v(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V(s)}}{\mathbf{s}} \qquad [26]$$

从上式可知，在时域中积分对应于在频域中除以 $\mathbf{s}$。同样，时域中相对复杂的微积分运算可以简化为频域中的代数运算。

例题 14.8　串联 *RC* 电路如图 14.5 所示，求 $t>0$ 时 $i(t)$的表达式。

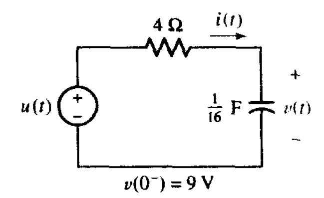


图 14.5　用拉普拉斯变换对 $\int_{0^-}^{t} i(t')dt' \Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{I(s)}$ 来分析电路的例子

解：首先列出单回路方程：

$$u(t) = 4i(t) + 16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt'$$

为了应用时域积分定理，需将其整理为积分下限为 0^-。因此，进行如下变换：

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' = 16\int_{-\infty}^{0^-} i(t')\,dt' + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$
$$= v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

于是，

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16\int_{0^-}^{t} i(t')\,dt'$$

接下来对方程的两边同时进行拉普拉斯变换。因为我们使用的是单边拉普拉斯变换，所以 $\mathcal{L}\{v(0^-)\}$ 可以简写为 $\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$，因此，

$$\frac{1}{\mathbf{s}} = 4\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{9}{\mathbf{s}} + \frac{16}{\mathbf{s}}\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

从而解出 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{-2}{\mathbf{s}+4}$$

从上式可以立即得到要求的结果：

$$i(t) = -2e^{-4t}u(t) \quad \text{A}$$

例题 14.9　对于例题 14.5 所示的电路，求 $v(t)$。为了方便起见，在图 14.6 中重新画出该电路。

解：这次，我们只是简单地列出单节点方程：

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = 0$$

对方程两边进行拉普拉斯变换，得到

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{4} - \frac{1}{4\mathbf{s}} + \frac{1}{16}\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

或者

$$\mathbf{V}(\mathbf{s})\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{4}\right) = \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{9}{4}$$

因此，

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{4}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+4)} + \frac{9}{\mathbf{s}+4}$$
$$= \frac{1}{\mathbf{s}} - \frac{1}{\mathbf{s}+4} + \frac{9}{\mathbf{s}+4}$$
$$= \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{8}{\mathbf{s}+4}$$

图 14.6　重画图 14.5，求解电压 $v(t)$

进行反变换，得到

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t})u(t)$$

在上述求解过程中没有采用常规的求解微分方程的方法，然而却很快求得了电容上的电压。最后检验解的正确性，注意，$(\frac{1}{16})dv/dt$ 应等于前面所求得的 $i(t)$ 的表达式。$t > 0$ 时：

$$\frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{16}(-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

这与例题 14.8 所得的结果一致。

练习

14.12　在图 14.7 所示的电路中，求 $t = 800$ ms 时的 $v(t)$。

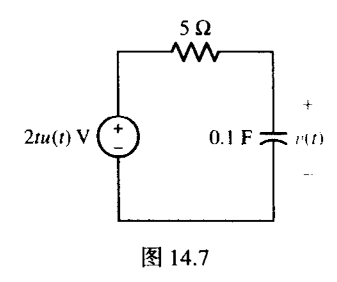


图 14.7

答案：802 mV。

正弦函数的拉普拉斯变换

下面我们将求解sin $\omega tu(t)$的拉普拉斯变换，以进一步说明线性原理和时域微分定理的应用，并且将这一最重要的变换对加到拉普拉斯变换表中。当然，可以根据定义式用分部积分法求解其拉普拉斯变换，但其实没有必要这么麻烦。事实上，可以使用如下关系：

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

根据线性原理可知，这两项和的变换等于其各自变换的和。并且，已知它们的拉普拉斯变换均为指数函数，因此可以立即得到

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\, u(t)\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{\mathbf{s} - j\omega} - \frac{1}{\mathbf{s} + j\omega}\right) = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\sin \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [27]$$

接下来应用时域微分定理求出 cos $\omega tu(t)$的变换。注意，它与 sin ωt 的导数成比例，即

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\, u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}[\sin \omega t\, u(t)]\right\} = \frac{1}{\omega}\mathbf{s}\frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t\, u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega^2} \qquad [28]$$

说明：注意，这里利用了这样一个事实——$\sin \omega t|_{t=0} = 0$。

时移定理

正如我们在以前求解瞬态问题时看到的那样，并不是所有激励函数都是从$t=0$时刻开始的。如果时域函数在时间轴上有一个确定的偏移量，其拉普拉斯变换会有什么变化呢？特别是假设$f(t)u(t)$的拉普拉斯变换为$\mathbf{F}(\mathbf{s})$，那么将原时域函数延迟a秒（在$t<a$时为0）后得到的函数$f(t-a)u(t-a)$的变换是什么呢？直接从拉普拉斯变换的定义可以得到

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,dt$$

$$= \int_{a^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)\,dt$$

对于$t \geqslant a^-$，选择新的积分变量$\tau = t-a$，得到

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau = e^{-as}\mathbf{F}(\mathbf{s})$$

因此，

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as}\mathbf{F}(\mathbf{s}) \qquad (a \geqslant 0) \tag{29}$$

上式的结果称为时移定理，它表明如果时域函数在时域延迟了a秒，则其在频域上相应的拉普拉斯变换将变为原拉普拉斯变换乘以e^{-as}。

例题14.10 求矩形脉冲$v(t)=u(t-2)-u(t-5)$的拉普拉斯变换。

解： 图14.8画出了该脉冲，可以看到在$2<t<5$的区域上其值为1，而在其他区域内其值为零。已知$u(t)$的变换为$1/\mathbf{s}$，而$u(t-2)$只是将$u(t)$延迟了2 s，因此其变换为$e^{-2s}/\mathbf{s}$，那么$u(t-5)$的变换为$e^{-5s}/\mathbf{s}$，则所求的变换为

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{e^{-2s}}{\mathbf{s}} - \frac{e^{-5s}}{\mathbf{s}} = \frac{e^{-2s}-e^{-5s}}{\mathbf{s}}$$

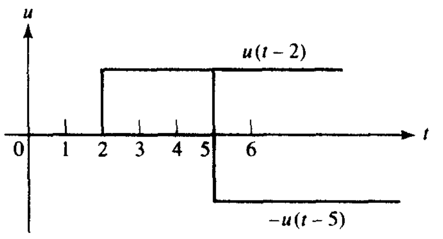


图14.8 $u(t-2)-u(t-5)$的波形

由此例可以看出没有必要根据拉普拉斯变换的定义式来求解$\mathbf{V}(\mathbf{s})$。

练习

14.13 求图14.9所示时域函数的拉普拉斯变换。

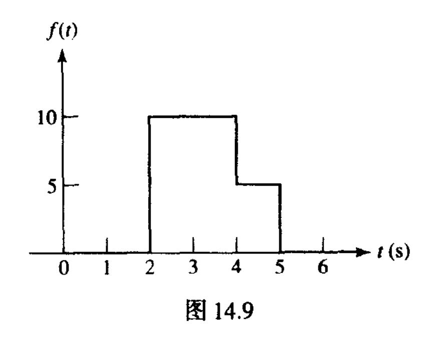


图14.9

答案： $(5/\mathbf{s})(2e^{-2s}-e^{-4s}-e^{-5s})$。

到目前为止，我们已经从前面的论述中得到了拉普拉斯变换表中的许多变换对，其中包括冲激函数、阶跃函数、指数函数、斜坡函数、正弦函数和余弦函数以及两个指数函数和的拉普拉斯变换。另外，我们还知道在时域中相加、乘以常数、微分和积分等运算在s域中的结果，这些结果也集中在表 14.1 和表 14.2 中，此外，表中还包括了一些附录 7 中的结果。

表 14.1　拉普拉斯变换对

$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\mathrm{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathrm{L}^{-1}\{\mathbf{F}(\mathbf{s})\}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\mathrm{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{\beta-\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)}$
$u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}}$	$\sin\omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$tu(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}^2}$	$\cos\omega t\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t),\ n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{\mathbf{s}^n}$	$\sin(\omega t+\theta)\,u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\sin\theta+\omega\cos\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$	$\cos(\omega t+\theta)\,u(t)$	$\frac{\mathbf{s}\cos\theta-\omega\sin\theta}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$
$t\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^2}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\, u(t)$	$\frac{\omega}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t),\ n=1,2,\cdots$	$\frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)^n}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\, u(t)$	$\frac{\mathbf{s}+\alpha}{(\mathbf{s}+\alpha)^2+\omega^2}$

表 14.2　拉普拉斯变换的性质

运算	$f(t)$	$\mathbf{F}(\mathbf{s})$
相加性	$f_1(t)\pm f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\pm\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$
尺度变换	$kf(t)$	$k\mathbf{F}(\mathbf{s})$
时域微分	$\frac{df}{dt}$	$\mathbf{s}\mathbf{F}(\mathbf{s})-f(0^-)$
时域积分	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$\mathbf{s}^2\mathbf{F}(\mathbf{s})-\mathbf{s}f(0^-)-f'(0^-)$
卷积	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$\mathbf{s}^3\mathbf{F}(\mathbf{s})-\mathbf{s}^2f(0^-)-\mathbf{s}f'(0^-)-f''(0^-)$
时移	$\int_{0^-}^{t}f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s})$
频移	$\int_{-\infty}^{t}f(t)\,dt$	$\frac{1}{\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s})+\frac{1}{\mathbf{s}}\int_{-\infty}^{0^-}f(t)\,dt$
频域微分	$f_1(t)*f_2(t)$	$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$
频域积分	$f(t-a)u(t-a),\ a\geqslant 0$	$\mathrm{e}^{-a\mathbf{s}}\mathbf{F}(\mathbf{s})$
缩放	$f(t)\mathrm{e}^{-at}$	$\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$
初值	$-tf(t)$	$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}}$
终值	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_{\mathbf{s}}^{\infty}\mathbf{F}(\mathbf{s})\,d\mathbf{s}$
时域周期性	$f(at),\ a\geqslant 0$	$\frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{s}}{a}\right)$
	$f(0^+)$	$\lim_{\mathbf{s}\to\infty}\mathbf{s}\mathbf{F}(\mathbf{s})$
	$f(\infty)$	$\lim_{\mathbf{s}\to 0}\mathbf{s}\mathbf{F}(\mathbf{s})$，$\mathbf{s}\mathbf{F}(\mathbf{s})$的所有极点都位于 LHP
	$f(t)=f(t+nT),$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$
	$n=1,2,\cdots$	其中，$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\int_{0^-}^{T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{s}t}\,dt$

实际应用——系统的稳定性

许多年前，本书的一位作者在乡村公路上开车时想试着利用车上的电子速度控制（“巡航控制”）功能。当他开启系统并且手动地将汽车速度精确设置在限定的时速之后①，“设置”按钮被按下，同时油门踏板被释放。此刻整个系统预期应该通过调节所需的供油量来维持设定的车速。



© Donovan Reese/Getty Images

遗憾的是，一些意想不到的事情发生了。汽车的速度瞬间降低了大约10%，而巡航控制器对此的反应是增加供油量。然而这两方面并没有匹配好，所以没过多久汽车的速度就超过了设定值——明显地导致了供油量的迅速下降——从而又造成汽车速度的下降。这种持续的周期性的现象使司机非常惊愕，并最终关闭了这个巡航控制系统。

很明显，这个系统的响应并没有经过最优化——事实上这个系统是不稳定的。系统稳定性是我们所关心的诸多问题（巡航控制、温度调节和追踪系统）中一个主要的工程问题，然而本章介绍的方法在检测特定系统的稳定性方面是没有价值的。

拉普拉斯变换使得在s域上的运算成为可能的最大优点在于：我们可以得到两个关于s的多项式的比值形式的传输函数，从而取代原来通过积分微分方程来描述特定系统响应的方法。对稳定性的研究可以简单地通过对传输函数的分母的分析得到——所有极点都不能有正的实部。

能够应用到特定系统中确定稳定性问题的方法比较有限。一个已知的简单方法就是Routh测试。考虑s域系统函数（有关概念将在第15章中详述）：

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}}$$

其中，代表$\mathbf{D(s)}$的s多项式可以写成$a_n\mathbf{s}^n + a_{n-1}\mathbf{s}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{s} + a_0$。在没有对该式进行因式分解的情况下，我们是无法一眼看出很多极点的。如果所有系数$a_n \cdots a_0$都为正且不等于零，则Routh测试的处理过程是把这些系数排列为如下形式：

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \end{matrix}$$

接下来的第三排是通过将前两排交叉相乘得到的：

$$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

① 由于没有照相机，没有人能够证明不是这样的。

然后，第二排和第三排交叉相乘又可以得到第四排。这个过程将持续下去直到求出$n+1$排的数值。然后从上向下观察最左边一排元素的符号改变情况，符号变化的次数也就表明了含有正实部极点的个数，因此一旦有符号的改变就说明所研究的系统是不稳定的。

例如，假设上面提到令人着急的汽车巡航控制系统的系统传输函数的分母为

$$\mathbf{D(s)} = 7\mathbf{s}^4 + 4\mathbf{s}^3 + \mathbf{s}^2 + 13\mathbf{s} + 2$$

由上式可以看到该四阶多项式所有的系数都为正且不等于零，所以可以得到相应的 Routh 表：

7	1	2
4	13	0
−21.75	2	
13.37		
2		

由此可以看到最左边的一列改变了两次符号。因此，该系统实际上是不稳定的（从而解释了为什么该系统无法正常工作），因为它的两个极点有正的实部。

14.7　初值定理和终值定理

本章最后将介绍两个定理——初值定理和终值定理。有了这两个定理，我们可以通过求$\mathbf{sF(s)}$的极限值来得到$f(0^+)$和$f(\infty)$的值。上述这种特性很有用，例如当我们只对某一特定函数的初值和终值感兴趣时，我们并不需要将时间花费在反变换上，只需运用初值定理和终值定理就可以求解了。

初值定理

为了得到初值定理，我们重新考虑导数的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \mathbf{sF(s)} - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}\,dt$$

现在令 s 趋于无穷，并将积分分解成两部分：

$$\lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)} - f(0^-)] = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} e^0\frac{df}{dt}\,dt + \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\frac{df}{dt}dt\right)$$

可以看到，第二个积分在取极限时必定趋于 0，因为被积函数本身趋于零。而$f(0^-)$不是 s 的函数，因此可以将其从左边的极限式中移出：

$$-f(0^-) + \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}] = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\int_{0^-}^{0^+} df = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[f(0^+) - f(0^-)]$$
$$= f(0^+) - f(0^-)$$

最后得到

$$f(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}]$$

或写成

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}[\mathbf{sF(s)}] \qquad [30]$$

这就是初值定理的数学描述。它说明时域函数$f(t)$的初值可以通过将其拉普拉斯变换$\mathbf{F(s)}$先乘以 s、然后对 s 取趋于无穷的极限得到。注意，所得到的$f(t)$的初值是右极限。

初值定理以及下面要介绍的终值定理可以用来检验拉普拉斯变换或者反变换的结果。例如，我们第一次计算 $\cos(\omega_0 t)u(t)$的变换时，得到的结果为 $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2+\omega_0^2)$。注意，$f(0^+)=1$，于是可以利用初值定理来检查这个变换结果的正确性：

$$\lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left(\mathbf{s}\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega_0^2}\right)=1$$

至此验证完成。

终值定理

终值定理并没有初值定理那样常用，这是因为它只适合于某些特定类型的变换。为了确定一个变换 $\mathbf{F(s)}$是否属于这些类型，必须求出所有使 $\mathbf{F(s)}$的分母多项式为零的 s 值，即 $\mathbf{F(s)}$的极点。除了一个单极点 $\mathbf{s}=0$ 以外，只有那些所有极点完全分布在左半 s 平面（即 $\sigma<0$）的变换 $\mathbf{F(s)}$才适用于终值定理。同样，我们仍然考虑 df/dt 的拉普拉斯变换：

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt=\mathbf{sF(s)}-f(0^-)$$

这时，求 s 趋于 0 的极限：

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0}\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}\frac{df}{dt}\,dt=\lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)}-f(0^-)]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}\,dt$$

假设上式中 $f(t)$及其一阶导数的拉普拉斯变换均存在，现在，将上式的最后一项表示为极限的形式：

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt&=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dt}dt\\&=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0^-)]\end{aligned}$$

考虑到 $f(0^-)$为常数，比较上面两个方程，可得

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)}] \qquad [31]$$

上式就是终值定理。在使用这个定理时，我们需要知道当 t 趋于无穷时 $f(t)$的极限 $f(\infty)$是否存在。上述条件也可以表示为 $\mathbf{F(s)}$的所有极点都分布在左半 s 平面，其中在原点的单极点（如果存在的话）除外。这时，乘积 $\mathbf{sF(s)}$的所有极点也分布在左半平面。

例题 14.11 已知 $f(t)=(1-e^{-at})u(t)$，$a>0$，利用终值定理确定 $f(\infty)$。

解： 即使不用终值定理，同样可以立即得出结论 $f(\infty)=1$。$f(t)$的变换为

$$\begin{aligned}\mathbf{F(s)}&=\frac{1}{\mathbf{s}}-\frac{1}{\mathbf{s}+a}\\&=\frac{a}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+a)}\end{aligned}$$

$\mathbf{F(s)}$的极点为 $\mathbf{s}=0$ 和 $\mathbf{s}=-a$，即不等于零的极点位于左半 s 平面（因为假设 $a>0$）。所以可以对该函数应用终值定理。乘以 s 并令 s 趋于 0，得到

$$\lim_{\mathbf{s}\to 0}[\mathbf{sF(s)}]=\lim_{\mathbf{s}\to 0}\frac{a}{\mathbf{s}+a}=1$$

可见与开始得到的 $f(\infty)$一致。

如果$f(t)$是正弦函数，那么$\mathbf{F}(s)$的极点位于$j\omega$轴上，此时如果盲目地使用终值定理，将导致终值等于零的错误结论。因为无论是$\sin \omega_0 t$还是$\cos \omega_0 t$，它们的终值都是不确定的，因此要注意$j\omega$轴上的极点。

练习

14.14 不必求解$f(t)$，确定下列各变换的$f(0^+)$和$f(\infty)$：(a) $4e^{-2s}(s+50)/s$；(b) $(s^2+6)/(s^2+7)$；(c) $(5s^2+10)/[2s(s^2+3s+5)]$。

答案：0，200；∞，无法确定（极点位于$j\omega$轴上）；2.5，1。

总结和复习

- 引入复频率的概念可以同时考虑函数的指数衰减部分和振荡部分。
- 复频率$s=\sigma+j\omega$为一般情况；直流（$s=0$）、指数（$\omega=0$）和正弦函数（$\sigma=0$）为特殊情况。
- 在 s 域中分析电路源于时域的微积分方程能够变换为频域的代数方程。
- 对于电路分析的问题，可以使用单边拉普拉斯变换$\mathbf{F}(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$将时域函数变换为频域函数。
- 拉普拉斯变换的反变换是将频域表达式变换为时域表达式。一般不直接使用定义进行反变换，通常使用拉普拉斯变换表。
- 单位冲激函数是对非常窄的脉冲（指其宽度相对于电路时间常数而言非常窄）的近似，它只在一个点上取非零值，其面积等于 1。
- $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}$（叠加性）。
- $\mathcal{L}\{kf(t)\}=k\mathcal{L}\{f(t)\}$，$k=$常数（齐次性）。
- 使用微分定理和积分定理可以将时域微积分方程变换为频域简单的代数方程。
- 在求拉普拉斯反变换时，通常使用部分分式展开的办法以及表 14.2 的各种运算，将 s 域表达式简化成若干项的组合，而这些项均可以直接从变换表（比如表 14.1）中查到。
- 在只需要求解$f(t=0^+)$和$f(t\to\infty)$的值时，使用初值定理和终值定理很有用。

深入阅读

有关拉普拉斯变换简单易读的推导过程及其性质可以参考以下书籍的第 4 章：

A. Pinkus和S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1997。

积分变换及其应用在处理科学和工程问题上的详细讨论可查阅以下书籍：

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002。

稳定性和 Routh 测试在可参阅以下书籍的第 5 章：

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, 2002。

习题

14.1 复频率

1. 求下列各函数的复频率：(a) $v(t) = 5$ V；(b) $i(t) = 3\cos 9t$ μA；(c) $i(t) = 2.5e^{-8t}$ mA；(d) $v(t) = 65e^{-1000t}\cos 1000t$ V；(e) $v(t) = 8 + 2\cos t$ mV。
2. 求下列各函数的复频率：(a) $v(t) = 33.3$ V；(b) $i(t) = 3\cos 77t$ A；(c) $q(t) = 7e^{-5t}$ C；(d) $q(t) = 7e^{-5t} - 19e^{-5t}\sin(8t - 42°)$ C。
3. 求以下各项的复共轭，并用极坐标形式表示：(a) $8e^{-t}$；(b) 19；(c) $9 - j7$；(d) $e^{j\omega t}$；(e) $\cos 4t$；(f) $\sin 4t$；(g) $88\underline{/-9°}$。
4. 求以下各项的复共轭: (a) $6 - j$; (b) 9; (c) $-j30$; (d) $5e^{-j6}$; (e) $24\underline{/-45°}$；(f) $\frac{4 - j18}{3.33 + j}$；(g) $\frac{5\underline{/0.1°}}{4 - j7}$；(h) $4 - 22\underline{/92.5°}$。
5. 在复频率 $\mathbf{s} = j20\pi s^{-1}$ 的时候，从一个典型发射队列中发射出的电量被方便地表示成 $\mathbf{Q} = 9\underline{/43°}$ μC。(a)当 $t = 1$ s 时，放出了多少电量？(b) 任何一个时刻，队列能发出的最大电量是多少？(c) 队列是否呈现衰减？基于复频率 $\mathbf{Q}$，有什么指征可以说明这点？
6. 你的一个新助手对一个测试设备的信号做了测量，结果为 $v(t) = \mathbf{V}_x e^{(-2+j60)t}$，其中 $\mathbf{V}_x = 8 - j100$ V。(a) 结果中遗漏了一项，是什么？如何知道的？(b) 这个信号的复频率是多少？(c) $\text{Im}\{\mathbf{V}_x\} > \text{Re}\{\mathbf{V}_x\}$这个事实意味着什么？(d) $|\text{Re}\{\mathbf{s}\}| < |\text{Im}\{\mathbf{s}\}|$这个事实意味着什么？
7. 设复时变电流 $\mathbf{i}(t)$的实部为 $i(t)$。(a) 如果 $\mathbf{i}_x(t) = (4 - j7)e^{(-3+j15)t}$，求 $i_x(t)$；(b) 如果 $\mathbf{i}_y(t) = (4 + j7)e^{-3t}(\cos 15t - j\sin 15t)$，求 $i_y(t)$；(c) 如果 $\mathbf{i}_A(t) = \mathbf{K}_A e^{\mathbf{s}_A t}$（其中 $\mathbf{K}_A = 5 - j8$）和 $\mathbf{s}_A = -1.5 + j12$，求 $i_A(0.4)$；(d) 如果 $\mathbf{i}_B(t) = \mathbf{K}_B e^{\mathbf{s}_B t}$，其中 $\mathbf{K}_B$ 是 $\mathbf{K}_A$ 的共轭，$\mathbf{s}_B$ 是 $\mathbf{s}_A$ 的共轭，求 $i_B(0.4)$。
8. 一个对准猎户座星云的射电望远镜检测到一个周期电流信号 $i(t) = 2.33\cos(279 \times 10^6 t)$ fA。(a) 该信号的频率（单位为 Hz）是多少？(b) 如果检测该信号是通过使其流过一个精确的 1 TΩ 的电阻并测量电阻两端的电压来实施的，写出电压信号，用两个复指数的形式表示。
9. 如果复时变电压函数为 $\mathbf{v}_s(t) = (20 - j30)e^{(-2+j50)t}$ V，求：(a) $\mathbf{v}_s(0.1)$，用极坐标形式表示；(b) $\text{Re}\{\mathbf{v}_s(t)\}$；(c) $\text{Re}[\mathbf{v}_s(0.1)]$；(d) $\mathbf{s}$；(e) $\mathbf{s}^*$。

14.2 衰减正弦激励函数

10. 图 14.10 所示电路的激励幅度为 10 V，相位角为 3°，复频率为 $-2 + j10$ s^{-1}。(a) 确定 $i(t)$；(b) 确定 $v_1(t)$和 $v_2(t)$。
11. (a) 扩展第 10 章中介绍的相量概念，用复频率 $\mathbf{s}$ 导出导纳、电容和电阻的阻抗表达式；(b) 分别求图 14.10 所示电路中电阻和导纳的阻抗；(c) 当 $\text{Re}\{\mathbf{s}\} = 0$ 时，现在的表达式是否还原到第 10 章的形式？

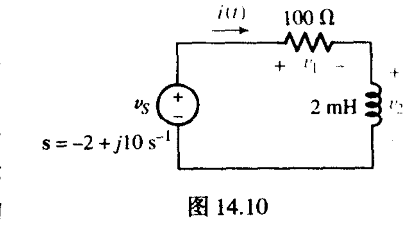


图 14.10

12. 一个简单的 RL 串联电路与北美的一个壁装电源插座相连，电压为 $v(t) = 179\cos(120\pi t)$ V。如果 $R = 100$ Ω，$L = 500$ μH：(a) 根据电压的复频域形式 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$确定复频率；(b) 在频域求解流过电路的电流 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$；(c) $i(t)$。
13. (a) 电路如图 14.11 所示，设 $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)$ V，在频域求解电流 $\mathbf{I}_x$；(b) 求 $i_x(t)$。
14. 一个简单的 RC 串联电路与日本的一个壁装电源插座相连，电压为 $v(t) = 339\cos(100\pi t)$ V。如果 $R = 2$ kΩ，$C = 100$ μH：(a) 根据电压的复频域形式 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$确定复频率；(b) 在频域求解流过电路的电流 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$；(c) $i(t)$。

15. 电路如图 14.12 所示，设 $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t$ A 和 $i_{s2} = 30e^{-3t}\sin 4t$ A。(a) 在频域求解 $\mathbf{V}_x$; (b) 求 $v_x(t)$。

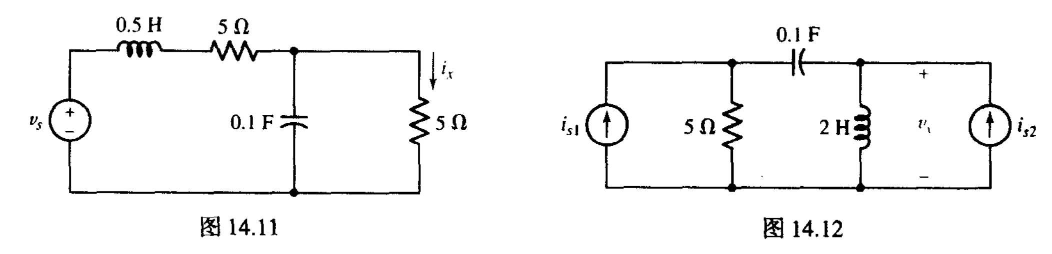


图 14.11

图 14.12

16. 与从交流电源输出端看去一样，一个工业电气装备的戴维南等效电阻大约为 3 mΩ（设备空转时还会略微大一些）。如果电源从开始接入时就被模拟成为一个指数电压源 $v(t) = 240\sqrt{2}e^{-2t} \times \cos(120\pi t)$ V: (a) 在频域求解流过电阻的电流 $i(t)$; (b) 利用时域求解的结果对(a)的解进行验证; (c) 如果一个 1000 mF 的电容加载在电源输出端（与 R_{TH} 并联），重做题(a)。

14.3 拉普拉斯变换的定义

17. 试确定 $Ku(t)$的单边拉普拉斯变换，其中 K 为一未知的实常数。
18. 采用式[14]，求下列拉普拉斯变换: (a) $3u(t)$; (b) $3u(t-3)$; (c) $3u(t-3)-3$; (d) $3u(3-t)$。
19. 采用式[14]，求下列拉普拉斯变换: (a) $2+3u(t)$; (b) $3e^{-8t}$; (c) $u(-t)$; (d) K，其中 K 为一未知的实常数。
20. 电流源提供 $4e^{-t}u(t)$的电流流过一个 1 Ω 的电阻。(a) 求电阻两端电压在频域的表达式; (b) 我们注意到 $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$，如果 $\omega = 0$，画出频域电流幅度随 σ 变化的曲线。
21. 电压源 $v(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$ V 与一个 1 Ω 的电阻并联。(a)求电压的频域表达式; (b) 求流过电阻的电流频域表达式。

14.4 简单时间函数的拉普拉斯变换

22. 确定使下列函数$f(t)$的拉普拉斯变换存在的 σ 的取值范围: (a) $t+1$; (b) $(t+1)u(t)$; (c) $e^{50t}u(t)$; (d) $e^{50t}u(t-5)$; (e) $e^{-50t}u(t-5)$。
23. 求下列各函数的单边拉普拉斯变换: (a) $8e^{-2t}[u(t+3)-u(t-3)]$; (b) $8e^{2t}[u(t+3)-u(t-3)]$; (c) $8e^{-2|t|}[u(t+3)-u(t-3)]$。
24. 求下列各函数的单边拉普拉斯变换: (a) $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{s}^{-1}\}$; (b) $1+u(t)+[u(t)]^2$; (c) $tu(t)-3$; (d) $1-\delta(t)+\delta(t-1)-\delta(t-2)$。
25. 不用式[15]，求下面的反变换: (a) $\dfrac{1}{\mathbf{s}+3}$; (b) 1; (c) $\mathbf{s}^{-2}$; (d) 275; (e) $\dfrac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^3}$。
26. 设$f_1(t)$和$f_2(t)$的拉普拉斯变换存在，证明$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$。
27. 利用拉普拉斯变换的定义式计算当$f(t)$等于下列式子时 $\mathbf{F}(1+j2)$的值: (a) $2u(t-2)$; (b) $2\delta(t-2)$; (c) $e^{-t}u(t-2)$。
28. 计算下列式子: (a) $\int_{-\infty}^{\infty} 8\sin 5t\,\delta(t-2)dt$; (b) $\int_{-\infty}^{\infty}(t-5)^2\,\delta(t-2)dt$; (c) $\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-3000t}\,\delta(t-3.333\times 10^{-4})dt$; (d) $\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t-2)dt$，其中 K 为实常数。
29. 利用单边拉普拉斯变换的定义式计算当$f(t)$等于下列式子时的 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$: (a) $[u(5-t)][u(t-2)]u(t)$; (b) $4u(t-2)$; (c) $4e^{-3t}u(t-2)$; (d) $4\delta(t-2)$; (e) $5\delta(t)\sin(10t+0.2\pi)$。
30. 计算下列各式: (a) $\int_{-\infty}^{\infty}\cos 500t\,\delta(t)\,dt$; (b) $\int_{-\infty}^{\infty}t^5\,\delta(t-2)\,dt$; (c) $\int_{-\infty}^{\infty}2.5e^{-0.001t}\,\delta(t-1000)\,dt$; (d) $\int_{-\infty}^{\infty}-K^2\,\delta(t-c)\,dt$，其中 K 和 c 为实常数。
31. 当$f(t)$等于下列函数时，利用单边拉普拉斯变换的定义求 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$: (a) $[2u(t-1)][u(3-t)]u(t^3)$; (b) $2u(t-4)$; (c) $3e^{-2t}u(t-4)$; (d) $3\delta(t-5)$; (e) $4\delta(t-1)[\cos\pi t - \sin\pi t]$。

14.5 反变换方法

32. 当$\mathbf{F}(s)$为下列函数时求$f(t)$: (a) $3 + 1/s$; (b) $3 + 1/s^2$; (c) $\frac{1}{(s+3)(s+4)}$; (d) $\frac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)}$。

33. 当$\mathbf{G}(s)$为下列函数时求$g(t)$: (a) $90 - 4.5/s$; (b) $11 + 2s/s^2$; (c) $\frac{1}{(s+1)(s+1)}$; (d) $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$。

34. 不计算积分，也不使用MATLAB，计算下列各式的拉普拉斯反变换: (a) $5s^{-1} - 16 + (s+4.4)^{-1}$; (b) $1 - s^{-1} + s^{-2}$; (c) $5(s+7)^{-1} + 88s^{-1} + \frac{17}{(s+6)(s+1)}$。

35. 某2 kΩ电阻两端电压的频域表达式为$\mathbf{V}(s) = 5s^{-1}$ V，当$t = 1$ ms时，流过该电阻的电流是多少？

36. 流过一个100 MΩ电阻的电流频域表达式为$5(s+10)^{-1}$ pA。(a) 画出电阻两端的电压$v(t)$随时间变化的曲线; (b) 在$t = 100$ ms时电阻吸收的功率是多少? (c) 何时电阻两端的电压降为其最大值的1%?

37. 求$\mathbf{F}(s)$等于下列各式的$f(t)$: (a) $[(s+1)/s] + [2/(s+1)]$; (b) $(e^{-s} + 1)^2$; (c) $2e^{-(s+1)}$; (d) $2e^{-3s}\cosh 2s$。

38. 如果$\mathbf{N}(s) = 5s$，当$\mathbf{D}(s)$等于下列各式时，求$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)\}$: $\mathbf{D}(s) =$ (a) $s^2 - 9$; (b) $(s+3)(s^2 + 19s + 90)$; (c) $(4s+12)(8s^2 + 6s + 1)$; (d)用MATLAB对(a)至(c)的答案进行验证。

39. 已知下列$\mathbf{F}(s)$的表达式，求$f(t)$: (a) $5/(s+1)$; (b) $5/(s+1) - 2/(s+4)$; (c) $18/[(s+1)(s+4)]$; (d) $18s/[(s+1)(s+4)]$; (e) $18s^2/[(s+1)(s+4)]$。

40. 如果$\mathbf{N}(s) = 2s^2$，当$\mathbf{D}(s)$等于下列各式时，求$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)\}$: $\mathbf{D}(s) =$ (a) $s^2 - 1$; (b) $(s+3)(s^2 + 19s + 90)$; (c) $(8s+12)(16s^2 + 12s + 2)$; (d)用MATLAB对(a)至(c)的答案进行验证。

41. 当$\mathbf{F}(s)$等于下列各式时求$f(t)$: (a) $\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1}$; (b) $\frac{2s+10}{s+3}$; (c) $3e^{-0.8s}$; (d) $\frac{12}{(s+2)(s+6)}$; (e) $\frac{12}{(s+2)^2(s+6)}$。

42. 如果$\mathbf{F}(s) = 2 - s^{-1} + \frac{\pi}{(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}$，求$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}(s)\}$。

43. 对下列有理函数进行部分分式展开，然后求出相应的时域函数: (a) $\mathbf{F}(s) = [(s+1)(s+2)]/[s(s+3)]$; (b) $\mathbf{F}(s) = (s+2)/[s^2(s^2+4)]$。

44. 求$\mathbf{G}(s)$分别等于下列各式时的$\mathcal{L}^{-1}\mathbf{G}\{(s)\}$: (a) $\frac{12s^3}{(s+1)(s+2)}$; (b) $\frac{12s^3}{(s^2 + 2s + 1)(s+2)}$; (c) $3s - \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$。

45. 求$\mathbf{H}(s)$分别等于下列各式时的$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(s)\}$: (a) $\frac{(s+1)^2}{(s+1)(s+2)}$; (b) $\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$; (c) $3s - \frac{s^4}{(s^2 + 2s + 1)(s+3)} + 1$。

14.6 拉普拉斯变换的基本定理

46. 求下列方程的拉普拉斯变换: (a) $5\,di/dt - 7d^2i/dt^2 + 9i = 4$; (b) $m\frac{d^2p}{dt^2} + \mu_f\frac{dp}{dt} + kp(t) = 0$，该方程描述了一个简单的减震系统的“无作用力”响应; (c) $\frac{d\Delta n_p}{dt} = -\frac{\Delta n_p}{\tau} + G_L$，其中$\tau$为常数，它描述了P型硅在受到光照时其过剩电子($\Delta n_p$)的复合速率($G_L$为正比于光照强度的常数)。

47. 如果$f(0^-) = -3$以及$15u(t) - 4\delta(t) = 8f(t) + 6f'(t)$，通过对微分方程两边求拉普拉斯变换解出$\mathbf{F(s)}$，然后再进行反变换求$f(t)$。
48. 某 RL 电路如图 14.13 所示：(a) 写出流过电感的电流$i_L(t)$的微分方程；(b) 求$i_L(t)$的拉普拉斯变换$\mathbf{I}_L\mathbf{(s)}$；(c)对$\mathbf{I}_L\mathbf{(s)}$进行拉普拉斯反变换，求$i_L(t)$。
49. (a) 求图 14.14 所示电路中$v_C(0^-)$和$v_C(0^+)$的值；(b) 写出$t > 0$时$v_C(t)$的方程；(c) 用拉普拉斯变换的方法求出$\mathbf{V}_C\mathbf{(s)}$，然后求$v_C(t)$。

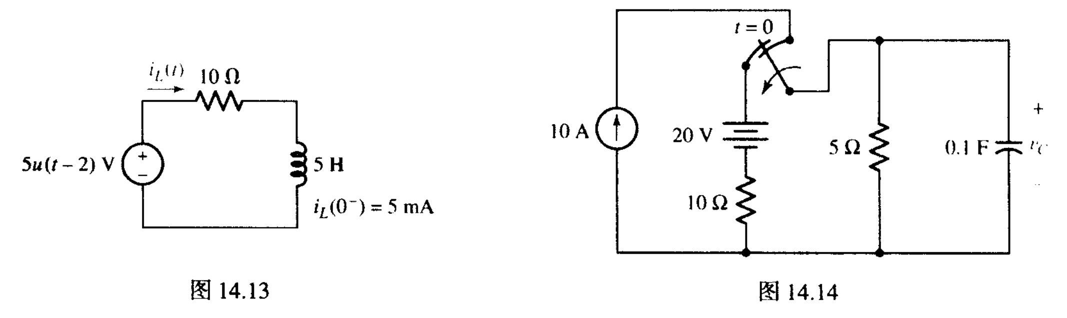


图 14.13　　图 14.14

50. (a) 将电压源$v_S(t) = -5u(t)$ V 与图 14.13 所示电路中的电压源$5u(t-2)$ V 串联，重做习题 48；(b)画出电感电流的函数曲线，并与 PSpice 仿真结果进行比较。
51. 已知微分方程$12u(t) = 20f_2'(t) + 3f_2(t)$，其中$f_2(0^-) = 2$，对该方程进行拉普拉斯变换，求$\mathbf{F}_2\mathbf{(s)}$，然后求$f_2(t)$。
52. 求下列各式的拉普拉斯反变换：(a) $2/\mathbf{s} - 4$；(b) $\mathbf{s}/(\mathbf{s}^2 + 99)$；(c) $1/(\mathbf{s}^2 + 5\mathbf{s} + 6) - 5$；(d) $\mathbf{s}$；(e) $\mathbf{s}^2$。
53. 已知下面两个微分方程$x' + y = 2u(t)$和$y' - 2x + 3y = 8u(t)$，其中$x(0^-) = 5$和$y(0^-) = 8$，求$x(t)$和$y(t)$。
54. 求$\mathbf{F(s)}$分别等于下列各式时的$f(t)$：(a) $8\mathbf{s} + 8 + 8\mathbf{s}^{-1}$，$f(0^-) = 0$；(b) $\mathbf{s}^2/(\mathbf{s}+2) - \mathbf{s} + 2$。
55. (a) 求图 14.15 所示电路中$i_C(0^-)$和$i_C(0^+)$的值；(b) 写出$t > 0$时$i_C(t)$的方程；(c) 用拉普拉斯变换的方法求出$\mathbf{I}_C\mathbf{(s)}$，然后求其反变换。
56. 求$v(t)$等于下列各式时的$\mathbf{V(s)}$：(a) $4\cos(100t)$ V；(b) $2\sin(10^3 t) - 3\cos(100t)$ V；(c) $14\cos(8t) - 2\sin(8°)$ V；(d) $\delta(t) + \sin(6t)u(6t)$；(e) $\cos(5t)\sin(3t)$ V。
57. 电阻R、电容C、电感L和理想电流源$i_s = 100e^{-5t}u(t)$并联在一起。设电流源两端的电压为v，其正参考极性位于$i_s(t)$流出电源的那一端，因此$i_s = v' + 4v + 3\int_{0^-}^{t} v\,dx$。(a) 求$R$，$L$和$C$；(b) 利用时域拉普拉斯变换的方法求$v(t)$。
58. 当$v(t)$等于下列各式时求$\mathcal{L}\{v(t)\}$：(a) $7 + (t-2)u(t-2)$ V；(b) $e^{-t+2}u(t-2)$ V；(c) $48\delta(t-1)u(t-1)$ V。
59. 电路如图 14.16 所示，列出关于i_C的微积分方程并对该方程进行拉普拉斯变换，求出$\mathbf{I}_C\mathbf{(s)}$，然后进行反变换求$i_C(t)$。

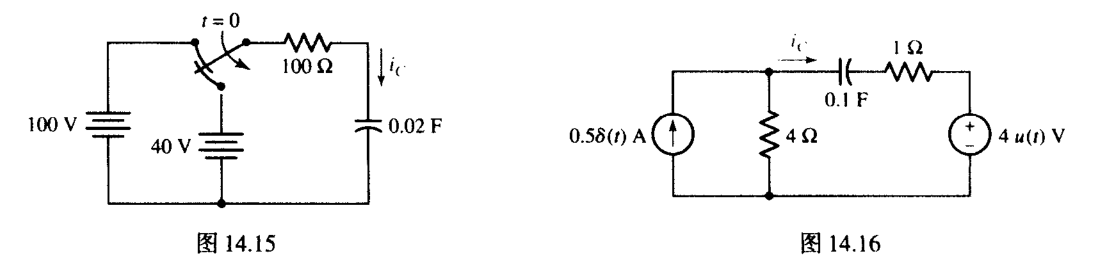


图 14.15　　图 14.16

60. 已知微分方程$v' + 6v + 9\int_{0^-}^{t} v(z)\,dz = 24(t-2)u(t-2)$且$v(0^-) = 0$，求$v(t)$。

61. 对下列函数进行 Routh 测试，确定它们是否稳定：

(a) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + 47s + 35}$；(b) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + s + 35}$。

62. 对下列系统函数进行Routh测试，确定它们是否稳定，然后对分母多项式进行因式分解以确定极点，验证 Routh 测试结果的正确性：(a) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{4s}{s^2 + 3s + 8}$；(b) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{s - 9}{s^2 + 2s + 1}$。

63. 对下列函数进行 Routh 测试，确定它们是否稳定：

(a) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{s^2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$；(b) $\mathbf{H}(s) = \dfrac{2}{s + 3}$。

14.7 初值定理和终值定理

64. 已知函数 $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V：(a) 对 $\mathbf{V}(s)$应用初值定理；(b) 用 $v(t)$在 $t = 0$ 时的值验证答案。

65. 已知函数 $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ V：(a) 对 $\mathbf{V}(s)$应用终值定理；(b) 用 $v(t)$在 $t = \infty$ 时的值验证答案。

66. 求时域函数的初值$f(0^+)$和终值$f(\infty)$，其相应的拉普拉斯变换如下：

(a) $5(s^2 + 1)/(s^3 + 1)$；(b) $5(s^2 + 1)/(s^4 + 16)$；(c) $(s + 1)(1 + e^{-4s})/(s^2 + 2)$。

67. 不求$f(t)$，确定下列变换对应的$f(0^+)$和$f(\infty)$：(a) $(2s^2 + 6)/[s(s^2 + 5s + 2)]$；(b) $2e^{-s}/(s + 3)$；(c) $(s^2 + 1)/(s^2 + 5)$。

68. 求下列变换对应的时间函数的$f(0^+)$和$f(\infty)$：(a) $5(s^2 + 1)/(s + 1)^3$；(b) $5(s^2 + 1)/[s(s + 1)^3]$；(c) $(1 - e^{-3s})/s^2$。

69. 设$f(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt})u(t)$：(a)求$\mathbf{F}(s)$；(b)分别计算等式$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s\mathbf{F}(s)]$两边的极限。

70. 求下列拉普拉斯变换函数相应的时域函数的初值和终值（如果不存在，请指出）：

(a) $\dfrac{8s - 2}{s^2 + 6s + 10}$；(b) $\dfrac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{s^3 + 6s^2 + 10s}$；(c) $\dfrac{8s - 2}{s^2 - 6s + 10}$；(d) $\dfrac{8s^2 - 2}{(s + 2)^2(s + 1)(s^2 + 6s + 10)}$。

第15章　s域电路分析

主要概念

- 阻抗概念在s域的扩展
- 用理想电源模拟初始条件
- 在s域应用节点分析、网孔分析、叠加定理和电源变换
- 在s域应用戴维南和诺顿等效原理
- 用MATLAB处理s域代数表达式
- 确定电路传输函数的零点和极点
- 电路的冲激响应
- 利用卷积确定系统响应
- 响应作为σ和ω的函数
- 利用零极点图预测电路的自由响应
- 利用运算放大器对具体的电压传输函数进行综合

引言

第14章引入了复频率的概念，同时也采用拉普拉斯变换的方法求解我们遇到的一些电路微分方程。经过这些实践，我们已经适应了根据需要在时域和频域转换的分析方法，下面将把这些强劲的技术用于结构完整的电路分析中。利用这些方法能够更有效地分析线性电路并得到完全响应——包括瞬态响应和稳态响应——但不必关心激励源的性质。

15.1　Z(s)与Y(s)

在正弦稳态电路分析中，相量非常重要，其关键在于电阻、电容和电感可以转换成阻抗。电路分析从此可以采用最基本的节点分析和网孔分析法、叠加定理、电源变换以及戴维南或者诺顿等效。正如我们早已猜到的，这个概念可以推广到s域，因为正弦稳态可以看成是s域的特殊情况（其中$\sigma = 0$）。

频域中的电阻

让我们从最简单的情况开始，电阻和电压源$v(t)$相连，根据欧姆定律：

$$v(t) = Ri(t)$$

两边求拉普拉斯变换：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

我们发现频域的电压表达式与频域的电流表达式的比值恰好等于电阻R：

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = R \qquad [1]$$

由于在频域讨论问题，为清晰起见，上述物理量称为阻抗，但是单位仍然用欧姆（Ω）表示。如同我们在用相量讨论正弦稳态问题一样，电阻的阻抗与频率无关，电阻的导纳**Y**(s)定义为**I**(s)与**V**(s)之比，简单表示为$1/R$，导纳的单位是西门子（S）。

频域中的电感

接下来考虑电感和时变电压源的串联，如图15.1(a)所示，我们知道：

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

对方程两边取拉普拉斯变换可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = L[\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s}) - i(0^-)] \tag{2}$$

现在有两项：$\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$和$Li(0^-)$。如果电感中的初始储能等于零［即$i(0^-) = 0$］，则

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

那么

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{I}(\mathbf{s})} = \mathbf{s}L \tag{3}$$

如果只对正弦稳态感兴趣，则式[3]还可以进一步简化。初始条件在这种情况下是可以忽略的，因为它只对瞬态响应有影响。因此，将$\mathbf{s} = j\omega$代入，可得

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega L$$

该结果与第10章得到的结果一致。

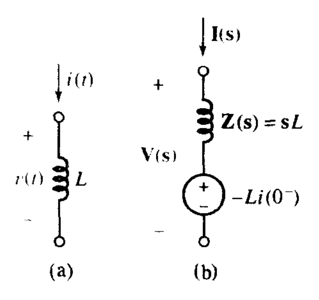


图15.1 (a)时域中的电感；(b)频域中电感的完整模型，包含一个阻抗$\mathbf{s}L$和一个电压源$-Li(0^-)$，电压源反映的是电感上的非零初始条件

s域中电感的建模

虽然式[3]是指电感的阻抗，但是必须记住这是在假设初始电流等于零的时候得到的。更一般的情况是$t = 0^-$时电路元件储存有能量，这时该式就不足以表示频域中的电感了。所幸的是，给电感建模时可以包含初始条件，即将电感和电压源或电流源组合在一起并作为阻抗。为此，将式[2]重新整理为

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-) \tag{4}$$

上式右边的第二项是常数——用亨利（H）表示的电感L乘以用安培（A）表示的初始电流$i(0^-)$，结果是一个与频率有关的项$\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$减去一个常数电压项。在这一点上依靠直觉可以帮助我们实现用两个频域的元件来模拟一个电感，如图15.1(b)所示。

图 15.1(b)所示的频域电感模型包含两个元件：阻抗 $\mathbf{s}L$ 和电压源 $Li(0^-)$。阻抗 $\mathbf{s}L$ 两端的电压根据欧姆定律得到 $\mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s})$。由于图 15.1(b)中两个元件的组合是线性的，因此前面介绍过的各种电路分析方法都可以应用到 s 域。比如，可以对模型进行电源变换，从而得到阻抗 $\mathbf{s}L$ 和电流源 $[-Li(0^-)]/\mathbf{s}L = -i(0^-)/\mathbf{s}$ 的并联，这可以通过求解式[4]得到 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 来验证：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s}) + Li(0^-)}{\mathbf{s}L} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}L} + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}} \qquad [5]$$

我们再一次得到了两项。右边的第一项是导纳 $1/\mathbf{s}L$ 乘以电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$，右边的第二项是电流，但是它的单位是 A · s。因此我们可以用两个独立的元件来模拟该等式：一个导纳 $1/\mathbf{s}L$ 和一个电流源 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 并联，模型电路如图 15.2 所示。究竟是选用图 15.1(b)所示的模型还是图 15.2 所示的模型取决于所选模型是否能够令含有电感的电路分析得到更简单的方程。注意，标注 $\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = 1/\mathbf{s}L$ 的电感也可以采用阻抗 $\mathbf{s}L$ 表示，究竟选用哪种形式取决于个人喜好以及方便程度。

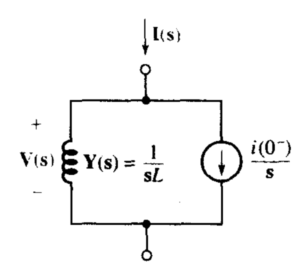


图 15.2　电感在频域的另一种模型，包含一个导纳 $1/\mathbf{s}L$ 和一个电流源 $i(0^-)/\mathbf{s}$

接下来对单位进行说明。当我们对 $i(t)$ 进行拉普拉斯变换的时候，其实是在进行一个时间段上的积分。因此，$\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 的单位严格地说应该是安培 · 秒（A · s），同样地。电压的单位应该是伏特 · 秒（A · s）。但是比较方便的还是省略秒，取电流的单位为安培（A），电压的单位为伏特（V）。这种约定不会带来任何问题，只是在仔细观察式[5]看到 $i(0^-)/\mathbf{s}$ 这项的时候，不要与左边的 $\mathbf{I}(\mathbf{s})$ 冲突。虽然我们将继续用"安培"和"伏特"来测量相量电压和电流，但是在用单位验证代数方程时必须记住其中隐含了单位"秒"。

例题 15.1　电路如图 15.3(a)所示，初始电流 $i(0^-) = 1$ A，计算电压 $v(t)$。

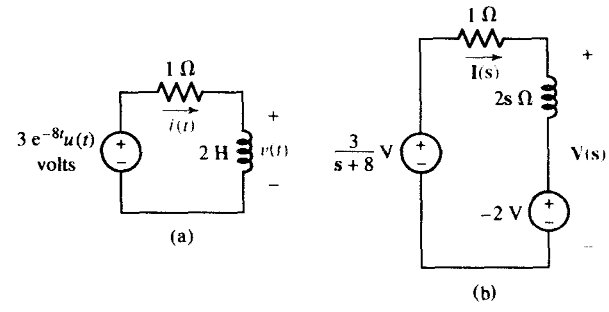


图 15.3　(a) 简单电阻 − 电感电路，需要求解电压 $v(t)$；(b) 频域等效电路，电感的初始电流由串联电压源 $-Li(0^-)$ 来表示

解： 首先将图 15.3(a)所示电路转化为频域的等效电路，如图 15.3(b)所示，电感用两个元件的模型替换：阻抗 $\mathbf{s}L = 2\mathbf{s}\ \Omega$，独立电压源 $-Li(0^-) = -2$ V。



求得电压$\mathbf{V}(\mathbf{s})$，取反变换即可得到$v(t)$。注意，$\mathbf{V}(\mathbf{s})$是跨接在整个电感模型两端的电压，并不仅仅是电感两端的电压。

直接写回路方程，得到

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{\left[\dfrac{3}{\mathbf{s}+8}+2\right]}{1+2\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}+9.5}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)}$$

和

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 2\mathbf{s}\,\mathbf{I}(\mathbf{s}) - 2$$

因此，

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2\mathbf{s}(\mathbf{s}+9.5)}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)} - 2$$

在准备对该表达式进行反变换之前，有必要花一点时间先简化表达式：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{2\mathbf{s}-8}{(\mathbf{s}+8)(\mathbf{s}+0.5)}$$

采用部分分式展开（手工运算或借助MATLAB），可得

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{3.2}{\mathbf{s}+8} - \frac{1.2}{\mathbf{s}+0.5}$$

参考表14.1，得到反变换为

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \quad \text{V}$$

练习

15.1 确定图15.4所示电路中的电流$i(t)$。

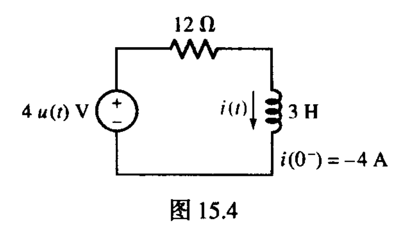


图15.4

答案：$\frac{1}{3}[1-13e^{-4t}]u(t)$ A。

S域中电容的建模

将同样的概念应用到s域为电容建模。按照无源符号规则，图15.5(a)所示电路中的电容具有如下的方程：

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

等式两边取拉普拉斯变换，可得

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = C[\mathbf{s}\mathbf{V}(\mathbf{s}) - v(0^-)]$$

或者

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{V}(\mathbf{s}) - Cv(0^-) \qquad [6]$$

它可以用一个导纳 sC 和一个电流源 $Cv(0^-)$并联表示，如图 15.5(b)所示。对该电路应用电源变换（注意，需满足无源符号规则）得到的电容等效模型为一个阻抗 $1/sC$ 和一个电压源 $v(0^-)/\mathbf{s}$ 的串联，如图 15.5(c)所示。

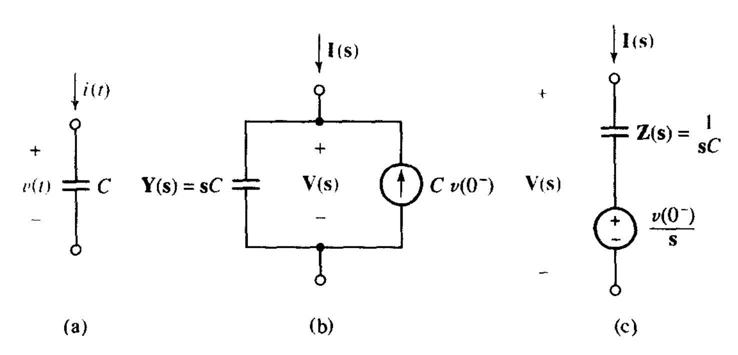


图 15.5　(a) 标注 $v(t)$和 $i(t)$的电容在时域的表示形式；(b) 电容的频域模型，含初始电压 $v(0^-)$；(c) 利用电源变换得到的等效模型

在 s 域分析中必须小心，不要混淆含有初始条件的独立源。电感的初始条件是 $i(0^-)$，这一项可以电压源的形式出现，也可以电流源的形式出现，具体取决于采用的模型。电容的初始条件是 $v(0^-)$，它可以电压源的形式出现，也可以电流源的形式出现。读者容易犯的错误是在 s 域分析的时候，第一次总是使用 $v(0^-)$作为模型的电压源部分（即使此时处理的元件是电感）。

例题 15.2　电路如图 15.6(a)所示，假设初始电压 $v_C(0^-) = -2$ V，求 $v_C(t)$。

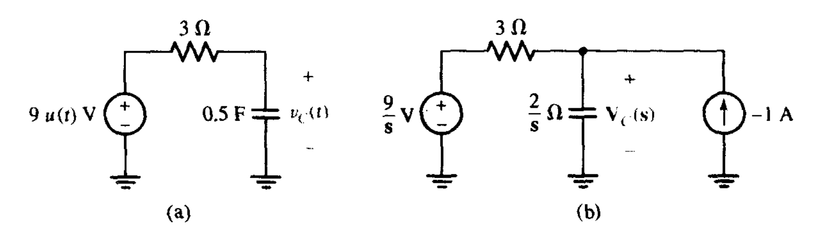


图 15.6　(a) 求电压 $v_C(t)$的电路；(b) 频域等效电路，采用基于电流源的电容模型，表示电容的初始条件

解：▶ 明确题目的要求

我们需要求出电容上电压 $v_C(t)$的表达式。

▶ 收集已知信息

题目给定电容的初始电压为 −2 V。

▶ 设计方案

第一步需要画出 s 域的等效电路，为此需要在电容的两个可能模型中选择一个，但选择任何一个都不具有特别的优势，所以选择了基于电流源的模型，如图 15.6(b)所示。

▶ 建立一组合适的方程

为了继续我们的分析，写出如下单节点方程：

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_C}{2/\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{V}_C - 9/\mathbf{s}}{3}$$

▶ 确定是否还需要其他信息

一个未知量对应一个方程，可以求得所需要的电容电压在频域的表达式。

▶ 尝试求解

求 $\mathbf{V}_C$，可见：

$$\mathbf{V}_C = \frac{18/s - 6}{3s + 2} = -2\frac{(s-3)}{s(s+2/3)}$$

通过部分分式分解，得到

$$\mathbf{V}_C = \frac{9}{s} - \frac{11}{s + 2/3}$$

将上述表达式进行拉普拉斯反变换，得到

$$v_C(t) = 9u(t) - 11\mathrm{e}^{-2t/3}u(t) \qquad \mathrm{V}$$

更简洁的式子如下：

$$v_C(t) = [9 - 11\mathrm{e}^{-2t/3}]u(t) \qquad \mathrm{V}$$

▶ 验证结果是否合理或是否与预计相符

令 $t = 0$，立即检验出 $v_C(t) = -2$ V，这与已知的初始条件一致。同样，当 $t \to \infty$ 时，$v_C(t) \to$ 9 V，从图 15.6(a)可知，一旦瞬态响应消失，电压即为该值。

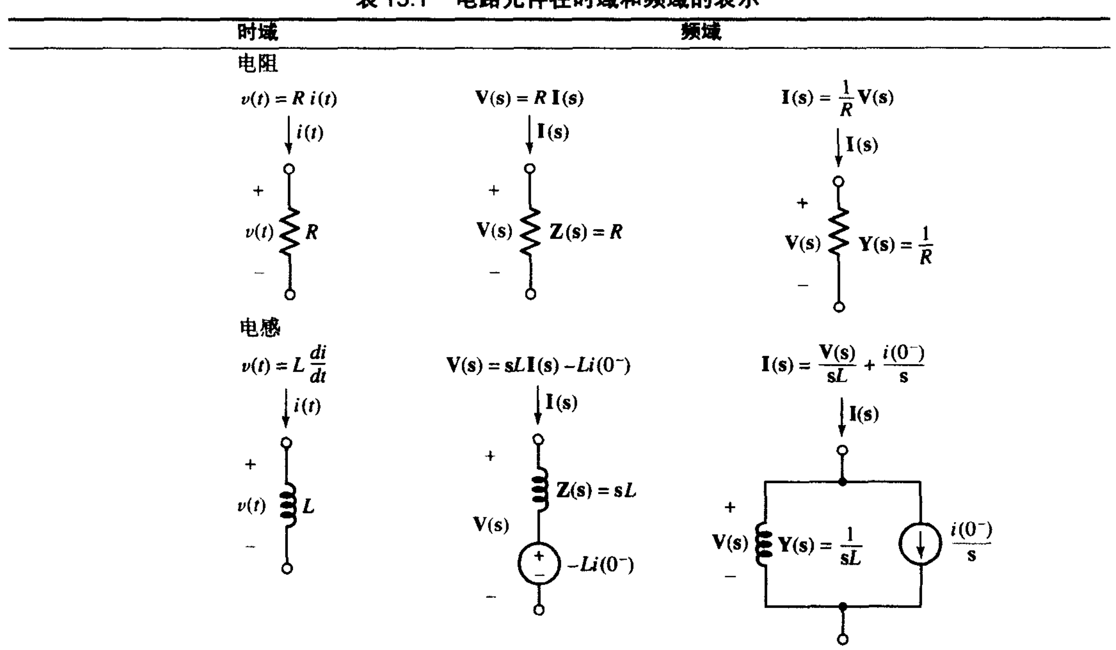
练习

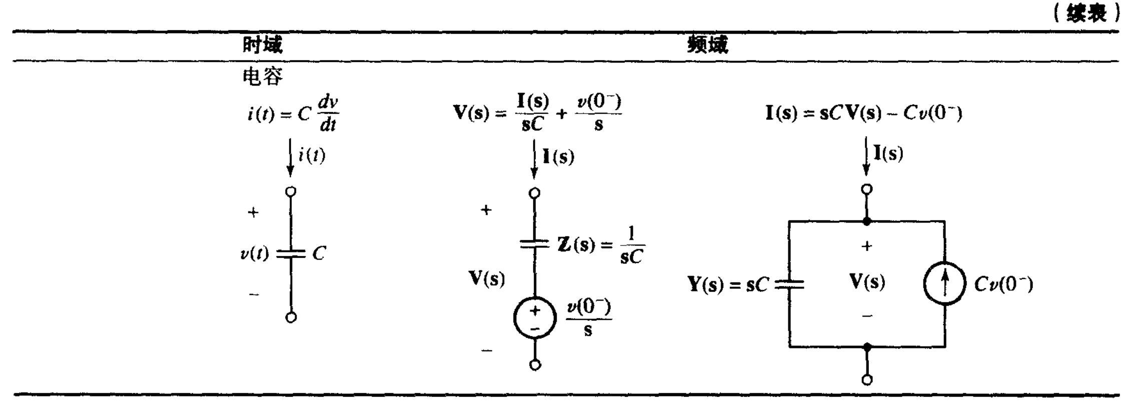
15.2　采用基于电压源的模型重复例题 15.2。

答案：$[9 - 11\mathrm{e}^{-2t/3}]u(t)$ V。

本节的结论总结在表 15.1 中。注意，假设每一种情况均符合无源符号规则。

表 15.1　电路元件在时域和频域的表示





15.2　s 域节点分析与网孔分析

我们在第 10 章介绍了如何将正弦激励的时域电路变换为频域的等效电路，变换的好处立即就能显现，因为不再需要求解微积分方程了。对这种电路（严格地说只能确定稳态响应）进行节点和网孔分析能够得到关于 $j\omega$ 的代数表达式，ω 是激励源的频率。

现在我们看到阻抗的概念可以扩展成复频率（$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$）的更一般的情况。一旦电路从时域变换到了频域，再应用节点分析或者网孔分析必将得到纯代数表达式，这一次是关于 s 的表达式。解方程的时候需要用到变量代换、克莱默法则甚至处理象征代数符号的软件（即 MATLAB）。本节介绍两个相对来说比较复杂的例题以详细展开上面提到的内容。不过在此之前先要介绍一下如何使用 MATLAB 从而使之发挥最大的作用。

计算机辅助分析

在第 14 章中，我们用 MATLAB 确定了 s 域中有理函数的留数，从而很容易地进行了反拉普拉斯变换。其实软件包的功能非常强大，它内置了很多程序，能够处理代数表达式。事实上，我们在例题中已经看到，MATLAB 可以直接对从电路分析得到的有理函数进行拉普拉斯反变换。

现在看看 MATLAB 是如何处理代数式的。代数式是以字符串的形式储存的，用撇号（‘）定义表达式。比如，先前曾将多项式 $\mathbf{p}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^3 - 12\mathbf{s} + 6$ 表示为矢量：

```
EDU» p = [1  0  -12  6];
```

当然也可以直接用符号表示为

```
EDU» p = 's^3 - 12*s + 6';
```

这两种表达方式在 MATLAB 中是不同的，代表两个明显不同的概念。当我们只想以符号方式处理代数表达式时，必须采用第二种表达方式。在处理瞬时表达式时，该方式特别有用。

考虑以下方程组：

$$(3\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = \frac{4}{\mathbf{s} + 2}$$

$$-10\mathbf{I}_1 + (4\mathbf{s} + 10)\mathbf{I}_2 = \frac{-2}{\mathbf{s} + 1}$$

采用 MATLAB 的符号标注定义两串变量为

```
EDU» eqn1 = '(3*s+10)*I1 - 10*I2 = 4/(s+2)';
EDU» eqn2 = '-10*I1 + (4*s+10)*I2 = -2/(s+1)';
```

注意，整个等式分别被包含在每一个语句中，我们的目的是解出变量I1和I2。MATLAB有一个专门的程序slove( )可以处理等式。将方程（定义成字符串）列表和未知量列表（同样定义成字符串）作为参数来调用这个函数：

```
EDU» solution = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I2');
```

返回的结果保存在变量solution中，其格式稍微有点特殊，称为“结构”，C程序员对此应该比较熟悉。到这一步需要了解如何从中提取出想要的解。如果输入：

```
EDU» I1 = solution.I1
```

可得到结果：

```
I1 =
2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+47*s+70)
```

该结果表明s域的表达式赋予变量I1，同样的语句用于求解I2。

现在可以直接用ilaplace( )函数确定拉普拉斯反变换：

```
EDU» i1 = ilaplace(I1)
i1 =
10/29*exp(-t)-172/667*exp(-35/6*t)-2/23*exp(-2*t)
```

按照上述方法，我们可以快速得到瞬时方程的解及其拉普拉斯反变换，这里瞬时方程是用节点分析法或网孔分析法列出的。命令语句ezplot(i1)可以查看想要的解的形式。但要注意，有时一些复杂的表达式会使MATLAB产生错误，这种情况下，ilaplace( )可能无法返回有用的解。

有些相关函数值得注意，因为它们可以用于快速检验手工计算的结果。函数numden( )可以把有理函数分解为两项：一项是分子，一项是分母。比如：

```
EDU» [N,D] = numden(I1)
```

返回的两个代数式分别保存在N和D中：

```
N =
8*s+18
D =
(s+1)*(6*s^2+47*s+70)
```

为了使用以前用过的函数residue( )，需要将每个符号（字符串）表达式转化为以多项式系数为元素的矢量，这可以通过函数sym2poly( )来实现：

```
EDU» n = sym2poly(N);
```

和

```
EDU» d = sym2poly(D)
d =
6  53  117  70
```

然后确定留数：

```
EDU» [r p y] = residue(n,d)
r =        p =        y =
-0.2579   -5.8333    [ ]
-0.0870   -2.0000
 0.3448   -1.0000
```

这与用ilaplace( )得到的结果一致。

有了MATLAB的新技能（当然也可固执地采用其他方法，如克莱默法则和直接变量代换），下面准备分析一些电路。

例题15.3 电路如图15.7(a)所示，电路不含初始储能，确定网孔电流 i_1 和 i_2。

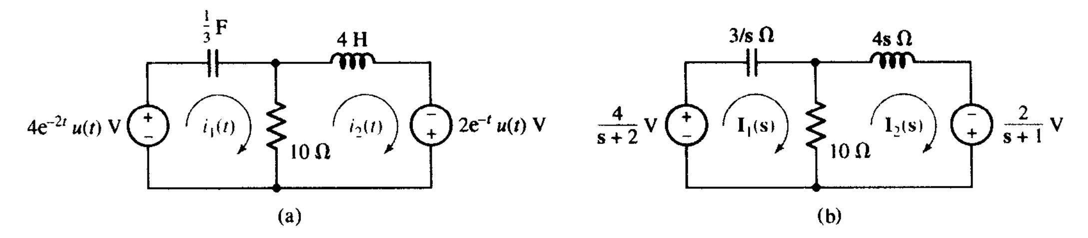


图15.7 (a)含有两个网孔的电路，需要求解独立的网孔电流；(b)频域等效电路

解： 第一步还是画出频域的等效电路。由于电路在 $t=0^-$ 时的初始储能等于零，因此 $\frac{1}{3}$ F的电容只用3/s Ω的阻抗替代，4 H的电感只用4s Ω的阻抗替代，如图15.7(b)所示。

接下来，与以前一样，写出两个网孔方程：

$$-\frac{4}{\mathbf{s}+2}+\frac{3}{\mathbf{s}}\mathbf{I}_1+10\mathbf{I}_1-10\mathbf{I}_2=0$$

或

$$\left(\frac{3}{\mathbf{s}}+10\right)\mathbf{I}_1-10\mathbf{I}_2=\frac{4}{\mathbf{s}+2} \qquad (\text{网孔}1)$$

和

$$-\frac{2}{\mathbf{s}+1}+10\mathbf{I}_2-10\mathbf{I}_1+4\mathbf{s}\mathbf{I}_2=0$$

或

$$-10\mathbf{I}_1+(4\mathbf{s}+10)\mathbf{I}_2=\frac{2}{\mathbf{s}+1} \qquad (\text{网孔}2)$$

求解 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$，可得

$$\mathbf{I}_1=\frac{2\mathbf{s}(4\mathbf{s}^2+19\mathbf{s}+20)}{(20\mathbf{s}^4+66\mathbf{s}^3+73\mathbf{s}^2+57\mathbf{s}+30)} \quad \text{A}$$

和

$$\mathbf{I}_2=\frac{30\mathbf{s}^2+43\mathbf{s}+6}{(\mathbf{s}+2)(20\mathbf{s}^3+26\mathbf{s}^2+21\mathbf{s}+15)} \quad \text{A}$$

接下来的工作是对每一项求拉普拉斯反变换，结果为

$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-t} + 841.2e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t}\sin 0.8529t \quad \text{mA}$$

和

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t}\cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t}\sin 0.8529t \quad \text{mA}$$

说明： 已知（间接地）在 $t=0^-$ 时电感中没有电流流过，所以 $i_2(0^-)=0$，因而 $i_2(0^+)$也必须等于零。答案能保证上述结论的正确性吗？

练习

15.3 电路如图 15.8 所示，假设电路在 $t=0^-$ 时储能等于零，求网孔电流 i_1 和 i_2。

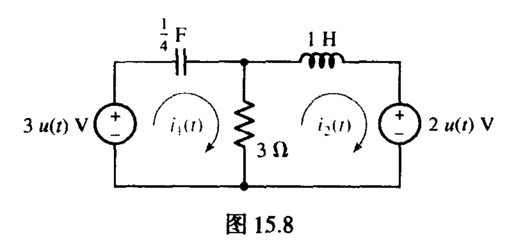


图 15.8

答案： $i_1 = e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(\sqrt{2}/8\right)e^{-2t/3}\sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A；

$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3}\cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + \left(13\sqrt{2}/24\right)e^{-2t/3}\sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$ A。

例题 15.4 电路如图 15.9 所示，采用节点分析法求电压 v_x。

解： 第一步仍然是画 s 域的等效电路。可以发现 $\frac{1}{2}$ F 的电容在 $t=0^-$ 时具有 2 V 的初始电压，因此需要采用图 15.5 所示的两个模型之一来取代它，因为要求采用节点分析法，所以采用图 15.5(b)所示的模型比较适合，最终结果电路如图 15.10 所示。

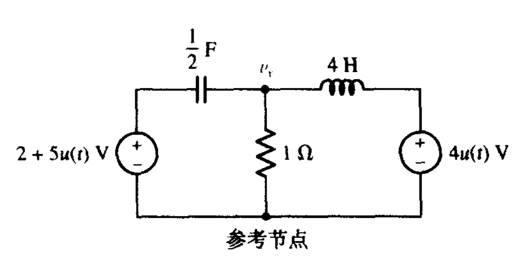




图 15.9 包含两个储能元件的简单 4 节点电路

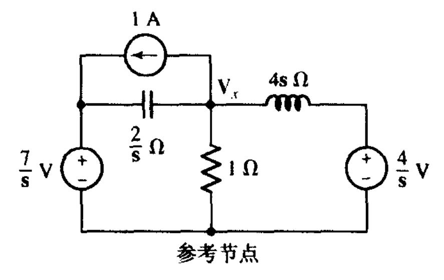


图 15.10 图 15.9 的频域等效电路

3 个节点中有两个是确定的，因此只需要写出一个节点方程：

$$-1 = \frac{\mathbf{V}_x - \frac{7}{\mathbf{s}}}{\frac{2}{\mathbf{s}}} + \mathbf{V}_x + \frac{\mathbf{V}_x - \frac{4}{\mathbf{s}}}{4\mathbf{s}}$$

因此，

$$\mathbf{V}_x = \frac{10\mathbf{s}^2+4}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+1)} = \frac{5\mathbf{s}^2+2}{\mathbf{s}\left(\mathbf{s}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\mathbf{s}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

对上式求拉普拉斯反变换，得到

$$v_x = [4+6.864\mathrm{e}^{-1.707t} - 5.864\mathrm{e}^{-0.2929t}]u(t)$$

或者

$$v_x = \left[4-\mathrm{e}^{-t}\left(9\sqrt{2}\sinh\frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

答案正确吗？一种检验方法是计算电容在 $t=0$ 时的电压值，它必须等于 2 V，因为

$$\mathbf{V}_C = \frac{7}{\mathbf{s}} - \mathbf{V}_x = \frac{4\mathbf{s}^2+28\mathbf{s}+3}{\mathbf{s}(2\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+1)}$$

用 s 乘以 $\mathbf{V}_C$ 并求 $\mathbf{s}\to\infty$ 时的极限，得到：

$$v_c(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty}\left[\frac{4\mathbf{s}^2+28\mathbf{s}+3}{2\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+1}\right] = 2\ \mathrm{V}$$

该结果与预计相同。

练习

15.4　采用节点分析法求图 15.11 所示电路的电压 $v_x(t)$。

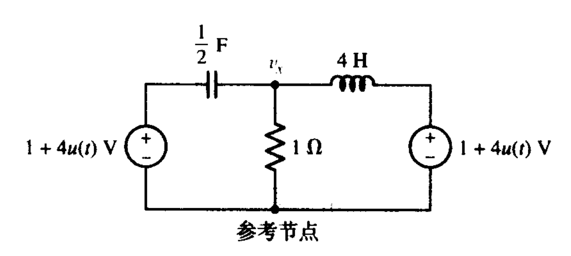


图 15.11　练习 15.4 的电路

答案：$[5+5.657(\mathrm{e}^{-1.707t}-\mathrm{e}^{-0.2929t})]u(t)$。

例题 15.5　采用节点分析法确定图 15.12(a)所示电路中的电压 v_1，v_2 和 v_3。$t=0^-$ 时电路不含任何能量。

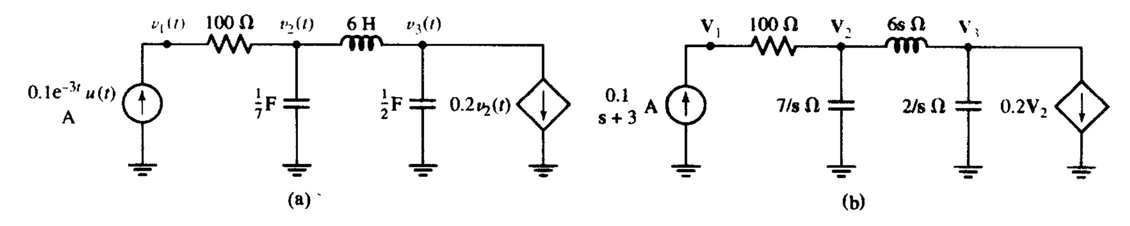


图 15.12　(a) 含有两个电容、一个电感的 4 节点电路，在 $t=0^-$ 时，所有元件的储能为零；(b) 频域的等效电路

解： 电路含有3个独立的储能元件，在 $t=0^-$ 时，任何一个储能元件均不储存能量，因此每一个元件都可以用图15.12(b)所示的阻抗来代替。注意受节点电压 $v_2(t)$ 控制的受控电流源。

先对节点1写出如下方程：

$$\frac{0.1}{\mathbf{s}+3}=\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{100}$$

或者

$$\frac{10}{\mathbf{s}+3}=\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2 \qquad (\text{节点}1)$$

对节点2：

$$0=\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{100}+\frac{\mathbf{V}_2}{7/\mathbf{s}}+\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_3}{6\mathbf{s}}$$

或者

$$-42\mathbf{s}\mathbf{V}_1+(600\mathbf{s}^2+42\mathbf{s}+700)\mathbf{V}_2-700\mathbf{V}_3=0 \qquad (\text{节点}2)$$

最后是节点3：

$$-0.2\mathbf{V}_2=\frac{\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2}{6\mathbf{s}}+\frac{\mathbf{V}_3}{2/\mathbf{s}}$$

或

$$(1.2\mathbf{s}-1)\mathbf{V}_2+(3\mathbf{s}^2+1)\mathbf{V}_3=0$$

求解这一组节点方程，得到

$$\mathbf{V}_1=3\frac{100\mathbf{s}^3+7\mathbf{s}^2+150\mathbf{s}+49}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

$$\mathbf{V}_2=7\frac{3\mathbf{s}^2+1}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

$$\mathbf{V}_3=-1.4\frac{6\mathbf{s}-5}{(\mathbf{s}+3)(30\mathbf{s}^3+45\mathbf{s}+14)}$$

剩下的一步是对每一项进行拉普拉斯反变化，从而在 $t>0$ 时：

$$v_1(t)=9.789\mathrm{e}^{-3t}+0.061\,73\mathrm{e}^{-0.2941t}+0.1488\mathrm{e}^{0.1471t}\cos(1.251t)+0.05172\mathrm{e}^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \mathrm{V}$$

$$v_2(t)=-0.2105\mathrm{e}^{-3t}+0.061\,73\mathrm{e}^{-0.2941t}+0.1488\mathrm{e}^{0.1471t}\cos(1.251t)+0.051\,72\mathrm{e}^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \mathrm{V}$$

$$v_3(t)=-0.034\,59\mathrm{e}^{-3t}+0.066\,31\mathrm{e}^{-0.2941t}-0.031\,72\mathrm{e}^{0.1471t}\cos(1.251t)-0.063\,62\mathrm{e}^{0.1471t}\sin(1.251t)\ \mathrm{V}$$

注意，由于受控电流源的作用，电压响应都是按照指数规律增长的。电路本质上将变得失控，表明在某个时刻某个元件将会溶化、爆炸或者产生其他类似的不良后果。虽然使用s域方法分析这种电路的工作量比较大，但是与时域分析方法相比，其优势还是很明显的。

练习

15.5　采用节点分析法确定图 15.13 所示电路中的电压 v_1，v_2 和 v_3。假设 $t = 0^-$ 时电感不储存任何能量。

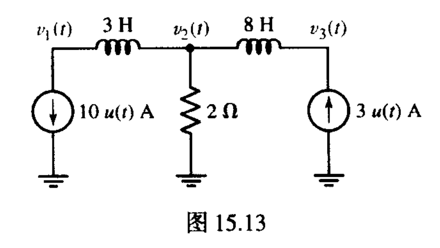


图 15.13

答案：$v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t)$ V；$v_2(t) = -14u(t)$ V；$v_3(t) = -24\delta(t) - 14u(t)$ V。

15.3　其他电路分析方法

根据电路分析的特定要求，人们通常会发现仔细选择分析方法有助于简化工作。比如，很少对含有 215 个独立源的电路应用叠加定理，因为这种方法需要分析 215 个独立的电路。将诸如电阻、电感、电容这些无源元件看做阻抗，从而可以自由地将第 3 章，第 4 章，第 5 章中讲到的电路分析方法转换到 s 域来。

因此，叠加定理、电源变换、戴维南定理和诺顿定理都可以应用到 s 域中。

例题 15.6　电路如图 15.14(a)所示，利用电源变换，确定电压 $v(t)$的表达式。

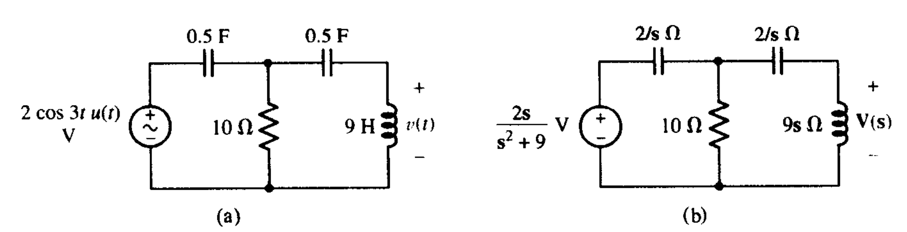


图 15.14　(a) 利用电源变换简化电路；(b) 频域等效表示

解：由于没有初始电压和电流且 $u(t)$和电压源相乘，所以电路不含有初始储能，因此可以画出如图 15.14(b)所示的频域电路。

我们的方法是连续使用电源变换，从而将两个 2/s Ω 的阻抗和 10 Ω 电阻组合在一起，留下 9 s Ω 的阻抗，因为要求的电压 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$就跨接在它的两端。现在将电压源和最左边的 2/s Ω 阻抗变换成以下电流源与 2/s Ω 阻抗并联：

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \left(\frac{2\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{2}\right) = \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9} \quad \text{A}$$

如图 15.15(a)所示，在变换完成后，面对电流源的阻抗 $\mathbf{Z}_1 = (2/\mathbf{s})\|10 = 20/(10\mathbf{s}+2)$ Ω，再用一次电源变换，可得到电压源 $\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$：

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \left(\frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2+9}\right)\left(\frac{20}{10\mathbf{s}+2}\right)$$

该电压源和阻抗 $\mathbf{Z}_1$ 以及剩下的 2/s Ω 串联，组合 $\mathbf{Z}_1$ 和 2/s Ω 得到新的 $\mathbf{Z}_2$：

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{20}{10s+2} + \frac{2}{s} = \frac{40s+4}{s(10s+2)} \quad \Omega$$

相应的电路如图 15.15(b)所示。这时可以用最简单的分压定理得到电压 V(s)的表达式：

$$\mathbf{V}(s) = \left(\frac{s^2}{s^2+9}\right)\left(\frac{20}{10s+2}\right)\frac{9s}{9s+\left[\dfrac{40s+4}{s(10s+2)}\right]}$$

$$= \frac{180s^4}{(s^2+9)(90s^3+18s^2+40s+4)}$$

分母的两项因子都含有复数根，利用 MATLAB 展开分母多项式并确定留数，可得

```
EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1,d2);
EDU» denominator = expand(d);
EDU» den = sym2poly(denominator);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residue(num,den);
```

因此，

$$\mathbf{V}(s) = \frac{1.047+j0.0716}{s-j3} + \frac{1.047-j0.0716}{s+j3} - \frac{0.0471+j0.0191}{s+0.048\,85-j0.6573} - \frac{0.0471-j0.0191}{s+0.048\,85+j0.6573} + \frac{5.590\times10^{-5}}{s+0.1023}$$

取每一项的拉普拉斯反变换，并将 $1.047+j0.0716$ 写成 $1.049e^{j3.912^\circ}$，将 $0.0471+j0.0191$ 写成 $0.050\,83e^{j157.9^\circ}$，结果为

$$\begin{aligned}v(t) =& 1.049e^{j3.912^\circ}e^{j3t}u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ}e^{-j3t}u(t)\\ &+ 0.050\,83e^{-j157.9^\circ}e^{-0.048\,85t}e^{-j0.6573t}u(t)\\ &+ 0.050\,83e^{+j157.9^\circ}e^{-0.048\,85t}e^{+j0.6573t}u(t)\\ &+ 5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t}u(t)\end{aligned}$$

将复数形式转换成三角函数形式，可以得到略微简单的电压形式：

$$\begin{aligned}v(t) =& [5.590\times10^{-5}e^{-0.1023t} + 2.098\cos(3t+3.912^\circ)\\ &+ 0.1017e^{-0.048\,85t}\cos(0.6573t+157.9^\circ)]u(t) \quad \text{V}\end{aligned}$$

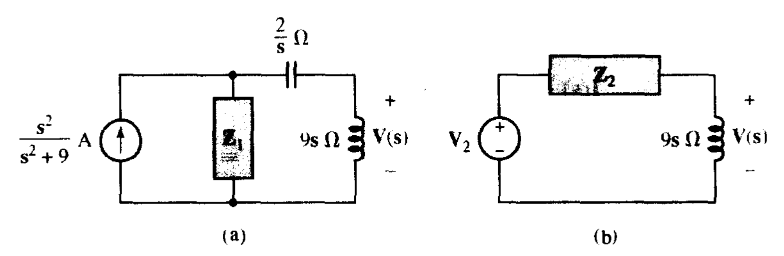


图 15.15 (a) 第一次电源变换后的电路；(b) 用于分析 V(s)的最后电路

说明： 含有复数极点的每一项都同时伴随着它的共轭复数项，对任何物理系统，复数极点一定是成对出现的共轭对。

练习

15.6　利用电源变换，将图15.16所示的电路在s域简化成单个电流源和单个阻抗并联的电路。

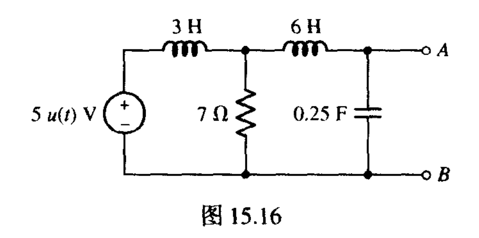
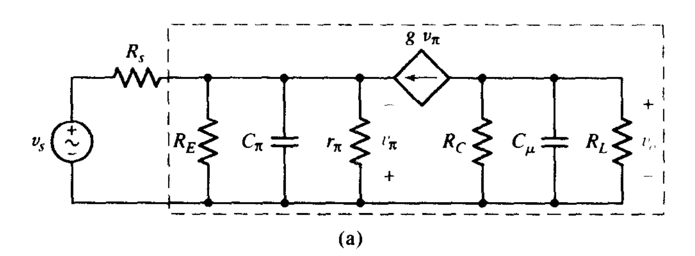


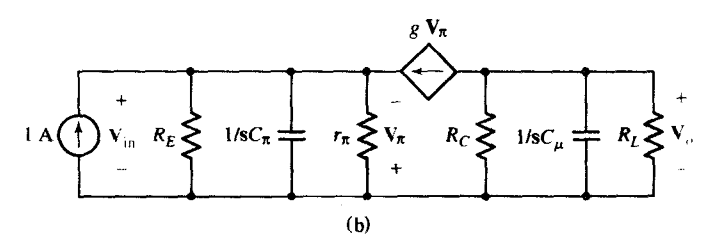
图 15.16

答案： $\mathbf{I}_s = \dfrac{35}{s^2(18s+63)}$ A，$\mathbf{Z}_s = \dfrac{72s^2+252s}{18s^3+63s^2+12s+28}$ Ω。

例题 15.7　电路如图 15.17(a)所示，求虚线框内的网络在频域的戴维南等效。



(a)



(b)

图 15.17　(a) "共基"放大器的等效电路；(b) 频域等效电路，其中输入电源 v_s 和 R_s 被 1 A 的测试电源取代

说明： 这个具体电路属于"混合 π"模型，是单晶体管电路中的一种称为共基放大器的电路类型。两个电容 C_π 和 C_μ 分别代表晶体管的内部电容，典型值为几个皮法（pF）。电路中的电阻 R_L 代表输出设备的戴维南等效电阻，比如扬声器或者激光半导体这些输出设备，电压源 v_s 和 R_s 共同表示输入设备的戴维南等效，它可能是麦克风、光敏电阻，也可能是无线电天线。

解： 我们其实要求的是与输入器件相连的戴维南等效电路，它通常被称为放大器网络的输入阻抗。在将电路转换成频域的等效电路后，我们将输入器件（v_s 和 R_s）用 1 A 的"测试"电源代替，如图 15.17(b)所示，等效阻抗 $\mathbf{Z}_{\text{in}}$ 被定义为

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{in}}}{1}$$

或简写为 $\mathbf{V}_{in}$。我们需要求出用 1 A 电流源、电阻、电容和/或受控源参数 g 表示的公式。写出如下输入节点方程：

$$1+g\mathbf{V}_{\pi}=\frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}_{eq}}$$

其中，

$$\mathbf{Z}_{eq}\equiv R_E\left\|\frac{1}{\mathbf{s}C_{\pi}}\right\|r_{\pi}=\frac{R_E r_{\pi}}{r_{\pi}+R_E+\mathbf{s}R_E r_{\pi}C_{\pi}}$$

由于 $\mathbf{V}_{\pi}=-\mathbf{V}_{in}$，所以，

$$\mathbf{Z}_{in}=\mathbf{V}_{in}=\frac{R_E r_{\pi}}{r_{\pi}+R_E+sR_E r_{\pi}C_{\pi}+gR_E r_{\pi}}\quad\Omega$$

练习

15.7 电路如图 15.18 所示，在 s 域求连接 1 Ω 电阻的诺顿等效电路。

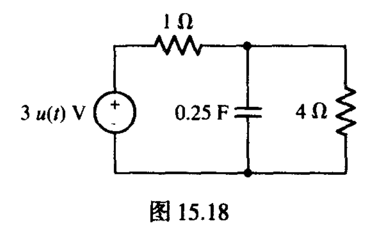


图 15.18

答案：$\mathbf{I}_{sc}=3(\mathbf{s}+1)/4\mathbf{s}$ A；$\mathbf{Z}_{th}=4/(\mathbf{s}+1)$ Ω。

15.4 极点、零点和传输函数

本节再次讨论第 14 章引出的极点、零点和传输函数的概念。

考虑图 15.19(a)所示的简单电路，s 域的等效电路如图 15.19(b)所示，根据节点分析法，得到

$$0=\frac{\mathbf{V}_{out}}{1/\mathbf{s}C}+\frac{\mathbf{V}_{out}-\mathbf{V}_{in}}{R}$$

整理并求出 $\mathbf{V}_{out}$：

$$\mathbf{V}_{out}=\frac{\mathbf{V}_{in}}{1+\mathbf{s}RC}$$

或者

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})\equiv\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}=\frac{1}{1+\mathbf{s}RC}\qquad[7]$$

这里，$\mathbf{H}(\mathbf{s})$就称为电路的传输函数，定义为输出与输入的比值。可以任意指定一个电流是输入量还是输出量，这样，对于同一个电路将有不同的传输函数。在读电路图的时候，一般是从左读到右，因此，设计者们总是尽可能地把左边作为电路的输入端，把右边作为电路的输出端。

无论是用于电路分析还是应用在其他工程领域，传输函数始终是一个非常重要的概念。原因有二：第一，一旦知道了电路的传输函数，在任何输入条件下都很容易求出相应的输出，所有要做的

工作就是把传输函数 **H**(s)与输入量相乘，再对结果取反变换；第二，传输函数的表达式包含很多信息，它们反映的是我们想要了解的电路（或系统）的行为。

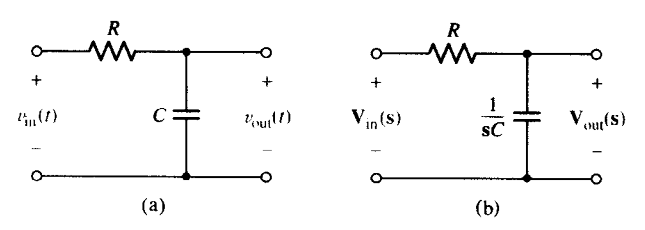


图 15.19　(a) 标注输入电压和输出电压的简单电阻－电容电路；(b) s 域等效电路

第 14 章的实际应用中曾暗示：为了了解系统的稳定性，需要知道传输函数 **H**(s)的极点和零点。下面对此进行详细的讨论。式[7]可以写成

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1/RC}{\mathbf{s} + 1/RC} \qquad [8]$$

当 $\mathbf{s} \to \infty$ 时，函数的幅度趋于零，表明函数 **H**(s)含有 $\mathbf{s} = \infty$ 的零点。当 $\mathbf{s} = -1/RC$ 时，函数趋于无穷，表明函数 **H**(s)含有 $\mathbf{s} = -1/RC$ 的极点。这些频率称为临界频率，早些了解这些概念有助于理解 15.7 节将要介绍的频率响应曲线。

说明：在计算幅度的时候，$+\infty$ 和 $-\infty$ 通常被看成是相同的频率，但是响应的相角在 ω 相当大的正值和负值上却对应两个不同的值。

15.5　卷积

至此，s 域方法在确定电路的电压和电流响应方面都很有用，然而实际电路遇到的往往是任意的激励源，因此需要一种有效的方法来确定每一次的新输出。如果能够抽象出基本电路的特性，即称为传输函数或者系统函数，求解就比较容易完成。更令人感兴趣的是，系统函数实际是电路对单位脉冲响应的拉普拉斯变换。

尽管频域和时域其实都可以进行分析，但是在频域讨论更具一般性，也更有用。这种情况下的分析过程包含以下 4 个步骤：

1. 确定电路的系统函数（如果未知）；
2. 求出激励函数的拉普拉斯变换；
3. 令此变换和系统函数相乘；
4. 对乘积项进行反变换，得到输出信号。

通过这种方法，一些比较复杂的积分表达式在 s 域中可以简化成简单形式，积分和微分的数学运算被替换成简单的乘法和除法的代数运算。记住这些要点，现在来分析电路对单位冲激函数的响应并建立系统函数，然后分析具体问题。

冲激响应

考虑一个线性电网络 N，没有初始储能，激励函数 $x(t)$加在网络上。在电路的某个点上，得到输出函数 $y(t)$。图 15.20(a)中用框图形式反映了该网络并画出了时间函数波形。激励函数只在区间 $a < t < b$ 存在，因此 $y(t)$只存在于 $t > a$ 的时段。

现在的问题是："如果已知$x(t)$的形式，能否描述$y(t)$的形式？"要回答这个问题，需要知道N的一些情况。假设知道网络N对单位冲激函数$\delta(t)$的响应，即$h(t)$，它是$t=0$时网络对单位冲激激励函数的响应函数，如图15.20(b)所示。函数$h(t)$通常称为单位冲激响应函数或称冲激响应，它是电路特性的重要描述。

根据拉普拉斯变换的知识，我们看问题可以略微深入一些。设$x(t)$的变换是$\mathbf{X}(\mathbf{s})$，$y(t)$的变换是$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$，定义系统传输函数$\mathbf{H}(\mathbf{s})$为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{X}(\mathbf{s})}$$

如果$x(t)=\delta(t)$，根据表14.1，可知$\mathbf{X}(\mathbf{s})=1$，则$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{Y}(\mathbf{s})$，这种情况下$y(t)=h(t)$。

假定单位冲激不是作用在$t=0$而是$t=\lambda$时刻，可以看到唯一发生变化的是输出有时延。即，当输入为$\delta(t-\lambda)$时，输出为$h(t-\lambda)$，如图15.20(c)所示。接下来，假设输入的不是单位脉冲，而是有一定强度的脉冲，假设其强度在数值上等于$t=\lambda$时$x(t)$的值，即等于$x(\lambda)$，它是一个常数。我们知道，对于线性电路，输入乘以一个常数将导致输出同比发生变化，也就是说，如果输入变为$x(\lambda)\delta(t-\lambda)$，那么输出响应将变为$x(\lambda)h(t-\lambda)$，如图15.20(d)所示。

将最后这个输入［即$x(\lambda)\delta(t-\lambda)$］对所有可能的$\lambda$进行累加，并将累加的结果作为$N$的激励函数，根据线性原理可知，输出必为$x(\lambda)h(t-\lambda)$对所有可能的$\lambda$进行累加的结果。不严格地说，输入的积分导致了输出的积分，如图15.20(e)所示。但是，现在的输入是什么呢？根据单位冲激的位移特性[1]，可以看到输入正是原来的$x(t)$。因此，图15.20(e)就可以用图15.20(f)表示了。

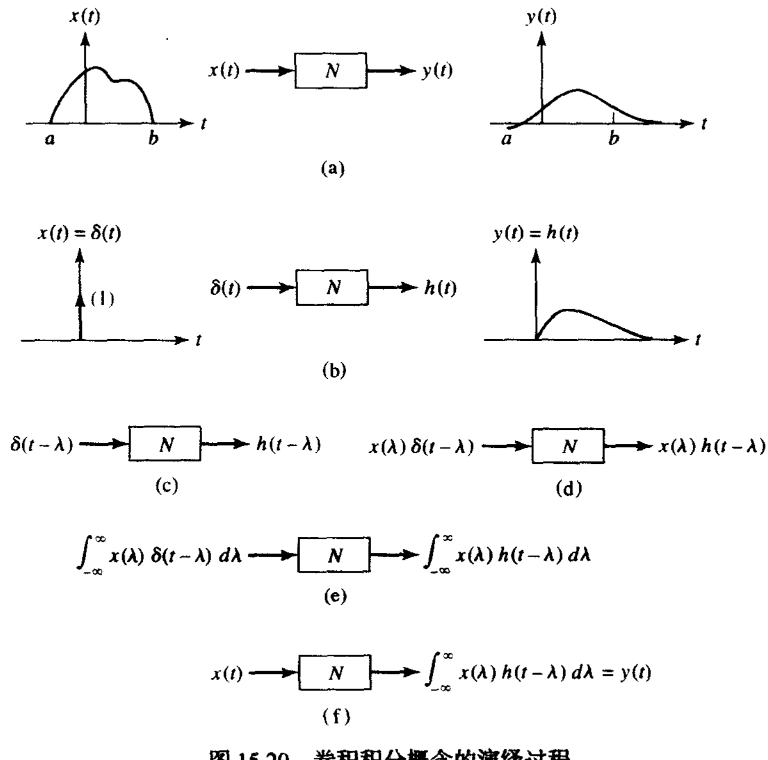


图15.20 卷积积分概念的演绎过程

[1] 冲激响应的位移特性在14.5节有描述，叙述为$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$。

卷积积分

如果系统 N 的激励函数是 $x(t)$，则输出就是图 15.20(a)描述的函数 $y(t)$，从图 15.20(f)得到

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda \qquad [9]$$

其中，$h(t)$是 N 的冲激响应。上述重要的关系式就是广为人知的卷积积分。换句话说，最后的等式表明输出等于输入和冲激函数的卷积。通常用缩写方式表示：

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

其中，“*” 读做 “与……卷积”。

说明： 注意不要将这个新符号和乘法符号相混淆。

式[9]呈现的是略有不同的等效形式。如果设 $z=t-\lambda$，$d\lambda=-dz$，$y(t)$的表达式就成为

$$y(t)=\int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz$$

因为积分变量的符号并不重要，所以将式[9]修改为

$$\begin{aligned} y(t)=x(t)*h(t)&=\int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z)\,dz \\ &=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned} \qquad [10]$$

卷积和可实现系统

式[10]的结论是相当普遍的，它可以应用于任何线性系统。但人们感兴趣的通常是物理可实现系统，即那些已经存在或者能够存在的系统，这种系统的特性使其卷积积分形式与一般形式略有不同，那就是系统不可能在激励函数作用之前产生响应。具体而言，$h(t)$为系统在 $t=0$ 时单位冲激作用下产生的响应，那么，在 $t<0$ 时，$h(t)$就不存在。因此，当 $z<0$ 时，式[10]的第二个积分的被积函数等于零；当 $t-z<0$ 或者 $z>t$ 时，第一个积分的被积函数也等于零。因此，对物理可实现系统来说，其卷积积分的积分限将有所改变：

$$\begin{aligned} y(t)=x(t)*h(t)&=\int_{-\infty}^{t} x(z)h(t-z)\,dz \\ &=\int_{0}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz \end{aligned} \qquad [11]$$

式[10]和式[11]都是有效的，但后者对线性可实现系统而言更具体，值得记住。

图解法求卷积

在进一步讨论电路的冲激函数的重要性之前先来看一个数值例子，这有助于了解卷积积分的计算过程。虽然积分表达式本身很简单，但有时计算还是很麻烦的，特别是在选取积分区间的时候。

假设输入是一个矩形电压脉冲，起始于 $t=0$，脉宽为 1 s，幅度为 1 V：

$$x(t)=v_i(t)=u(t)-u(t-1)$$

再假设输入电路的冲激响应为指数衰减函数：

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

需要求解的是输出电压 $v_o(t)$。可以立即写出积分形式的结果：

$$y(t) = v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z)\,dz$$

$$= \int_0^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)]\,dz$$

得到 $v_o(t)$ 的表达式很简单，但是多个单位阶跃函数的存在却使计算变得十分麻烦，所以必须注意被积函数等于零的那些积分区间。

现在借助图形来帮助理解卷积积分的含义。首先画出若干条 z 轴，每条 z 轴画在另一条的上方，如图 15.21 所示。已知 $v_i(t)$ 的形状，因此也就知道了 $v_i(z)$ 的形状，如图 15.21(a)所示。而 $v_i(-z)$ 只是 $v_i(z)$ 相对于变量 z 的翻转，或者说是相对于纵轴的旋转，如图 15.21(b)所示。接下来画出 $v_i(t-z)$，即将 $v_i(-z)$ 往右平移 $z=t$，如图 15.21(c)所示。下一条 z 轴［见图 15.21(d)］，画出了冲激响应 $h(z) = 2e^{-z}u(z)$。

下一步将 $v_i(t-z)$ 与 $h(z)$ 相乘，$t<1$ 时的结果如图 15.21(e)所示。输出电压 $v_o(t)$ 的值就是乘积项曲线所包围的面积（图中阴影部分）。

首先考虑 $t<0$ 的情况，这时曲线 $v_i(t-z)$ 和 $h(z)$ 之间不重叠，所以 $v_o=0$。如果 t 增加，则图 15.21(c)所示的图形往右边平移，只要 $t>0$，曲线就会与 $h(z)$ 重叠，图 15.21(e)所示的相应曲线下包含的面积也在增加，直至 $t=1$。若 t 再继续增加，则会在 $z=0$ 和脉冲的上升沿之间产生缺口，如图 15.21(f)所示，结果是与 $h(z)$ 重叠的部分在减少。

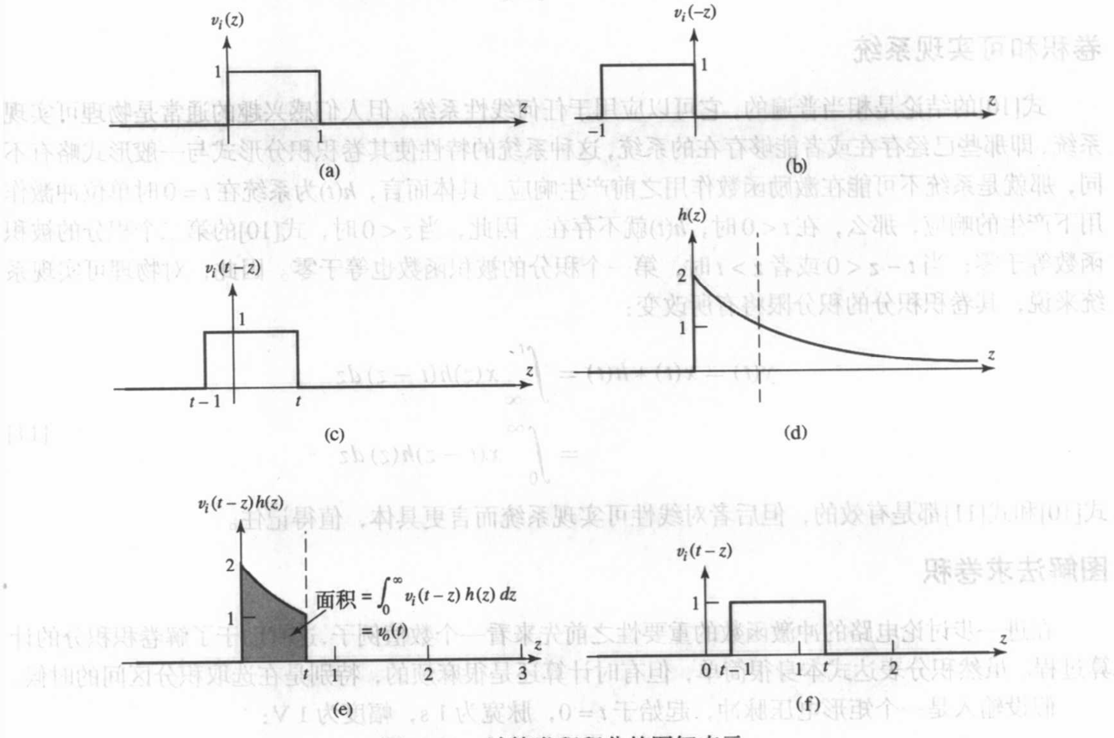


图 15.21 计算卷积积分的图解表示

换句话说，在 t 位于 0 和 1 之间取值时，积分区间从 $z=0$ 到 $z=t$；在 $t>1$ 时，积分区间为 $t-1<z<t$，因此得到

$$v_o(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t 2e^{-z}\,dz=2(1-e^{-t}) & 0\leqslant t\leqslant 1\\ \int_{t-1}^t 2e^{-z}\,dz=2(e-1)e^{-t} & t>1\end{cases}$$

输出函数与时间变量 t 的曲线如图 15.22 所示，解答完成。

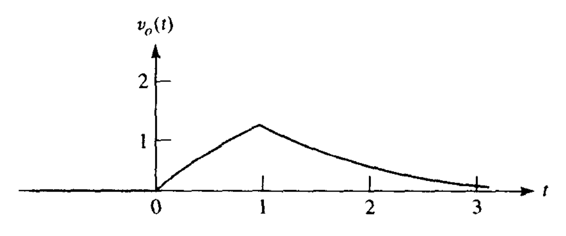


图 15.22　利用卷积的图解法得到的输出函数 v_o

例题 15.8　激励是单位阶跃函数 $x(t)=u(t)$，系统的冲激响应是 $h(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$，确定相应的输出电压 $y(t)=x(t)*h(t)$。

解：第一步是画出 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的波形，如图 15.23 所示。

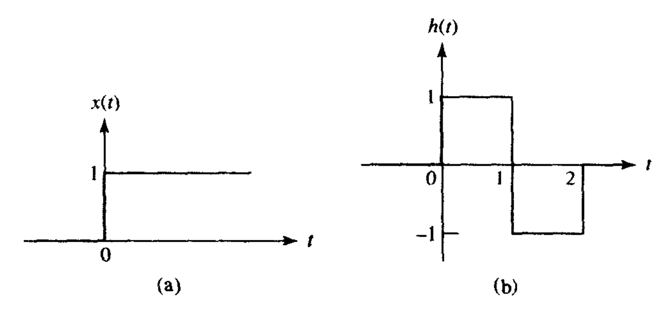


图 15.23　(a) 输入信号 $x(t)=u(t)$ 的波形；(b) 线性系统冲激响应 $h(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ 的波形

选择式[11]的第一个积分进行计算：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(z)h(t-z)\,dz$$

我们画出一系列草图来帮助确定正确的积分限，图 15.24 顺序给出了下列函数：输入 $x(z)$ 作为 z 的函数、冲激响应 $h(z)$、$h(-z)$ 曲线，它是 $h(z)$ 关于垂直轴的旋转曲线以及 $h(t-z)$，是将 $h(-z)$ 向右平移单位 t 所得。对此图，t 的选择范围为 $0<t<1$。

现在从图上容易看出第一个图和最后一个图的乘积在 t 取不同值时有所不同，当 t 小于零时，曲线没有重叠，所以

$$y(t)=0 \qquad t<0$$

对图 15.24(d)所示的情况，$h(t-z)$ 和 $x(z)$ 有非零的重叠段，范围从 $z=0$ 到 $z=t$，每个函数值均为 1，所以

$$y(t)=\int_0^t(1\times 1)\,dz=t \qquad 0<t<1$$

当t位于1和2之间时$h(t-z)$大部分滑向了右边，从而使得负方波也位于阶跃函数下，其范围从$z=0$到$z=t-1$，因此，

$$y(t)=\int_0^{t-1}[1\times(-1)]\,dz+\int_{t-1}^t(1\times 1)\,dz=-z\Big|_{z=0}^{z=t-1}+z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

所以

$$y(t)=-(t-1)+t-(t-1)=2-t, \qquad 1<t<2$$

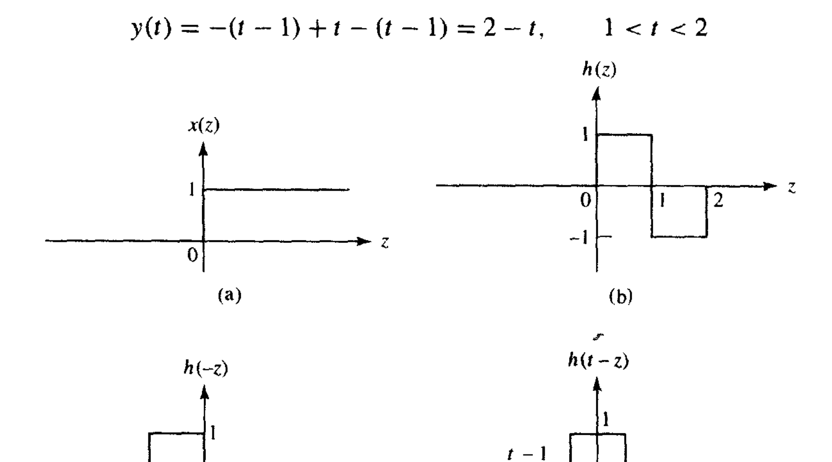


图 15.24 (a) 输入信号；(b) 冲激响应都是z的函数；(c) 把$h(z)$沿垂直轴反转得到$h(-z)$；(d) $h(-z)$向右平移t得到$h(t-z)$

最后，当$t>2$之后，$h(t-z)$几乎全部滑向了右边，使得$z=0$右边的波形全部位于阶跃函数下，交互是完全的，所以

$$y(t)=\int_{t-2}^{t-1}[1\times(-1)]\,dz+\int_{t-1}^t(1\times 1)\,dz=-z\Big|_{z=t-2}^{z=t-1}+z\Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

或者

$$y(t)=-(t-1)+(t-2)+t-(t-1)=0, \qquad t>2$$

将这4段合并起来，可得到$y(t)$的连续曲线，如图15.25所示。

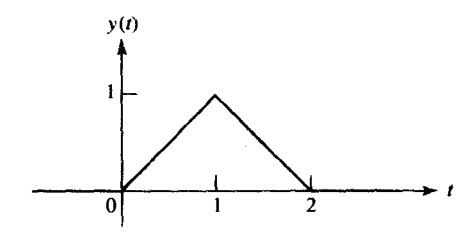


图 15.25 图 15.23 所示的$x(t)$和$h(t)$卷积的结果

练习

15.8　采用式[11]的第二个积分式重复例题 15.8。

15.9　网络的冲激函数为 $h(t) = 5u(t-1)$。如果输入信号是 $x(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$，求 t 等于下列值时的输出 $y(t)$：(a) –0.5；(b) 0.5；(c) 2.5；(d) 3.5。

答案：15.9：0，0，15，25。

卷积和拉普拉斯变换

除了线性电路分析，卷积的应用范围涉及多种相当广泛的学科，包括图像处理、通信和导体传输理论。利用图解直观显现卷积的基本过程通常是很有帮助的，因为式[10]和式[11]并不总是最好的解决方法。另一个有效的方法是利用拉普拉斯变换的性质。

设 $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{F}_2(\mathbf{s})$ 分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换，考虑 $f_1(t) * f_2(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda\right\}$$

其中的一个时间函数一般是加在线性电路输入端的激励函数，而另一个则是电路的单位冲激响应。

因为现在处理的函数在 $t = 0^-$ 之前等于零（拉普拉斯变换的定义要求这样的假定），因此，可以将积分的下限取为 0^-。根据拉普拉斯变换的定义：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, d\lambda\right] dt$$

因为 e^{-st} 与 λ 无关，因此可以移入里面的积分号内，并同时交换积分次序，从而得到以下结果：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\, dt\right] d\lambda$$

注意，$f_1(\lambda)$ 与 t 无关，使用同样的技巧可将其移到里面的积分号的外面：

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\lambda)\, dt\right] d\lambda$$

再对括号中的积分（其中 λ 被视为常数）进行变量替换 $x = t - \lambda$：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-s(x+\lambda)} f_2(x)\, dx\right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda}\left[\int_{-\lambda}^{\infty} e^{-sx} f_2(x)\, dx\right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda}[\mathbf{F}_2(\mathbf{s})]\, d\lambda \\ &= \mathbf{F}_2(\mathbf{s}) \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda\end{aligned}$$

剩下的积分就是 $\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$，所以

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{s}) \qquad [12]$$

这个表达式可以描述为：两个拉普拉斯变换的乘积的反变换等于其各自反变换的卷积。这个结论有时在求反变换时很有用。

例题 15.9 运用卷积方法求 $v(t)$，已知 $\mathbf{V}(\mathbf{s}) = 1/[(\mathbf{s}+\alpha)(\mathbf{s}+\beta)]$。

解： 在 14.5 节利用部分分式展开已经求得了反变换，现在将 $\mathbf{V}(\mathbf{s})$看成是两个变换的乘积：

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\alpha)}$$

和

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{(\mathbf{s}+\beta)}$$

其中

$$v_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

和

$$v_2(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

要求的 $v(t)$立即可以表示为

$$\begin{aligned}
v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_1(\mathbf{s})\mathbf{V}_2(\mathbf{s})\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda)\,d\lambda \\
&= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{0^-}^{t} e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda}\,d\lambda \\
&= e^{-\beta t}\int_{0^-}^{t} e^{(\beta-\alpha)\lambda}\,d\lambda = e^{-\beta t}\frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha}u(t)
\end{aligned}$$

更简洁的公式如下：

$$v(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

这与前面用部分分式展开得到的结果一致。注意，需要在结果中加入单位阶跃函数$u(t)$，因为所有的（单边）拉普拉斯变换只在非负时间段有效。

说明： 用这个方法很容易得到结果吗？除非有人非常青睐卷积积分。如果展开式本身不很复杂，那么部分分式展开的方法通常很简单，但是在 s 域应用卷积更简单，因为它只需要进行乘法运算。

练习

15.10 重复例题 15.8，要求在 s 域进行卷积。

对传输函数的深入讨论

前面已提到多次，线性电路某点上的输出电压 $v_o(t)$等于输入电压 $v_i(t)$和单位冲激响应 $h(t)$的卷积。但是要记住，单位冲激响应是所有初始条件均等于零时单位冲激函数在 $t = 0$时激励下的响应。在这些条件下，$v_o(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = \mathbf{V}_o(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = \mathbf{V}_i(\mathbf{s})[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

即比值 $\mathbf{V}_o(\mathbf{s})/\mathbf{V}_i(\mathbf{s})$等于冲激函数的拉普拉斯变换，用符号 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$表示：

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_i(\mathbf{s})} \qquad [13]$$

从式[13]可以看到，单位冲激响应和传输函数构成了一对拉普拉斯变换对：

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

这是一个很重要的结论，在熟悉了极点、零点和复平面的概念之后，在15.7节还要深入探讨，但现在我们只用这个新的卷积概念进行电路分析。

例题 15.10　确定图15.26(a)所示电路的冲激响应，并用它计算受迫响应 $v_o(t)$，设输入电压为 $v_{in}(t) = 6e^{-t}u(t)$ V。

解： 首先将冲激电压脉冲 $\delta(t)$ V 接到如图15.26(b)所示的电路中。虽然可以利用时域中的 $h(t)$，也可以利用 s 频域中的 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$，但是这里还是选择后者，因此接下去的讨论都基于图15.26(b)所示电路在 s 域的表示形式，如图15.27所示。

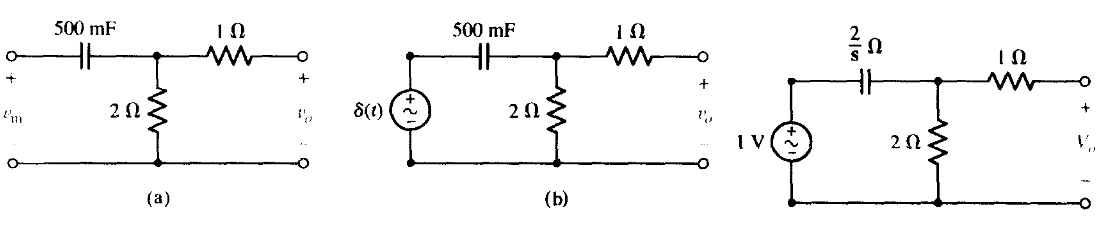


图 15.26　(a) $t = 0$ 时电路获得指数输入信号；(b) 用于确定 $h(t)$ 的电路　　图 15.27　用于求解 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 的电路

冲激响应 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 由下式求得：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_o}{1}$$

立即可以求解 $\mathbf{V}_o$ ——采用简单分压定理就可以很容易地实现。

$$\mathbf{V}_o\Big|_{v_{in}=\delta(t)} = \frac{2}{\frac{2}{\mathbf{s}}+2} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}+1} = \mathbf{H}(\mathbf{s})$$

现在利用卷积求 $v_o(t)$，此时 $v_{in} = 6e^{-t}u(t)$，

$$v_{in} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{V}_{in}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{s})\}$$

因为 $\mathbf{V}_{in}(\mathbf{s}) = 6/(\mathbf{s}+1)$，因此，

$$\mathbf{V}_o = \frac{6\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+1)^2} = \frac{6}{\mathbf{s}+1} - \frac{6}{(\mathbf{s}+1)^2}$$

进行拉普拉斯反变换，得到

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t)\ \mathrm{V}$$

练习

15.11　电路如图15.26(a)所示，利用卷积求 $v_o(t)$，设 $v_{in} = tu(t)$ V。

答案： $v_o(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ V。

15.6　复频率平面

现在来讨论一种更为一般的图形表示方法，它表示函数值随变量s变化的曲线，也就是说，将响应作为 σ 和 ω 的函数同时绘制出来。把作为复频率s的受迫响应函数用图形表示，此举在电路分

析、电路设计或者电路综合中都很有用且很具启发意义。有了复频率平面（复平面）或s平面的概念之后，我们将会发现，根据s平面中的临界频率对电路的行为特性进行近似是一件很容易的事情。

相反的过程也同样很有意义：如果给定一个期望的响应曲线（比如一个滤波器的频率响应曲线），则可以根据其s平面中零点和极点的位置来进行滤波器综合。在分析反馈放大器和自动控制系统不希望出现的振荡时，s平面也是一个基本的工具。

以 σ 为变量的响应函数

在讨论以s为变量的响应函数之前，首先来考虑以 σ 或 ω 为变量的响应函数。比如，假设网络的输入阻抗或者策动点阻抗由一个3 Ω的电阻和一个4 H的电感串联而成。作为s的函数，可得

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 3 + 4\mathbf{s}\ \Omega$$

如果想得到以 σ 为变量的该阻抗的函数曲线，可以令 $\mathbf{s} = \sigma + j0$：

$$\mathbf{Z}(\sigma) = 3 + 4\sigma\ \Omega$$

可以看到，它在 $\sigma = -\frac{3}{4}$ 处有一个零点，无穷远处有一个极点。在 σ 轴中将这两个临界频率标出，然后确定在某个非临界频率处 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的值［比如取 $\mathbf{Z}(0) = 3$］，很容易绘制出 $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ 随 σ 变化的曲线，如图15.28所示，该图提供了输入为指数激励函数 $e^{\sigma t}$ 时系统阻抗的信息。特别是在直流($\sigma = \omega = 0$)情况下，可以看出其阻抗等于3 Ω，这与预计的结果一致。

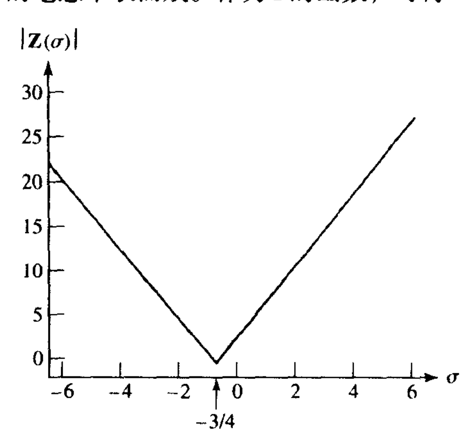


图15.28　函数 $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ 随 σ 变化的曲线图

以 ω 为变量的响应函数

为了画出响应函数随角频率 ω 变化的曲线，令 $\mathbf{s} = 0 + j\omega$：

$$\mathbf{Z}(j\omega) = 3 + j4\omega$$

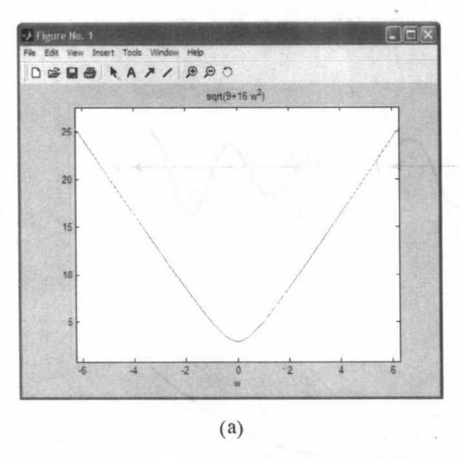
然后可以得到 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 以 ω 为变量的幅度函数和相位函数：

$$|\mathbf{Z}(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \qquad [14]$$

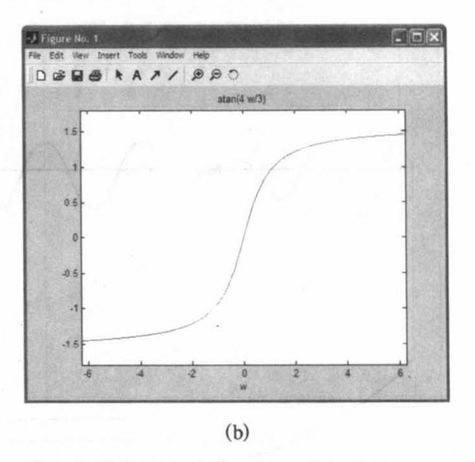
$$\text{ang}\ \mathbf{Z}(j\omega) = \arctan\frac{4\omega}{3} \qquad [15]$$

幅度函数表明，它在无穷远处有一个唯一的极点，在 $\omega = 0$ 处有一个最小值，可以画出 $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ 随 ω 变化的曲线。当频率增大时，阻抗的幅度也随之增大，这与预计的电感特性完全一致。相位函数是反正切函数，当 $\omega = 0$ 时，它等于0；当 $\omega = \pm 90°$ 时，它等于 $\pm\infty$，很容易画出ang $\mathbf{Z}(j\omega)$ 随 ω 变化的曲线。图15.29给出的是式[14]和式[15]所表示的曲线。

描绘 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 随 ω 变化的曲线需要两个二维的曲线——幅度函数曲线和相位函数曲线。假设激励为指数函数，如果允许 σ 既可以取正值，也可以取负值，那么可以用一个二维图形将阻抗函数的所有信息表示出来。然而，选择 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的幅度有助于与 $\mathbf{Z}(j\omega)$ 的幅度进行更加仔细的比较，这里忽略了 $\mathbf{Z}(\sigma)$ 的相位角（只有0°，±180°这3个值）。值得注意的是，在指数激励的情况下只有一个独立变量 σ，而在正弦情况下只有一个独立变量 ω。现在分析还有什么方法可以绘制响应函数关于s变化的曲线。



(a)



(b)

图 15.29　(a) $|\mathbf{Z}(j\omega)|$ 随频率变化的曲线图。该曲线图是执行 MATLAB 的命令行语句 EDU>>ezplot('sqrt(9+16*w^2)')得到的；(b) $\mathbf{Z}(j\omega)$的相角随频率变化的曲线图

在复平面上绘图

完整描述复频率$\mathbf{s}$需要两个参数——σ和ω。因为响应也是复函数，所以必须考虑如何绘制幅度和相位随$\mathbf{s}$变化的曲线，它们中的任何一个——比如幅度——都是两个参数（σ和ω）的函数，在二维情况下，只能用曲线族来描述它，比如一族幅度随ω变化的曲线以σ为参数。

一种较好的表示复数幅度响应曲线的方法是使用三维模型。虽然在一张二维的纸上绘制这样的模型很困难，但想象这个模型却很容易，因为无须给大脑提供任何工具就可以很快完成构图、修改和擦除，因此许多“绘制”的工作可以在大脑中完成。考虑放置在水平面 (比如地面) 上相互垂直的两个坐标轴——σ轴和$j\omega$轴，现在地面表示复平面，或者称为$\mathbf{s}$平面，如图 15.30所示。复平面上的每个点恰与$\mathbf{s}$中的某个值相对应，而$\mathbf{s}$中的每个值也对应于复平面上唯一一个点。

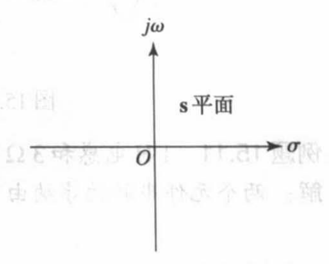


图 15.30　复频率平面或 s 平面

我们已经熟悉了复频域$\mathbf{s}$中的值与时域函数类型之间的对应关系，现在可以将$\mathbf{s}$平面中的某个区域与激励函数或者受迫响应函数的形式对应起来。比如，原点与直流量相对应；σ轴上的点与指数函数相对应：当$\sigma < 0$时，对应衰减的指数函数；当$\sigma > 0$时，则对应增长的指数函数；正负$j\omega$轴上的点与正弦函数相对应。$\mathbf{s}$平面的右半平面（通常简写为 RHP）上的点，实部为正数，除了σ轴上的点以外，其他点均与指数增长的正弦函数相对应；而$\mathbf{s}$平面的左半平面（LHP），除了负σ轴外，其他点均与指数衰减的正弦函数相对应。图 15.31 给出了时域函数和$\mathbf{s}$平面不同区域的对应关系。

现在回来继续寻找绘制响应函数随复频率$\mathbf{s}$变化的曲线的方法。响应的幅度可以用一个黏土构造的模型来表示，模型表面每个点距离地面的高度对应于响应在点$\mathbf{s}$的幅度值。换句话说，需要增加第 3 个轴，它与σ轴以及$j\omega$轴相垂直且经过原点，用$|\mathbf{Z}|$，$|\mathbf{Y}|$，$|\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1|$或者其他合适的符号表示。对应每一个$\mathbf{s}$，响应的幅度都是确定的，把这些幅度点绘制在一起就组成了位于$\mathbf{s}$平面上方（或者与$\mathbf{s}$平面相接触）的一个曲面。

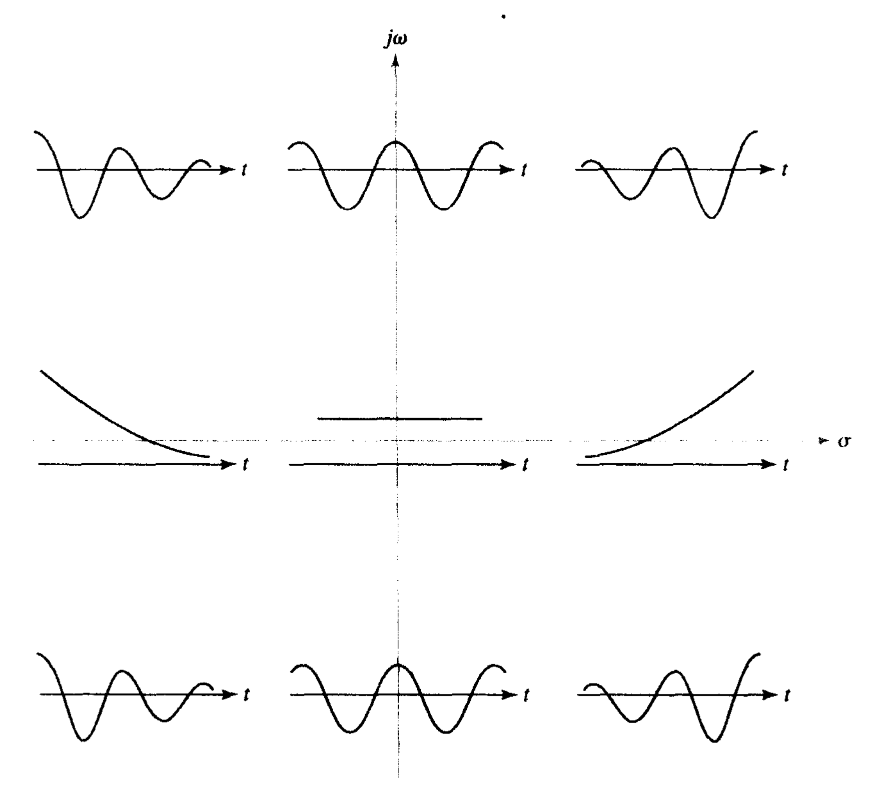


图 15.31　与复平面区域相对应的自由响应在时域的波形

例题 15.11　1 H 电感和 3 Ω 串联，画出串联导纳随 $j\omega$ 和 σ 变化的草图。

解：两个元件串联的导纳由下式求得：

$$\mathbf{Y(s)}=\frac{1}{\mathbf{s}+3}$$

将 $\mathbf{s}=\sigma+j\omega$ 代入，求得幅度函数为

$$|\mathbf{Y(s)}|=\frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2+\omega^2}}$$

当 $\mathbf{s}=-3+j0$ 时，幅度响应无穷大，当 s 趋于无限时，Y(s)的幅度等于零，所以模型在点（$-3+j0$）上的高度为无穷大，而在远离原点的无穷远处高度等于零。图 15.32(a)所示是该模型的截图。

一旦模型构造完成，就可以简单地看出 |Y| 与 ω（$\sigma=0$）的变化关系，这可以利用包含 $j\omega$ 轴的垂直平面切割模型得到，图 15.32(a)所示的模型恰好是沿着这个平面切割的，而 |Y| 随 ω 变化的曲线见图 15.32(b)。采用同样的方法，利用包含 σ 轴的垂直平面切割模型可得到如图 15.32(c)所示的 |Y| 随 σ（$\omega=0$）变化的曲线。

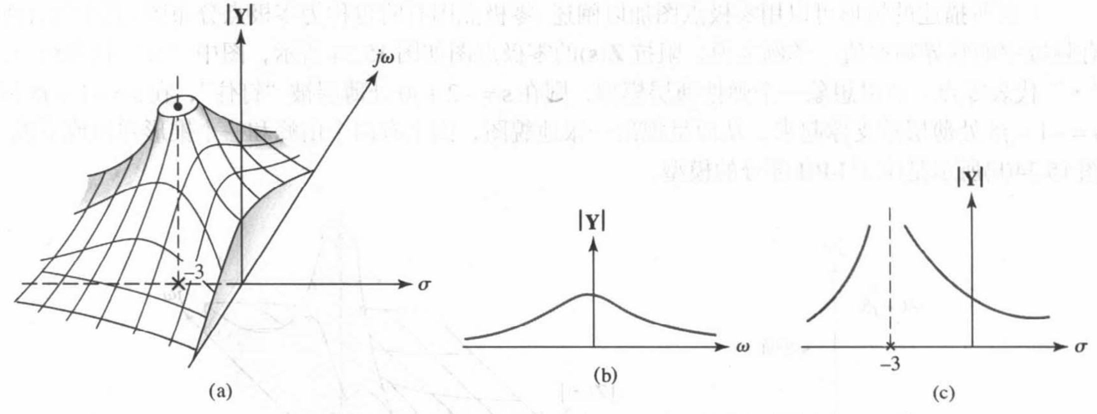


图 15.32 (a) 黏土模型的切面图，它的顶面表示 1 H 电感和 3 Ω 电阻串联组合的导纳 $|\mathbf{Y(s)}|$; (b) 作为 ω 函数的 $|\mathbf{Y(s)}|$; (c) 作为 σ 函数的 $|\mathbf{Y(s)}|$

练习

15.12 画出阻抗 $\mathbf{Z(s)} = 2 + 5\,\mathbf{s}$ 的幅度随 σ 和 $j\omega$ 变化的草图。

答案：见图 15.33。

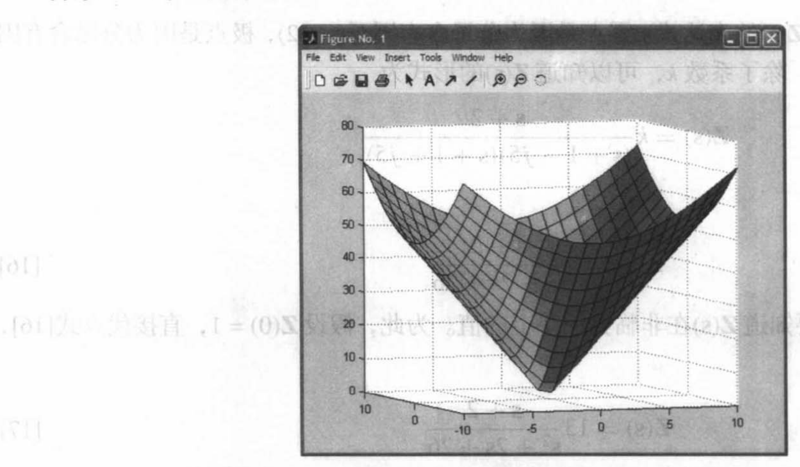


图 15.33 练习 15.12 的答案。由以下代码实现：EDU>> sigma = linspace(–10, 10,21); EDU>> omega = linspace(–10,10,21); EDU>> [X,Y] = meshgrid (sigma,omega); EDU>> Z = abs(2+5*X+j*5*Y); EDU>> colormap(hsv) ; EDU>> s = [–5 3 8]; EDU>> surfl(X,Y,Z,s); EDU>> view(–20,5)

零极点分布图

这个方法对很简单的函数比较有用，但是通常情况下需要采用更实用的方法。再次把s平面看成地面，设想有一张弹性的薄层覆盖在上面。现在把注意力集中在响应的零点和极点上。每一个零点的响应是零，意味着薄层的高度必定等于零，所以把薄层和地面钉在一起。而在与极点相对应的每一点s，用一根很细的垂直棒顶起薄层。对于无穷远处的零点和极点，则分别用半径很大的圆形夹环或者半径很大且很高的圆形篱笆来处理。如果我们用的薄层无限大且没有重量、弹性极佳，既看不见钉子，而且还非常小，支撑棒无限长且没有直径，那么这张弹性薄层的高度则正好与响应的幅度成正比。

上面所描述的情形可以用零极点图加以阐述。零极点图有时也称为零极点分布图，其中包含所有频域中的临界频率值。举例来说，阻抗 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的零极点图如图 15.34 所示，图中“×”代表极点，“·”代表零点。如果想象一个弹性薄层模型，则在 $\mathbf{s} = -2 + j0$ 处薄层被“钉住”，在 $\mathbf{s} = -1 + j5$ 和 $\mathbf{s} = -1 - j5$ 处薄层被支撑起来，从而呈现出一张地貌图，图上有两个山峰和一个锥形弹坑或下陷。图 15.34(b)所示是位于 LPH 部分的模型。

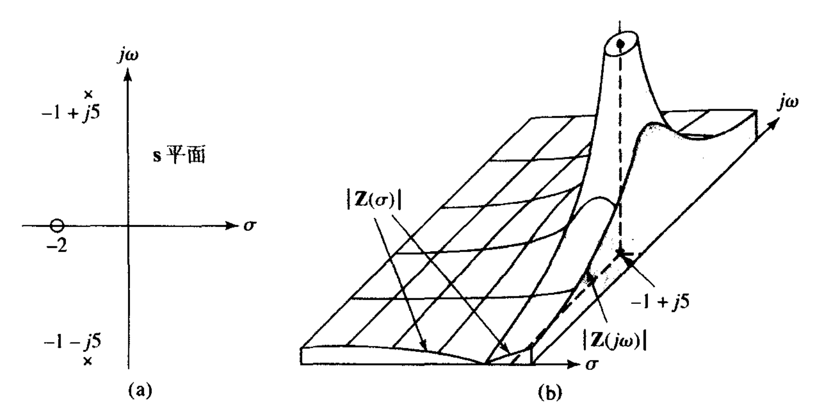


图 15.34 (a) 阻抗 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的零极点分布图；(b) $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$幅度的部分弹性薄膜模型

现在由零极点图建立 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的表达式。零点是因为分子含有因子$(\mathbf{s} + 2)$，极点是因为分母含有因子$(\mathbf{s} + 1 - j5)$和$(\mathbf{s} + 1 + j5)$。除了系数 k，可以知道 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$的形式为

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{(\mathbf{s}+1-j5)(\mathbf{s}+1+j5)}$$

或者

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = k\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [16]$$

为了求得系数 k，需要知道 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$在非临界频率上的值。为此，假设 $\mathbf{Z}(0) = 1$，直接代入式[16]，求得 $k = 13$，所以

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = 13\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+26} \qquad [17]$$

从式[17]可以很精确地求得 $|\mathbf{Z}(\sigma)|$ 随 σ、$|\mathbf{Z}(j\omega)|$ 随 ω 的变化曲线，不过，函数的一般形式从零极点分布图和弹性薄层模型还是能够明显看出来的。

练习

15.13 0.25 mH 的电感和 5 Ω 电阻的并联组合与 40 μF 的电容和 5 Ω 电阻的并联组合串联在一起。(a) 求等效串联组合的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$；(b) 确定 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的所有零点；(c) 确定 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的所有极点；(d) 画出零极点分布图。

答案：$5(\mathbf{s}^2 + 10\,000\mathbf{s} + 10^8)/(\mathbf{s}^2 + 25\,000\mathbf{s} + 10^8)$ Ω；$-5 \pm j8.66$ krad/s；−5，−20 krad/s。

幅度和相角与频率的关系

至此，利用 s 平面和弹性薄层模型能够获得幅度随 s 域函数频率变化的定性信息。此外我们还可能获得幅度和相角的定量变化信息，这种方法提供了一种有效的新工具。

考虑复频率的极坐标形式，即用 s 平面上从原点画出的箭头表示复频率，箭头的长度表示频率的幅度，箭头与正 σ 轴的夹角表示复频率。图 15.35(a)所示是频率 $\mathbf{s}_1 = -3 + j4 = 5\,\underline{/126.9^\circ}$。

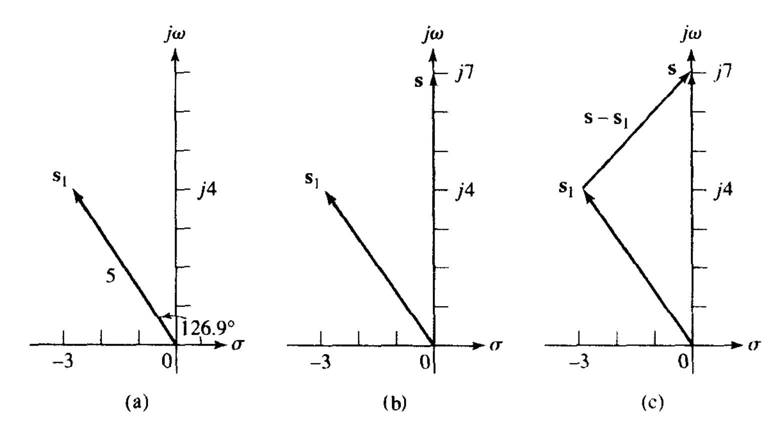


图 15.35　(a) 复频率 $\mathbf{s}_1 = -3 + j4$ 用一个从原点指向 $\mathbf{s}_1$ 的箭头表示；(b) 频率 $\mathbf{s} = j7$ 同样用垂直的箭头表示；(c) $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$ 的差由从 $\mathbf{s}_1$ 指向 $\mathbf{s}$ 的矢量表示

在复平面上可以用箭头或者矢量表示两个不同 s 值的差。选择一个 s 值，对应正弦波 $\mathbf{s} = j7$，同样也可用矢量表示，如图 15.35(b)所示。矢量 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$ 的差也是一个矢量，它从最后一个矢量的端点指向第一个矢量的端点，即矢量 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1$，如图 15.35(c)所示。注意，由图中可得 $\mathbf{s}_1 + (\mathbf{s} - \mathbf{s}_1) = \mathbf{s}$，按照数值计算，可得 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24\,\underline{/45^\circ}$，该结果与图解得到的结果一致。

现在来看利用$(\mathbf{s} - \mathbf{s}_1)$的图解如何能够确定频率响应。考虑导纳

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + 2$$

该表达式在 $\mathbf{s}_2 = -2 + j0$ 有一个零点，因子$(\mathbf{s} + 2)$可以写成 $\mathbf{s} - \mathbf{s}_2$，它是一个矢量，从零点 $\mathbf{s}_2$ 的位置指向所要求的频率 s。如果要求的响应是正弦的，则 s 必须位于 $j\omega$ 轴上，如图 15.36(a)所示。从图中很容易看出 $\mathbf{s} + 2$ 的幅度随 ω 从零变化到无穷的关系，若 $\mathbf{s} = 0$，矢量的幅度等于 2，角度等于 0°，即 $\mathbf{Y}(0) = 2$。若 ω 增大，幅度也增大，开始比较慢，然后几乎随 ω 呈线性增大；相角开始时几乎随 ω 以线性增大，然后在 ω 成为无穷大时渐渐趋于 90°。$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的幅度和相角随 ω 变化的关系曲线如图 15.36(b)所示。

现在构造一个更实际的例子，其频域函数是两个因子的商：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s} + 2}{\mathbf{s} + 3}$$

选择与正弦激励相对应的 s 值，画出矢量 $\mathbf{s} + 2$ 和 $\mathbf{s} + 3$，其中第一个矢量从零点指向 $j\omega$ 轴上选定的一点，第二个从极点指向所选的点，两个矢量如图 15.37(a)所示。两个矢量商的幅度等于两个矢量幅度的商，而相角则等于分子相角和分母相角的差。现在讨论 $|\mathbf{V}(\mathbf{s})|$ 随 ω 的变化关系，令 s 从原点沿 $j\omega$ 轴向上移动，注意两个距离之间的比值，这两个距离是从零点到 $\mathbf{s} = j\omega$ 的距离和从极点到 $j\omega$ 轴相同点的距离。在 $\omega = 0$ 时比值等于 $\frac{2}{3}$，当 ω 趋于无穷大时，比值趋于 1，如图 15.37(b)所示。

当 $\omega = 0$ 时，两个相角的差正好等于 0°，当 ω 开始增加时，相角也随着增加，这是因为矢量 $\mathbf{s} + 2$ 的相角要比 $\mathbf{s} + 3$ 的相角大，ω 继续增加时，相角开始减少，直至频率趋于无穷大时，相角趋于 0°，因为这时两个矢量的相角均已趋于 90°。曲线如图 15.37(c)所示。虽然在图上没有定量标注，但是得到它们比较容易。比如，在 $\mathbf{s} = j4$ 时的复响应必须由下面的比值得到：

$$\mathbf{V}(j4) = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{9+16}} \frac{\angle \arctan\left(\frac{4}{2}\right)}{\angle \arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{20}{25}} \angle \left(\arctan 2 - \arctan\left(\tfrac{4}{3}\right)\right)$$
$$= 0.894\angle 10.3^\circ$$

设计一个电路使之满足响应要求，这时某些矢量的特性对设计提供了重要帮助。这里的矢量是指从临界频率出发到$j\omega$轴上某个公共点的矢量。比如，希望增加图15.37(c)所示相位响应曲线的峰值，必须增加两个矢量的相角之差，这意味着可以在图15.37(a)所示的电路中令零点往原点靠近，或者令极点远离原点，或者同时移动。

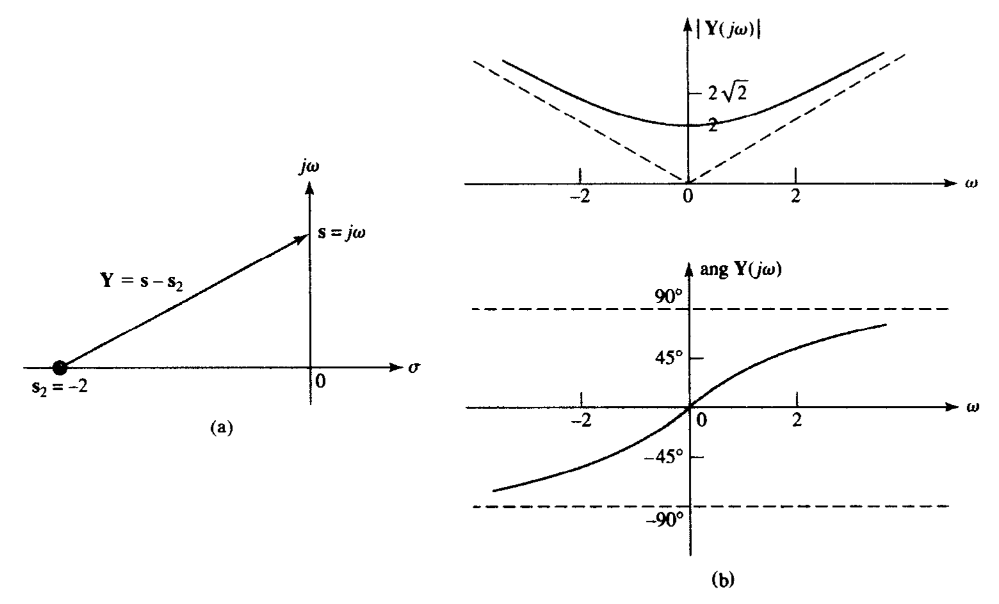


图15.36 (a) 表示导纳$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \mathbf{s} + 2$的矢量，其中$\mathbf{s} = j\omega$；(b) 当$\mathbf{s}$从原点沿$j\omega$轴向上或向下移动时，根据矢量的性能画出的$|\mathbf{Y}(j\omega)|$和ang $\mathbf{Y}(j\omega)$的曲线

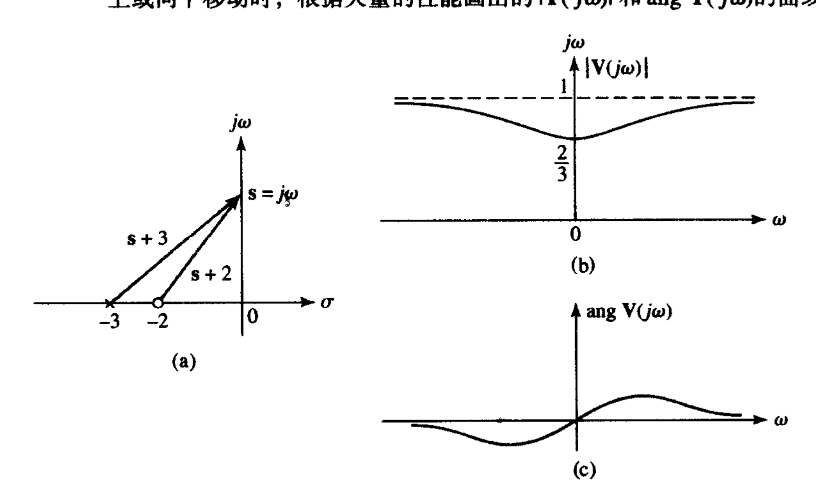


图15.37 (a) 从电压响应$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = (\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}+3)$的临界频率出发的两个矢量；(b, c) $\mathbf{V}(j\omega)$是(a) 中所示的两个矢量的商对应的幅度和相位曲线

我们所讨论的利用图解法来确定频域函数的幅度和相位随频率变化的关系的方法在第16章将显得很有必要，因为第16章将主要讨论高选择性滤波器、谐振电路的频率特性。这些概念在快速、清晰地获得电子网络或者其他工程系统的性能方面都是最基本的，其过程可以简单总结如下：

1. 画出频域函数的零极点分布图，选择一个与响应要求相符的测试点，用于计算函数值；
2. 画出每一个从零点指向测试点和从极点指向测试点的矢量；
3. 确定每个矢量的长度和每个零点矢量以及极点矢量的相角；
4. 用所有零点矢量的长度的乘积项除以所有极点矢量长度的乘积项，商就是测试频率点上频域函数的幅度（不考虑乘积因子 k，因为 $\mathbf{F}(\mathbf{s})$和 $k\mathbf{F}(\mathbf{s})$具有相同的零极点分布图）。
5. 用所有零点的相角和减去所有极点的相角和，结果就是频域函数的相角，在测试点频率上可得到具体数值。相角与实际乘积因子 k 无关。

练习

15.14　图 15.38 所示是3个零极点分布图，每一个均表示电压增益函数 $\mathbf{G}$。求每一个增益函数的表达式，用 $\mathbf{s}$ 多项式的比表示。

15.15　某导纳的零极点图中有一个极点位于 $\mathbf{s} = -10 + j0\ \mathrm{s}^{-1}$，一个零点位于 $\mathbf{s} = z_1 + j0$，其中 $z_1 < 0$，设 $\mathbf{Y}(0) = 0.1\ \mathrm{S}$，求 z_1 在下列两种情况下的值：(a) $\mathbf{Y}(j5)$的相角等于 20°；(b) $|\mathbf{Y}(j5)| = 0.2\ \mathrm{S}$。

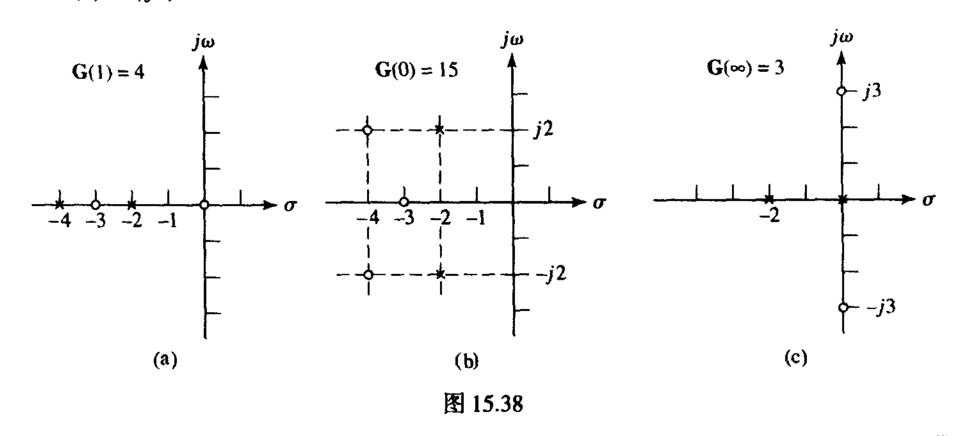


图 15.38

答案：15.14 $(15\mathbf{s}^2 + 45\mathbf{s})/(\mathbf{s}^2 + 6\mathbf{s} + 8)$；$(2\mathbf{s}^3 + 22\mathbf{s}^2 + 88\mathbf{s} + 120)/(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 8)$；$(3\mathbf{s}^2 + 27)/(\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{s})$。
15.15：−4.73 Np/s；−2.5 Np/s。

15.7 自由响应和 s 平面

本章开始时曾经提到通过拉普拉斯变换可以对比较广泛的一类时变电路在频域进行分析，摈弃微积分方程，只对代数方程进行分析。这种方法非常有效，但是直观性不强。相反，受迫响应的零极点分布图却包含相当多的信息。本节讨论的就是如何从这样的分布图中得到电路的完全响应——自由响应加受迫响应——只要初始条件已知。此种方法的优势在于通过可以看到的零极点分布图，将临界频率与需要的响应更直观地联系起来。

现在通过最简单的例子来介绍该方法，一个串联 RL 电路如图 15.39 所示，开关在 $t = 0$ 闭合，之后普通的电压源 $v_s(t)$在电路中产生电流 $i(t)$。$t > 0$ 后电流 $i(t)$的完全响应由自由响应和受迫响应组成：

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

受迫响应可以通过频域分析得到，假设 $v_s(t)$的函数形式能够变换到频域，比如 $v_s(t) = 1/(1 + t^2)$，因此最好从基本的电路微分方程开始分析。对图 15.39 所示的电路：

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{V}_s}{R + \mathbf{s}L}$$

或者

$$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \frac{1}{L}\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{s} + R/L} \qquad [18]$$

接下来考虑自由响应。根据先前的经验，响应呈现按时间常数 L/R 衰减的指数形式，然而假设这是第一次发现。依据自由（无源）响应的定义，它与激励函数是无关的，激励函数只对自由响应的幅度有作用。为找到适当的形式，令所有独立源等于零，这里 $v_s(t)$被短接，然后设法得到自由响应，它被看成受迫响应的极限情况。回到频域表达式（即[18]），令 $\mathbf{V}_s = 0$，表面看$\mathbf{I}(\mathbf{s})$必定等于零，但是如果频率正好等于$\mathbf{I}(\mathbf{s})$的极点频率，这就不一定正确了，因为分子和分母都等于零，但是$\mathbf{I}(\mathbf{s})$未必等于零。

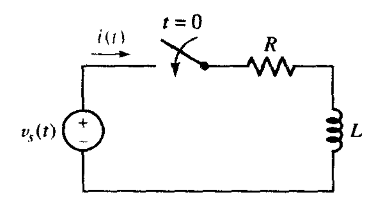


图 15.39　说明如何确定完全响应的例子，需要用到面向源的阻抗的临界频率等相关知识

现在从一个略微不同的角度审视这个新问题，我们把注意力集中在受迫响应函数和激励函数的比值上。我们把比值记为$\mathbf{H}(\mathbf{s})$并定义为电路的传输函数：

$$\frac{\mathbf{I}_f(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{1}{L(\mathbf{s} + R/L)}$$

在本例中，传输函数实为 $\mathbf{V}_s$ 两端看进去的输入导纳。令 $\mathbf{V}_s = 0$，可以求得自由（无源）响应，但是一旦 $\mathbf{V}_s = 0$，$\mathbf{I}_f(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_s\mathbf{H}(\mathbf{s})$，要得到非零的电流只有一种情况，即工作在$\mathbf{H}(\mathbf{s})$的极点上，可见传输函数的极点具有特别的意义。

说明： 工作在“复频率”究竟具有什么含义呢？在实验室中有可能实现这样的复频率吗？要回答该问题，必须记住复频率是如何被引入的：它是频率 ω 的正弦函数与指数函数 $e^{\sigma t}$ 的乘积的一种表示方法。这种信号用实际的（非想象的）实验室设备很容易产生，因此，只需要设定 σ 和 ω 的值，就可使之工作在频率 $\mathbf{s} = \sigma + j\omega$ 上。

在这个具体例子中，传输函数的极点出现在 $\mathbf{s} = -R/L + j0$ 处，如图 15.40 所示。如果选择电路工作在特定的复频率上，在 $\mathbf{s}$ 域得到的有限电流必定等于常数值（与频率无关），从而即可得到自由响应：

$$\mathbf{I}\left(\mathbf{s} = -\frac{R}{L} + j0\right) = A$$

其中，A 是未知常数。接下来要把自由响应变换到时域。下意识的反应肯定是应用拉普拉斯反变换方法，但这是不可行的，因为 $\mathbf{s}$ 已经被定义了具体的数值。正确的方法是把自由响应看成是一般函数 e^{st} 的实部，即

$$i_n(t) = \mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{\mathbf{s}t}\} = \mathrm{Re}\{A\mathrm{e}^{-Rt/L}\}$$

对于本例：

$$i_n(t) = A\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

所以，完全响应为

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-Rt/L} + i_f(t)$$

常数A需要由电路的初始条件来确定。受迫响应$i_f(t)$由$\mathbf{I}_f(\mathbf{s})$的拉普拉斯反变换得到。

图 15.40　传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$的零极点分布图表明只有一个位于$\mathbf{s} = -R/L$处的极点

更一般的情况

图15.41(a)和图15.41(b)所示的网络都只有一个激励源，其中不含受控源。要求解的响应电流$\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$或者电压$\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$表示成包含所有临界频率的传输函数，具体而言，选择图15.41(a)的电压响应$\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$：

$$\frac{\mathbf{V}_2(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s} = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = k\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_3)\cdots}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_4)\cdots} \tag{19}$$

$\mathbf{H}(\mathbf{s})$的极点为$\mathbf{s} = \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_4, \cdots$，可见在这些频率上，一定存在可能的自由响应函数形式。考虑一个零电压源（其实就是短路）被加到网络的输入端，当输入短路后，出现的自由响应一定具有下列函数形式：

$$v_{2n}(t) = \mathbf{A}_2\mathrm{e}^{\mathbf{s}_2 t} + \mathbf{A}_4\mathrm{e}^{\mathbf{s}_4 t} + \cdots$$

其中，每一个$\mathbf{A}$由网络的初始条件（包括任何加在输入端的初始电压值）计算得到。

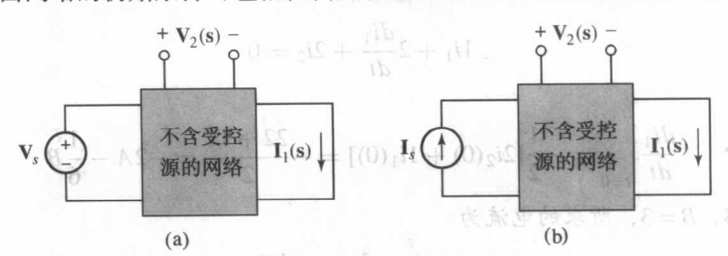


图 15.41　由(a) 电压源$\mathbf{V}_s$和(b) 电流源$\mathbf{I}_s$产生的响应$\mathbf{I}_1(\mathbf{s})$和$\mathbf{V}_2(\mathbf{s})$的极点。极点确定了自由响应$i_{1n}(t)$和$v_{2n}(t)$的形式，它们是在$\mathbf{V}_s$被短路、$\mathbf{I}_s$被开路并考虑初始储能的情况下得到的

为求得图15.41(a)所示网络中的电流$i_{1n}(t)$，需要确定传输函数$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{V}_s$的所有极点。图15.41(b)所示网络的传输函数是$\mathbf{I}_1(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$和$\mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{I}_s$，它们的极点可以分别用来确定自由响应$i_{1n}(t)$和$v_{2n}(t)$。

如果要求解的是不含受控源的网络的自由响应，则激励源$\mathbf{V}_s$和$\mathbf{I}_s$可以接在网络中任何方便的节点上，条件是激励源全部等于零时的网络就是原网络。求出的传输函数以及它的极点确定了自由响应的频率。注意，在任何电源可能出现的地方得到的响应频率必须相同。如果网络原本已经含有电源，则该电源必须置零，而将另一个电源接在更合适的地方。

一种特殊情况

在采用例题来说明这种方法之前，我们再介绍一种特殊情况。它出现在图15.41(a)或者图15.41(b)所示的网络中，网络含有两个甚至更多相互隔离的独立子网络的情况。比如，有3个网络并联组合在一起，这3个网络分别是：R_1和C串联的网络，R_2和L串联的网络，以及一个短接的电路。显然，

电压源与R_1和C串联无法为R_2和L提供任何电流，因此传输函数将等于零。为了求得电感电压的自由响应形式，必须在R_2L网络中接入电压源，这种情况通常在电源接入网络之前观察得到。如果观察不到，将得到等于零的传输函数。当$\mathbf{H(s)}=0$时，没有任何频率信息能够确定自由响应，这时必须为电源选择一个更合适的位置。

例题 15.12 无源电路如图15.42所示，确定$t>0$后的电流i_1和i_2的表达式，初始条件是$i_1(0)=i_2(0)=11$ A。

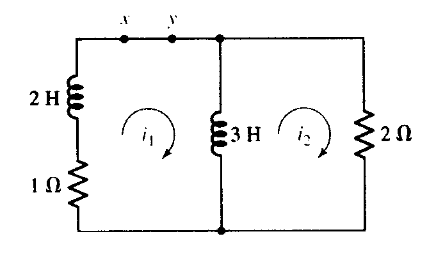


图 15.42 确定自由响应i_1和i_2的电路

解： 首先在点x和y之间接入电压源$\mathbf{V}_s$，求传输函数$\mathbf{H(s)}=\mathbf{I}_1\mathbf{(s)}/\mathbf{V}_s$，它其实也是从电压源两端看进去的输入导纳。

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{V}_s}{2\mathbf{s}+1+6\mathbf{s}/(3\mathbf{s}+2)}=\frac{(3\mathbf{s}+2)\mathbf{V}_s}{6\mathbf{s}^2+13\mathbf{s}+2}$$

或者

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{I}_1(\mathbf{s})}{\mathbf{V}_s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\mathbf{s}+\frac{2}{3}\right)}{(\mathbf{s}+2)\left(\mathbf{s}+\frac{1}{6}\right)}$$

根据刚才的经验，一眼可以看出i_1一定具有如下的形式：

$$i_1(t)=A\mathrm{e}^{-2t}+B\mathrm{e}^{-t/6}$$

利用给定的初始条件确定系数A和B的值。由于$i_1(0)=11$ A，所以

$$11=A+B$$

另一个附加等式是沿着电路周边写出KVL方程：

$$1i_1+2\frac{di_1}{dt}+2i_2=0$$

推导得出

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}[2i_2(0)+1i_1(0)]=-\frac{22+11}{2}=-2A-\frac{1}{6}B$$

因此，$A=8$，$B=3$，所求的电流为

$$i_1(t)=8\mathrm{e}^{-2t}+3\mathrm{e}^{-t/6}\text{ A}$$

构成i_2的自由响应频率与i_1完全一致，用同样的方法计算系数，得到

$$i_2(t)=12\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t/6}\text{ A}$$

练习

15.16 设电流源$i_1(t)=u(t)$接在图15.43所示的电路中，电流流入节点a，求$\mathbf{H(s)}=\mathbf{V}_{cd}/\mathbf{I}_1$，并确定$v_{cd}(t)$的自由响应频率。

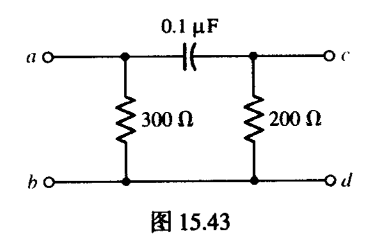


图 15.43

答案： 120 s/(s + 20 000) Ω，−20 000 s⁻¹。

只有在所求响应的初始值及其导数都很明显时，求解自由响应的幅度系数才比较简单，一般情况都比较复杂。但是，作为一种能力，即不费力地快速看出自由响应的形式还是不能丢弃的。

实际应用——振荡器电路的设计

本书许多地方都对各种电路在正弦激励下的响应进行过讨论。但是，产生正弦波形本身也是一件有趣的事情。比如，利用磁铁和旋转线圈可以直接产生幅度很大的正弦电压和电流，但是用这种方法产生正弦小信号却很不容易。典型的低电流应用一般都采用称为振荡器的电路，它由合适的放大器电路结合正反馈构成。许多消费类电子产品中都集成了振荡器，比如图 15.44 所示的全球定位卫星（GPS）接收机。



图 15.44　许多消费类电子产品（如 GPS 接收机）都依赖于振荡器电路提供的参考频率

文氏电桥振荡器是一种很直观也很有用的振荡器电路，如图 15.45 所示。

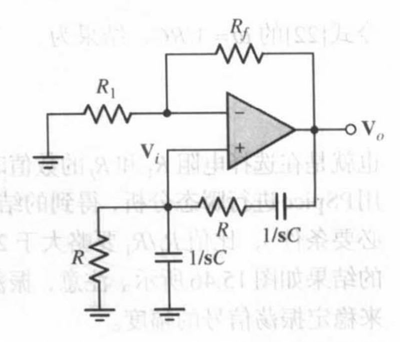


图 15.45　文氏电桥振荡器电路

电路中的运算放大器是同相组态，电阻 R_1 接在反相端和地之间，电阻 R_f 接在输出端和反相端之间，电阻 R_f 提供一条负反馈回路，因为它连接在放大器的输出端和反相端之间，输出的任何增量 $\Delta\mathbf{V}_o$ 将导致输入的减少，从而引起输出的下降，这个过程增加了输出电压 $\mathbf{V}_o$ 的稳定性。运放的增益定义为 $\mathbf{V}_o$ 与 $\mathbf{V}_i$ 的比值，由电阻 R_1 和 R_f 的相对值确定。

正反馈环包含两个独立的电阻－电容组合，定义为 $\mathbf{Z}_s = R + 1/\mathbf{s}C$ 和 $\mathbf{Z}_p = R\|(1/\mathbf{s}C)$。选择 R 和 C 的值以设计振荡器的振荡频率（运算放大器的内部电容将限制振荡器所能获得的最大频率）。为了得到振荡频率和 R、C 之间的关系，我们需求得到放大器电压增益 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ 的表达式。

回忆第 6 章有关理想运算放大器的两个特性，仔细观察图 15.45 所示的电路，发现 $\mathbf{Z}_p$ 和 $\mathbf{Z}_s$ 组成分压电路，即

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_o \frac{\mathbf{Z}_p}{\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_s} \qquad [20]$$

将 $\mathbf{Z}_p = R\|(1/\mathbf{s}C) = R/(1 + \mathbf{s}RC)$，$\mathbf{Z}_s = R + 1/\mathbf{s}C = (1 + \mathbf{s}RC)/\mathbf{s}C$ 代入并化简表达式，可得

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{\dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}}{\dfrac{1+\mathbf{s}RC}{\mathbf{s}C} + \dfrac{R}{1+\mathbf{s}RC}}$$

$$= \frac{\mathbf{s}RC}{1 + 3\mathbf{s}RC + \mathbf{s}^2R^2C^2} \qquad [21]$$

因为只对放大器的正弦稳态感兴趣，所以令 $\mathbf{s} = j\omega$，可得

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2R^2C^2}$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2R^2C^2 + 3j\omega RC} \qquad [22]$$

当 $\omega = 1/RC$ 时，增益表达式是实数，从而可以选择 R 和 C 的值，使之等于放大器设定的工作频率 $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$。

作为例子，设计一个文氏电桥振荡器电路，要求产生 20 Hz 的正弦信号，这是音频段可接收的低频。需要的频率 $\omega = 2\pi f = (6.28)(20) = 125.6$ rad/s，一旦选定了电阻值，就可以确定电容值（反之亦然）。假设手上正好有一个 1 μF 的电容，则计算得到所需要的电阻值为 $R = 7962\ \Omega$。由于这不是标准电阻值，所以需要利用几个标准电阻的串并联组合来得到需要的值。回到图 15.45，准备用 PSpice 对电路进行仿真，但是发现电阻 R_1 和 R_f 的值还没有确定。

尽管式[20]正确描述了 $\mathbf{V}_o$ 和 $\mathbf{V}_i$ 之间的关系，不过，还是可以再写出一个表示其关系的方程：

$$0 = \frac{\mathbf{V}_i}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_o}{R_f}$$

重新整理后得到

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \qquad [23]$$

令式[22]的 $\omega = 1/RC$，结果为

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\mathbf{V}_o} = \frac{1}{3}$$

也就是在选择电阻 R_1 和 R_f 的数值时必须保证 $R_f/R_1 = 2$，遗憾的是，如果选择 $R_f = 2$ kΩ，$R_1 = 1$ kΩ，用PSpice进行瞬态分析，得到的结果却是令人失望的。为了保证电路确实是不稳定的（起振有一个必要条件），比值 R_f/R_1 要略大于 2。此时仿真（$R = 7962\ \Omega$，$C = 1$ μF，$R_f = 2.01$ kΩ，$R_1 = 1$ kΩ）的结果如图 15.46 所示。注意，振荡的幅度在图中是增长的，实际电路中需要采用非线性电路元件来稳定振荡信号的幅度。

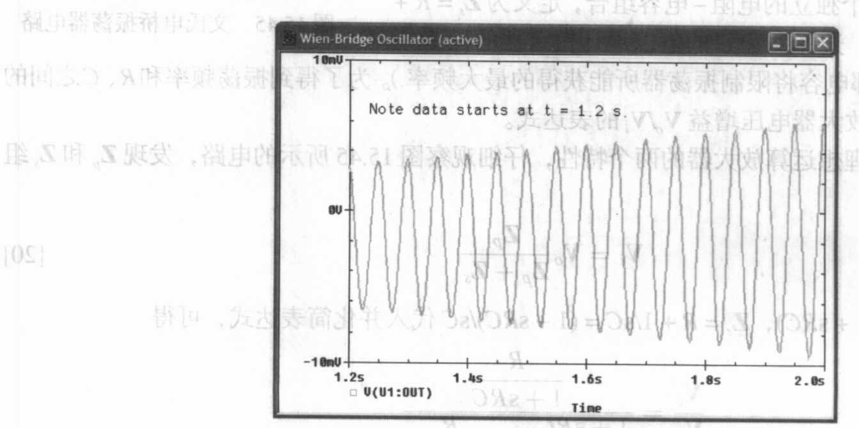


图 15.46 文氏电桥振荡器的仿真输出，设计的工作频率是 20 Hz

15.8　电压比 $H(s) = V_{out}/V_{in}$ 的综合方法

本章讨论的许多内容都与传输函数的零点和极点有关。我们可以把零、极点定位在复平面上，可以用它们作为s的因式或者多项式表示传输函数，可以用它们计算受迫响应，15.7节还用极点构造了自由响应的函数形式。

现在要讨论的是如何由要求的传输函数确定网络结构。设传输函数的形式为$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}(\mathbf{s})/\mathbf{V}_{in}(\mathbf{s})$，如图15.47所示，我们只讨论问题的一部分。为简单起见，$\mathbf{H}(\mathbf{s})$被严格限制为临界频率均位于负σ轴上（包括原点），即讨论的传输函数类似于

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{s}) = \frac{10(\mathbf{s}+2)}{\mathbf{s}+5}$$

或者

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{s}) = \frac{-5\mathbf{s}}{(\mathbf{s}+8)^2}$$

或者

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{s}) = 0.1\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)$$

为了求得图15.48所示的包含理想运算放大器的网络电压增益，位于运算放大器两个输入端之间的电压本质上等于零，运算放大器的输入阻抗等于无穷大，因此流入反相输入端的总电流等于零：

$$\frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{Z}_f} = 0$$

或者

$$\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1}$$

如果$\mathbf{Z}_f$和$\mathbf{Z}_1$都是电阻，则电路就是一个反相放大器，或者可能是衰减器（如果比值小于1）。但我们现在感兴趣的是这两个阻抗中有一个是电阻，另一个是*RC*网络。

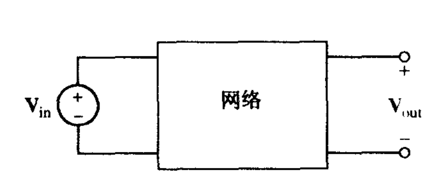


图15.47　构造网络，使传输函数符合给定的$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$

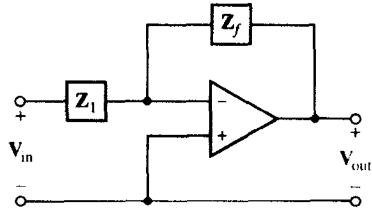


图15.48　对理想运算放大器，$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = -\mathbf{Z}_f/\mathbf{Z}_1$

在图15.49(a)所示的电路中，令$\mathbf{Z}_1 = R_1$，而$\mathbf{Z}_f$是R_f和C_f的并联等效组合，则

$$\mathbf{Z}_f = \frac{R_f/\mathbf{s}C_f}{R_f + (1/\mathbf{s}C_f)} = \frac{R_f}{1+\mathbf{s}C_fR_f} = \frac{1/C_f}{\mathbf{s}+(1/R_fC_f)}$$

和

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{1/R_1C_f}{\mathbf{s} + (1/R_fC_f)}$$

得到的传输函数只有一个临界频率（有限值），极点位于 $\mathbf{s} = -1/R_fC_f$。

回到图 15.49(b)，现在令 $\mathbf{Z}_f$ 为电阻，而 $\mathbf{Z}_1$ 为 RC 并联组合：

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1/C_1}{\mathbf{s} + (1/R_1C_1)}$$

和

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -\frac{\mathbf{Z}_f}{\mathbf{Z}_1} = -R_fC_1\left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_1C_1}\right)$$

则有限值的临界频率成为位于 $\mathbf{s} = -1/R_1C_1$ 的零点。

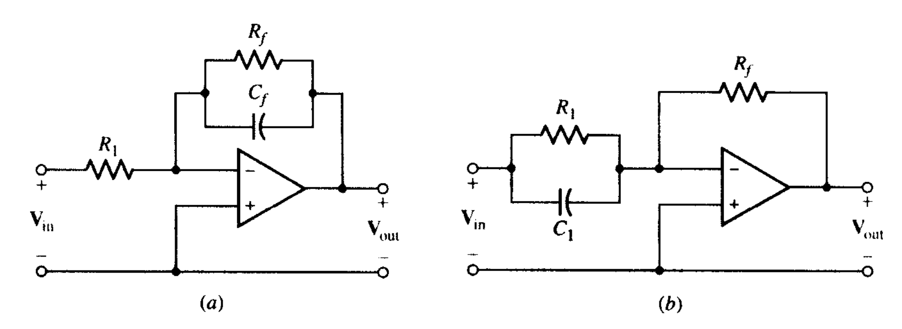


图 15.49 (a) 传输函数 $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 有一个位于 $\mathbf{s} = -1/R_fC_f$ 的极点；(b) 其中有一个位于 $\mathbf{s} = -1/R_1C_1$ 的零点

对理想运算放大器，输出阻抗或戴维南阻抗等于零，所以 $\mathbf{V}_{out}$ 或者 $\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 都不是输出端负载的函数，这表明可以将运算放大器的输出端直接与下一个运算放大器的输入端相连，这称为级联。指定每个运算放大器的零点和极点，可以得到任何想要的总传输函数。

例题 15.13 对电路进行综合使之产生的传输函数为 $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = 10(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}+5)$。

解： 位于 $\mathbf{s} = -5$ 的极点可以用图 15.49(a)所示的网络来产生，该网络称为网络 A，而且 $1/R_{fA}C_{fA} = 5$。任意选择 $R_{fA} = 100\ \text{k}\Omega$，则 $C_{fA} = 2\ \mu\text{F}$。对这一部分电路：

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{s}) = -\frac{1/R_{1A}C_{fA}}{\mathbf{s} + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5 \times 10^5/R_{1A}}{\mathbf{s}+5}$$

接下来考虑位于 $\mathbf{s} = -2$ 的零点。从图 15.49(b)可知，$1/R_{1B}C_{1B} = 2$，取 $R_{1B} = 100\ \text{k}\Omega$，则 $C_{1B} = 5\ \mu\text{F}$。这时，

$$\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = -R_{fB}C_{1B}\left(\mathbf{s} + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}}\right) = -5 \times 10^{-6}R_{fB}(\mathbf{s}+2)$$

以及

$$\mathbf{H(s)} = \mathbf{H}_A(\mathbf{s})\mathbf{H}_B(\mathbf{s}) = 2.5\frac{R_{fB}}{R_{1A}}\frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}+5}$$

我们通过令 $R_{fB}=100\ \text{k}\Omega$ 和 $R_{1A}=25\ \text{k}\Omega$ 来完成设计，结果电路如图 15.50 所示。电路中电容相当大，这是因为 **H**(s)的零点和极点都是低频造成的，如果 **H**(s)改为 10(s + 2000)/(s + 5000)，电容就可以取为 2~5 nF。

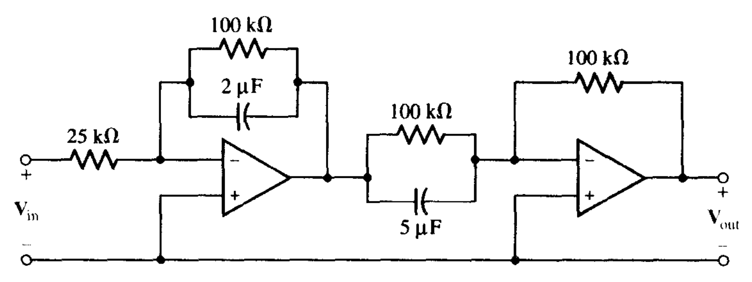


图 15.50　含有两个理想运算放大器的网络，电压传输函数为 $\mathbf{H}(s)=\mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}=10(s+2)/(s+5)$

练习

15.17　为3个级联组合中的每一个 $\mathbf{Z}_1$ 和 $\mathbf{Z}_f$ 选择合适的元件值，使其实现 $\mathbf{H}(s)=-20s^2/(s+1000)$ 的传输函数。

答案：1 μF‖∞，1 MΩ；1 μF‖∞，1 MΩ；100 kΩ‖10 nF，5 MΩ。

总结和复习

- 电阻在频域中可以用相同数值的阻抗表示。
- 电感在频域用阻抗 s*L* 表示。如果初始电流不等于零，阻抗必须与电压源 $-Li(0^-)$ 串联或者与电流源 $i(0^-)/s$ 并联。
- 电容在频域用阻抗 1/s*C* 表示。如果初始电压不等于零，阻抗必须与电压源 $v(0^-)/s$ 串联或者与电流源 $Cv(0^-)$ 并联。
- s 域的节点分析和网孔分析得到用 s 多项式表示的瞬时方程，MATLAB 是求解系统方程的有用工具。
- 叠加定理、电源变换、戴维南等效和诺顿等效均适用于 s 域分析。
- 电路的传输函数 **H**(s)定义为 s 域的输出与输入的比值，这两个量可以是电压也可以是电流。
- **H**(s)的零点是使其幅度等于零的点，**H**(s)的极点是使其幅度等于无穷大的点。
- 卷积提供了利用冲激响应确定电路输出的解析方法和图解方法。
- 有几种用零点和极点表示 s 域表达式的图形方法，这些图形能够用来综合电路，使之满足所要求的响应。

深入阅读

有关 s 域系统分析、拉普拉斯变换、传输函数的性质等详细内容可查阅下面的书籍：

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 2002。

不同类型滤波器电路的讨论可查阅下面的书籍：

R. Mancini, *Op Amps for Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003。G. Clayton 和 S. Winder, *Operational Amplifiers*, 5th ed. Amsterdam: Newnes, 2003。

习题

15.1 Z(s)与 Y(s)

1. 画出图 15.51 所示电路在 s 域的所有可能的等效电路（$t>0$）。
2. 画出图 15.52 所示电路在 s 域的所有可能的等效电路（$t>0$）。

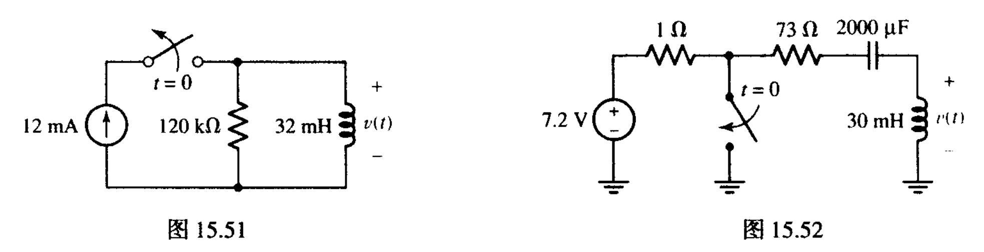


图 15.51　　图 15.52

3. 电路如图 15.53 所示，求：(a) 作为 s 的两个多项式之比的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$；(b) $\mathbf{Z}_{in}(-80)$；(c) $\mathbf{Z}_{in}(j80)$；(d) 并联 RL 支路的导纳 $\mathbf{Y}_{RL}(\mathbf{s})$，同样用 s 的多项式之比表示；(e) 重复求解 $\mathbf{Y}_{RC}(\mathbf{s})$；(f) 证明 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = (\mathbf{Y}_{RL}+\mathbf{Y}_{RC})/\mathbf{Y}_{RL}\mathbf{Y}_{RC}$。
4. 求从图 15.54 所示电路两端看进去的戴维南等效阻抗。

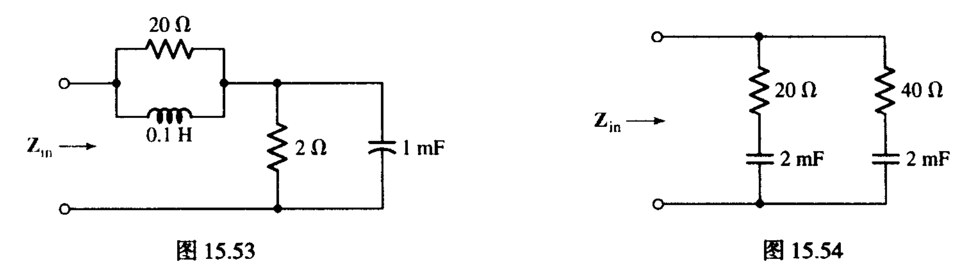


图 15.53　　图 15.54

5. (a) 求图 15.55 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，用 s 的两个多项式之比表示；(b) 求 $\mathbf{Z}_{in}(j8)$，用直角坐标形式表示；(c) 求 $\mathbf{Z}_{in}(-2+j6)$，用极坐标形式表示；(d) 为使 $\mathbf{s}=-5+j0$ 时的 $\mathbf{Z}_{in}=0$，16 Ω 的电阻需要改变成怎样的数值？(e) 为使 $\mathbf{s}=-5+j0$ 时的 $\mathbf{Z}_{in}=\infty$，16 Ω 的电阻又需要改变成怎样的数值？
6. (a) 求从图 15.56 所示电路两端看进去的戴维南等效阻抗；(b) 画出阻抗的幅度随频率 ω 变化的曲线，设 $\sigma=0$。

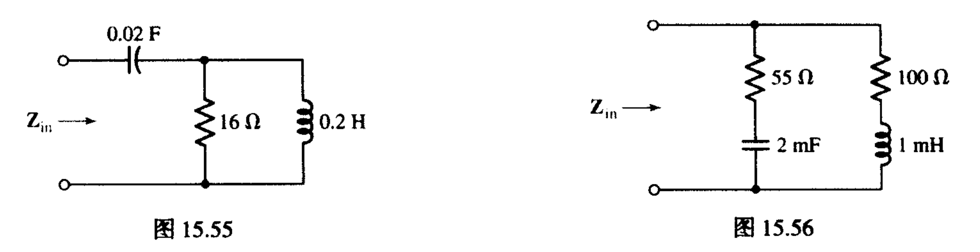


图 15.55　　图 15.56

7. 图 15.57 所示是一个共发射极组态的双极型晶体管放大电路的线性模型，适用的频率高达数兆赫（MHz），确定从电路两端看进去的输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$，用 s 的多项式之比表示。
8. 求出图 15.58 所示电路中 $v(t)$ 的表达式，要求首先在 s 域中求解。

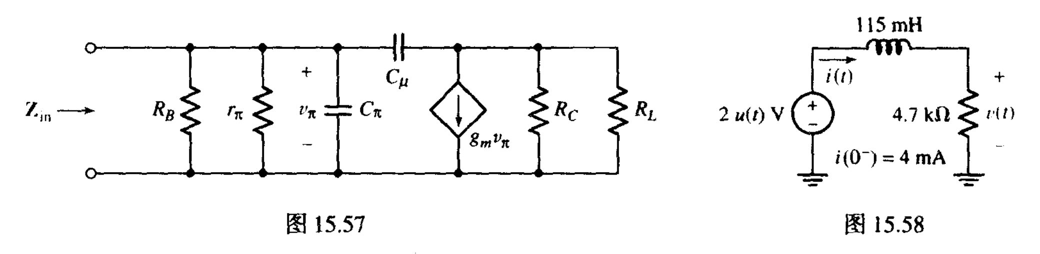


图 15.57　　图 15.58

9. 利用 s 域分析方法确定图 15.59 所示电路中流过电容的电流 $i(t)$。

10. (a) 写出将图 15.60 所示电路转换成 s 域的表示形式；(b) 求电阻吸收的功率 $p(t)$的表达式。

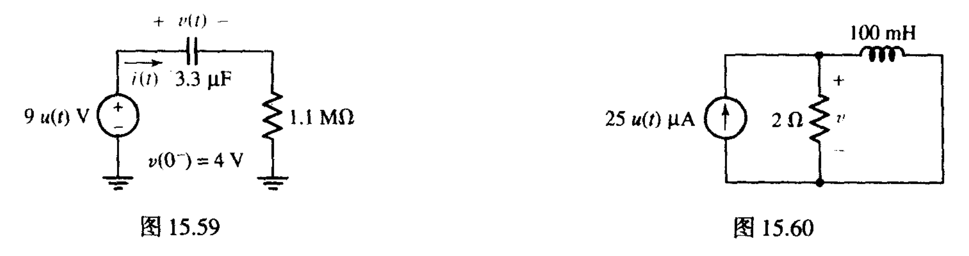


图 15.59　　图 15.60

15.2 s 域节点分析与网孔分析

11. 考虑图 15.61 所示的电路，采用 s 域分析方法，求标注的电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$，设 $v_1(0^-) = -2$ V。

12. 考虑图 15.62 所示的电路：(a) 采用 s 域分析方法，求标注的电压 $v_1(t)$和 $v_2(t)$；(b) 画出 $v_1(t)$的波形。

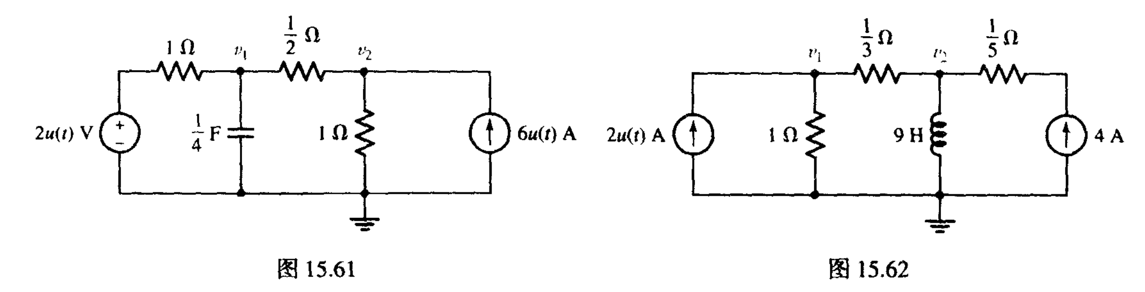


图 15.61　　图 15.62

13. 某简单电路如图 15.63 所示，电路含有两个网孔。(a) 利用 s 域网孔分析法求两个电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$，设 $v_C(0^-) = 9$ V；(b) 用 PSpice 对答案进行验证。用带标记的仿真结果与(a)中分析得到的结果进行比较。

14. 某简单电路如图 15.64 所示，电路含有两个网孔。(a) 利用 s 域网孔分析法求两个电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$，设 $i_1(0^-) - i_2(0^-) = 8$ A；(b) 用 PSpice 对答案进行验证。用带标记的仿真结果与(a)中分析得到的结果进行比较。

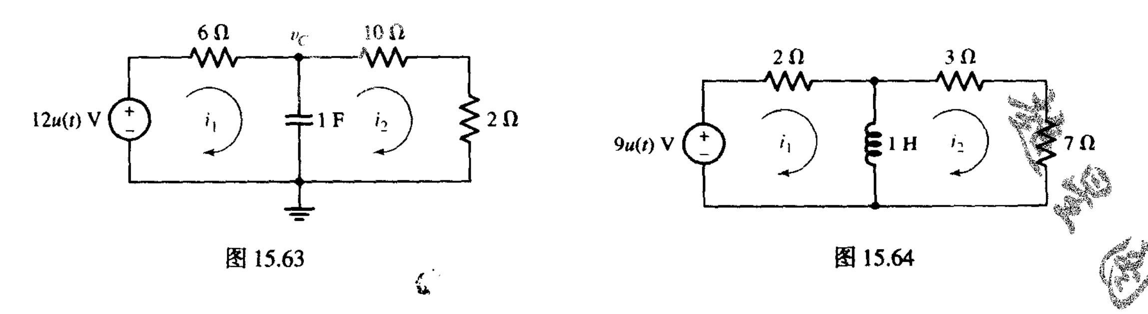


图 15.63　　图 15.64

15. (a) 电路如图 15.65 所示，设 $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30°)u(t)$ V，在频域求解 $\mathbf{I}_x$; (b) 求 $i_x(t)$。

16. 电路如图 15.66 所示，假设初始能量为零，求节点电压 $v_1(t)$。

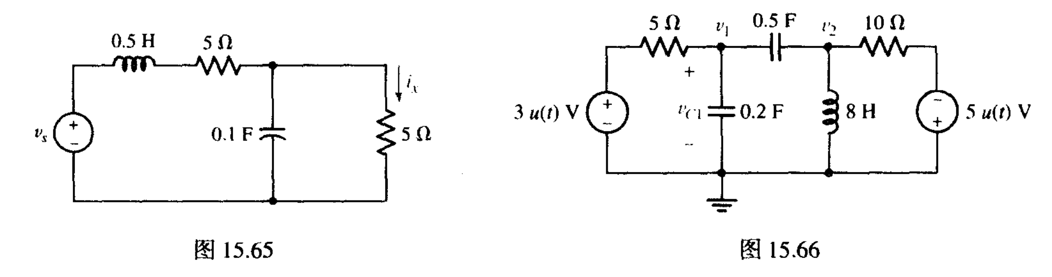


图 15.65　　图 15.66

17. 电路如图 15.66 所示，确定中间的网孔电流在时域的表达式，假设初始能量为零。

18. 电路如图 15.66 所示，假设电容的初始电压 $v_{C1}(0^-) = 9$ V，其他元件的初始储能均为零，求节点电压 $v_1(t)$。

19. 电路如图 15.67 所示，设 $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t\, u(t)$ A 和 $i_{s2} = 30e^{-3t}\sin 4t\, u(t)$ A; (a) 在频域求解 $\mathbf{V}_x$; (b) 求 $v_x(t)$。

20. (a) 电路如图 15.68 所示，设 $v(0^-) = 75$ V，电感的初始储能等于零。确定 $v(t)$在时域的表达式; (b) 利用(a)的结果确定流过电源 115 V rms 的稳态电流; (c) 采用相量分析法验证(b)的结果。

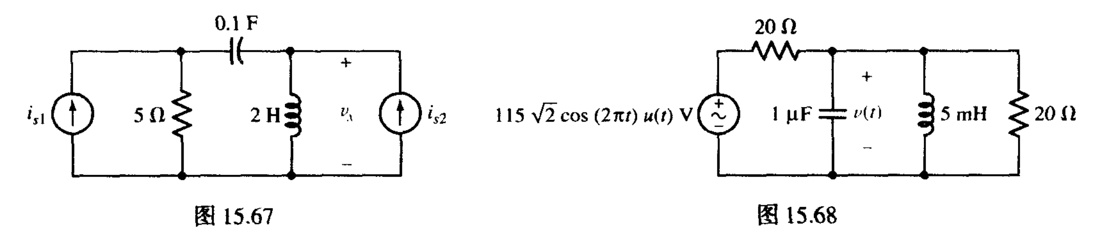


图 15.67　　图 15.68

21. 电路如图 15.69 所示，假设流过 1 mH 电感的电流在 $t = 0^-$ 时为$(i_2 - i_4) = 1$ A，求网孔电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$，验证该结果接近于采用相量分析法得到的电路趋于稳态时的结果。

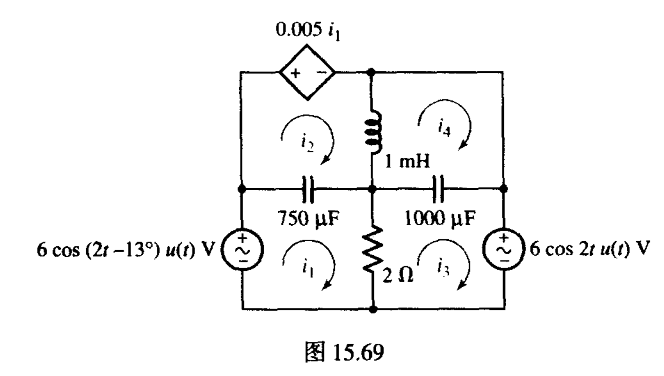


图 15.69

22. 电路如图 15.70 所示，假设电路的初始储能均为零，求在下列时刻电压 v_2 的值: (a) 1 ms; (b) 100 ms; (c) 10 s。

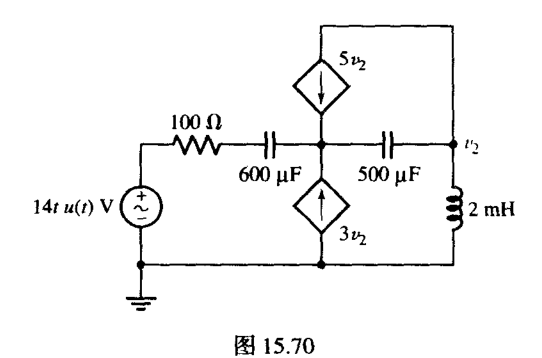


图 15.70

23. 假定图15.71所示电路的受控电压源在雷电中被损坏而不能工作（即可以将它看成开路），求 2 Ω的电阻所吸收的功率的表达式。假定初始时刻电路所有能量均存储在电感上，也就是在 $t = 0^-$ 时流过 1 mH 电感的电流$(i_2 - i_4)$为 1 mA。

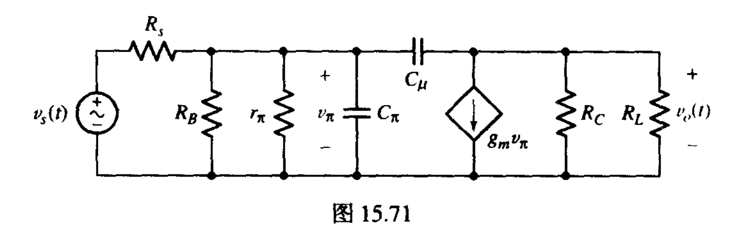


图 15.71

24. (a) 图 15.71 所示是共发射极双极型晶体管放大器的线性电路模型，假设电容所存储的初始能量为零，求电压增益 $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ 的表达式，用 s 的多项式的比值形式表示；(b)该传输函数共有几个极点？

15.3　其他电路分析方法

25. (a) 将图 15.72 所示的电路转化为 s 域等效电路；(b)求从 1 Ω 电阻两端看进去的戴维南等效电路；(c)根据化简后的电路，求流过 1 Ω 电阻的瞬态电流 $i(t)$的表达式。
26. 将图 15.72 所示电路中的电流源用一个 $20u(t)$ V 的电压源代替，上端为正参考方向。(a)将电路转化为 s 域等效电路；(b)求从 1 Ω 两端看进去的诺顿等效电路；(c)根据化简后的电路，求 $i_C(t)$的表达式。
27. 某 s 域电路如图 15.73 所示，求从 7s² Ω两端看进去的戴维南等效阻抗并用该阻抗求电流 $\mathbf{I}(s)$。

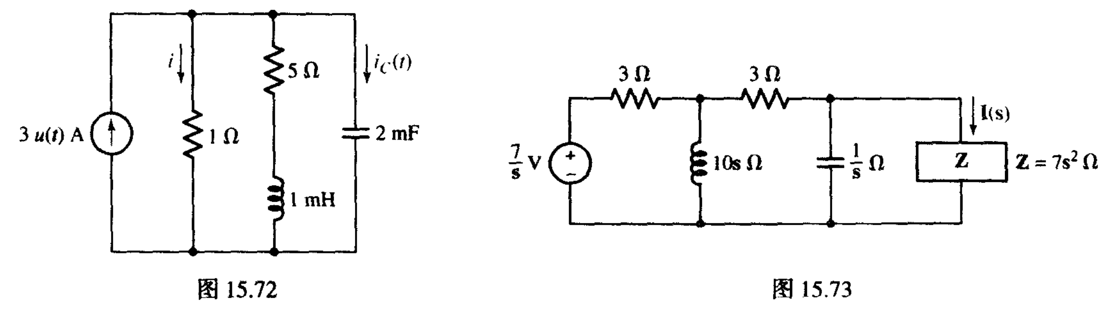


图 15.72　　　　图 15.73

28. 某 s 域电路如图 15.74 所示，求从 ab 两端看进去的戴维南等效电路。
29. (a) 某电路如图 15.75 所示，在 s 域中使用叠加定理，求 $\mathbf{V}_1(s)$和 $\mathbf{V}_2(s)$的表达式；(b) 求 $v_1(t)$与 $v_2(t)$。

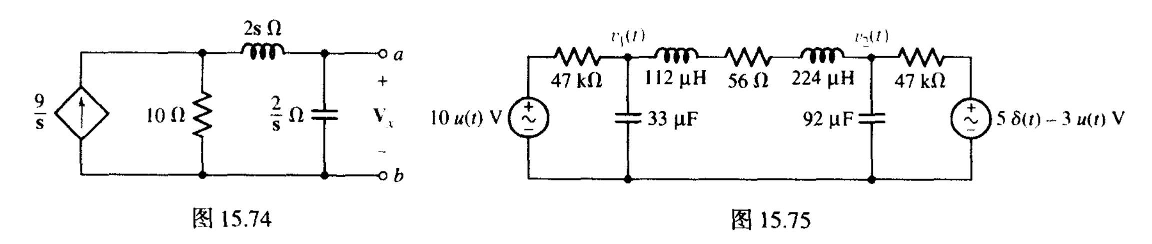


图 15.74　　图 15.75

30. 某电路如图15.75所示，先进行s域中的电源变换，然后求解图中56 Ω电阻吸收的功率$p(t)$。
31. (a) 某电路如图15.75所示，求从电源$10u(t)$ V两端看进去的诺顿等效电路；(b) 求$t = 1.5$ ms时流出电源$10u(t)$ V的电流。
32. (a) 某电路如图15.76所示，利用s域叠加定理求$\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$的表达式；(b) 求$v_1(t)$。
33. (a) 某电路如图15.77所示，利用s域电源变换求$\mathbf{I}(\mathbf{s})$的表达式；(b) 求$i(t)$；(c) 求$i(t)$的稳态值。

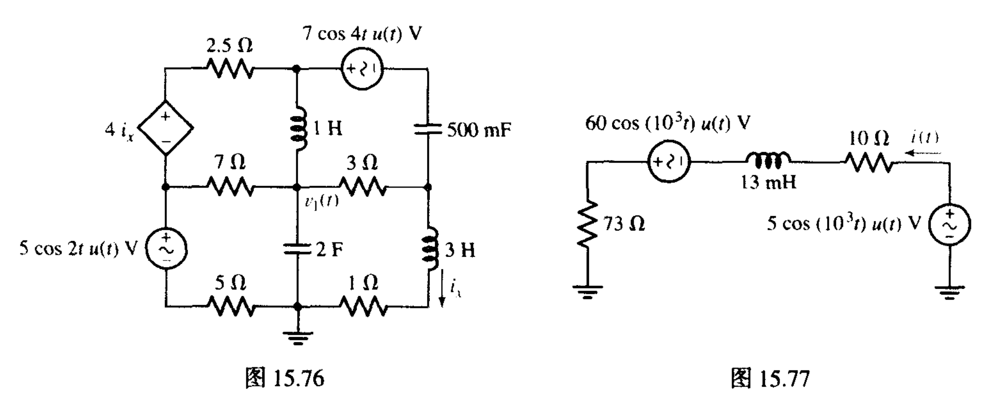


图 15.76　　图 15.77

15.4 极点、零点和传输函数

34. 确定下列传输函数的极点和零点：(a) $\dfrac{7\mathbf{s}}{\mathbf{s}(3\mathbf{s}^2-9\mathbf{s}+4)}$；(b) $\dfrac{\mathbf{s}^2-1}{(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4)(\mathbf{s}^2+1)}$。
35. 求下列各s域函数的所有极点和零点：(a) $\dfrac{3\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}(\mathbf{s}^2+4)(\mathbf{s}-1)}$；(b) $\dfrac{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}-1}{\mathbf{s}^2(4\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}^2-1)}$。
36. 5 Ω电阻和0.2 F电容的串联组合与2 Ω电阻和5 H电感的串联组合相并联。(a) 求并联组合的输入导纳$\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$，用s的两个多项式之比表示；(b) 求$\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$的所有极点和零点；(c) 如果一个10 Ω的电阻与$\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$并联，确定此时输入导纳的所有极点；(d) 如果一个10 Ω的电阻与$\mathbf{Y}_1(\mathbf{s})$串联，确定此时输入导纳的所有零点。
37. 确定下列情况下输入阻抗的所有极点和零点：(a) 电路如图15.54所示；(b) 电路如图15.56所示。
38. 某导纳$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$有位于$\mathbf{s} = 0$和$\mathbf{s} = -10$的零点，以及位于$\mathbf{s} = -5$和$\mathbf{s} = -20\ \mathrm{s}^{-1}$的极点。假设当$\mathbf{s}\to\infty$时$\mathbf{Y}(\mathbf{s})\to 12$ s，求：(a) $\mathbf{Y}(j10)$；(b) $\mathbf{Y}(-j10)$；(c) $\mathbf{Y}(-15)$；(d) $5+\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的极点和零点。
39. (a) 求图15.78所示网络的$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$；(b) 求$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的所有临界频率。
40. 给定电路的传输函数为$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = (\mathbf{s}+2)/[(\mathbf{s}+5)(\mathbf{s}^2+6\mathbf{s}+25)]$，求s域的输出响应，设输入为：(a) $\delta(t)$；(b) $e^{-4t}u(t)$；(c) $[2\cos 15t]u(t)$；(d) $te^{-t}u(t)$；(e) 求每一个输出响应的极点和零点。

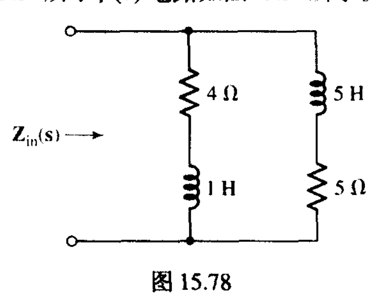


图 15.78

15.5 卷积

41. 某个线性系统的冲激响应为 $h(t) = 5\sin \pi t[u(t) - u(t-1)]$。设输入信号为 $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$，采用卷积法，求输出 $y(t)$，并画出波形图。
42. 令 $f_1(t) = e^{-5t}u(t)$，$f_2(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$，求 $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$。要求：(a) 在时域中求卷积；(b) 使用 $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})\mathbf{F}_2(\mathbf{s})\}$。
43. 将冲激 $\delta(t)$ V 接到某个二端口网络时输出电压为 $v_o(t) = 4u(t) - 4u(t-2)$ V，求当输入为 $2u(t-1)$ V 时的输出 $v_o(t)$，并画出波形图。
44. 令 $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$，$x(t) = u(t) - \delta(t)$，求 $y(t) = h(t) * x(t)$。要求：(a) 在时域中求卷积；(b) 求出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{X}(\mathbf{s})$，然后求 $\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{H}(\mathbf{s})\mathbf{X}(\mathbf{s})\}$。
45. 某电路的冲激电压响应为 $h(t) = 5u(t) - 5u(t-2)$。求激励电压 $v_{in}(t)$ 分别为下列形式时输出电压在 s 域和时域的响应：(a) $3\delta(t)$ V；(b) $3u(t)$ V；(c) $3u(t) - 3u(t-2)$ V；(d) $3\cos 3t$ V；(e) 画出 (a) ~ (d) 中求出的时域电压响应的波形图。
46. (a) 求图 15.79 所示网络的冲激响应 $h(t)$；(b) 利用卷积求 $v_o(t)$，设 $v_{in}(t) = 8u(t)$ V。
47. (a) 求图 15.80 所示网络的冲激响应 $h(t)$；(b) 利用卷积求 $v_o(t)$，设 $v_{in}(t) = 8e^{-t}u(t)$ V。

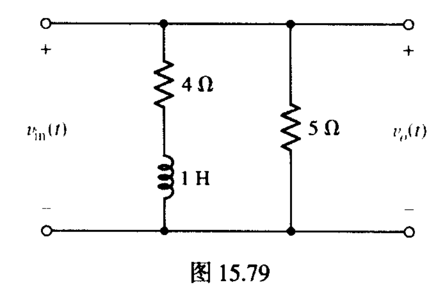


图 15.79

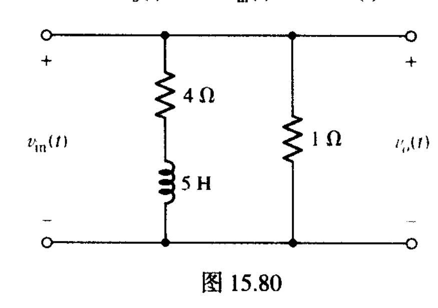


图 15.80

15.6 复频率平面

48. 求图 15.81 所示网络的传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并标定所有临界频率的位置。
49. 传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_2(\mathbf{s})/\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$ 的零极点分布如图 15.82 所示，令 $\mathbf{H}(0) = 1$。画出 $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ 与下列变量之间的关系曲线：(a) $\omega = 0$ 时的 σ；(b) $\sigma = 0$ 时的 ω；(c) 求 $|\mathbf{H}(j\omega)|_{max}$ 的值。

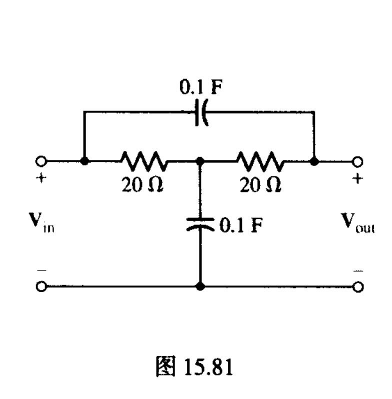


图 15.81

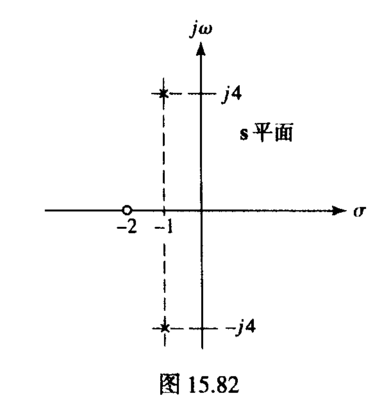


图 15.82

50. 一个电力机械的输入阻抗含有两个位于$\mathbf{s}=-1$的二重零点；一个极点位于$\mathbf{s}=-0.5+j\sqrt{3}/2$，另一个极点位于$\mathbf{s}=-0.5-j\sqrt{3}/2$；并且当$\mathbf{s}=0$时，输入阻抗等于1 Ω。(a)画出该阻抗的零极点分布图；(b) 画出阻抗幅度的弹性薄层模型；(c) 求电阻、电感和电容的组合电路，使其具有相同的阻抗（提示：根据s域表达式反推）。

51. 给定电压增益$\mathbf{H}(\mathbf{s})=(10\mathbf{s}^2+55\mathbf{s}+75)/(\mathbf{s}^2+16)$。(a) 在s平面上确定临界频率的位置；(b) 计算$\mathbf{H}(0)$与$\mathbf{H}(\infty)$；(c) 如果$|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$的尺度模型在原点处的高度为3 cm，则在$\mathbf{s}=j3$处的高度等于多少？(d) 大致画出$|\mathbf{H}(\sigma)|$随σ变化的图形以及$|\mathbf{H}(j\omega)|$随着ω变化的图形。

52. 在一个最高机密的政府实验室的屋后角，一个研究人员发现了一个样子古怪的金属盒子，他的午餐被搞恶作剧的同事们藏了起来，显然他的同事们具有足够的空闲时间来“作弄”他。因为找不到食物，他决定测量盒子的导纳并发现导纳值可以用模型表示为$\mathbf{Y}(\mathbf{s})=(5\mathbf{s}^2+5\mathbf{s}+2)/(5\mathbf{s}^2+15\mathbf{s}+2)$ S。(a)画出导纳的零极点分布图；(b) 画出导纳幅度的弹性薄层模型；(c) 如果分母多项式的系数对应于午餐位置的纬度（度、分、秒），分子多项式的系数对应于午餐位置的经度（度、分、秒）。确定失踪的午餐的位置。

53. 图15.83所示是电流增益$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\mathbf{I}_{out}/\mathbf{I}_{in}$的零极点分布图，令$\mathbf{H}(-2)=6$。(a) 将$\mathbf{H}(\mathbf{s})$表示成s的多项式之比的形式；(b) 求$\mathbf{H}(0)$与$\mathbf{H}(\infty)$；(c)确定从每个临界频率出发到$\mathbf{s}=j2$的箭头的幅度和方向。

54. 图15.84所示的三元件网络的输入阻抗$\mathbf{Z}_A(\mathbf{s})$有一个位于$\mathbf{s}=-10+j0$处的零点。如果用一个20 Ω的电阻与这个网络串联，所得电路的输入阻抗零点成为$\mathbf{s}=-3.6+j0$，求R与C的值。

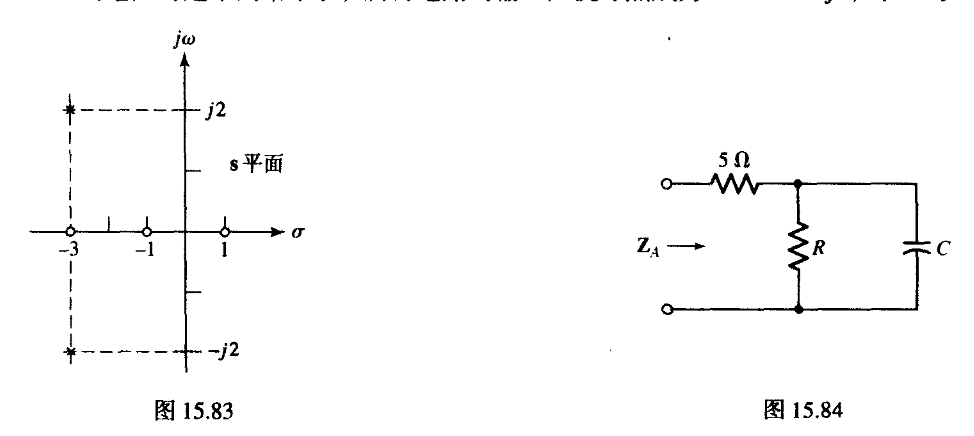


图15.83　　　　图15.84

55. 令$\mathbf{H}(\mathbf{s})=100(\mathbf{s}+2)/(\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+5)$。(a) 画出$\mathbf{H}(\mathbf{s})$的零极点图；(b) 求$\mathbf{H}(j\omega)$；(c) 求$|\mathbf{H}(j\omega)|$；(d) 画出$|\mathbf{H}(j\omega)|$随$\omega$变化的曲线；(e) 求$|\mathbf{H}(j\omega)|$取得最大值时对应的频率值$\omega_{max}$。

15.7 自由响应和s平面

56. 网络如图15.85所示，设$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})=(5\mathbf{s}+20)/(\mathbf{s}+2)$ Ω，求：(a) 开路端的电压$v_{ab}(t)$，设$v_{ab}(0)=25$ V；(b) ab端的短路电流$i_{ab}(t)$，设$i_{ab}(0)=3$ A。

57. 在图15.85所示的网络中，设$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})=5(\mathbf{s}^2+4\mathbf{s}+20)/(\mathbf{s}+1)$ Ω，求流入端点a的瞬时电流$i_a(t)$，已知电压$v_{ab}(t)$分别为：(a) $160e^{-6t}$ V；(b) $160e^{-6t}u(t)$ V，且在$t=0$时，$i_a(0)=0$，$di_a/dt=32$ A/s。

58. (a) 电路如图 15.86 所示，求 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}_C/\mathbf{I}_s$；(b) 求 $\mathbf{H}(s)$的极点；(c) 求 RLC 电路的 α，ω_0 与 ω_d；(d) 求受迫响应 $i_{C,f}(t)$；(e) 求 $i_{C,n}(t)$的自由响应形式；(f) 求 $i_C(0^+)$及 $t = 0^+$ 时 di_C/dt 的值；(g) 写出 $i_C(t)$的完全响应。

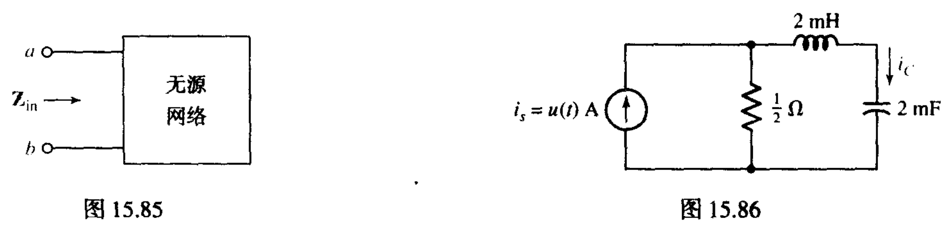


图 15.85　　图 15.86

59. 电路如图 15.87 所示。(a) 求 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{I}_{in}/\mathbf{V}_{in}$ 的极点；(b) 若 $i_1(0^+) = 5$ A 和 $i_2(0^+) = 2$ A，求 $i_{in}(t)$的表达式，设 $v_{in}(t) = 500u(t)$ V。

60. (a) 电路如图 15.88 所示。求 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}(s)/\mathbf{I}_s(s)$，然后求出当 $i_s(t)$等于下式时 $v(t)$的表达式：(b) $2u(t)$ A；(c) $4e^{-10t}$ A；(d) $4e^{-10t}u(t)$ A。

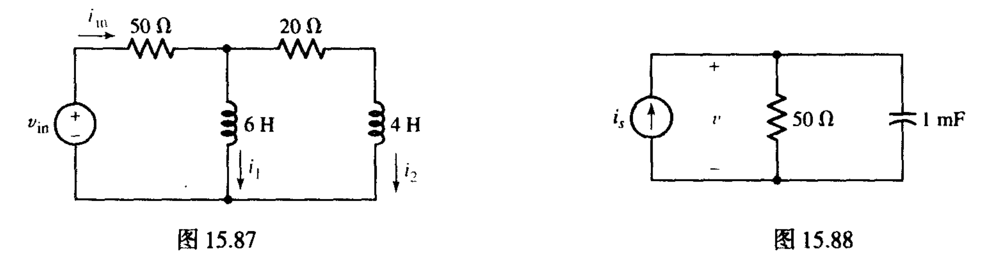


图 15.87　　图 15.88

61. (a) 电路如图 15.89 所示。(a)求 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{C2}/\mathbf{V}_s$；(b) 设 $v_{C1}(0^+) = 0$，$v_{C2}(0^+) = 0$，且 $v_s(t) = u(t)$ V，求 $v_{C2}(t)$。

62. 电路如图 15.90 所示，求从电源两端看进去的阻抗 $\mathbf{Z}_{in}(s)$。借助该表达式求 $t > 0$ 时的 $v_{in}(t)$。

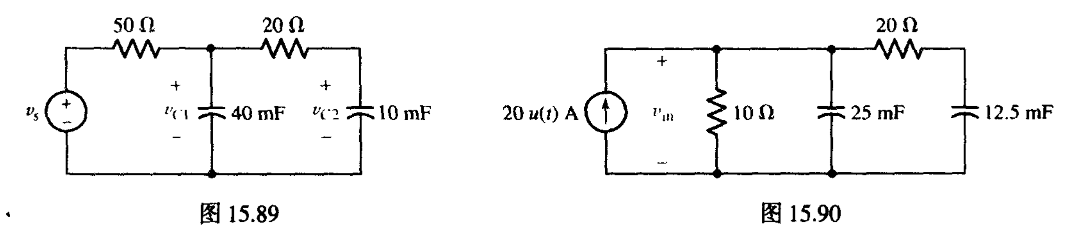


图 15.89　　图 15.90

15.8 电压比 $H(s) = V_{out}/V_{in}$ 的综合方法

63. 某运放电路如图 15.48 所示，在阻抗为下列值（单位为 Ω）的情况下，分别求出 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并将其表示成 s 的多项式之比的形式：(a) $\mathbf{Z}_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$，$\mathbf{Z}_f(s) = 5000$；(b) $\mathbf{Z}_1(s) = 5000$，$\mathbf{Z}_f(s) = 10^3 + (10^8/s)$；(c) $\mathbf{Z}_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$，$\mathbf{Z}_f(s) = 10^4 + (10^8/s)$。

64. 某运放电路如图 15.49(b)所示，令 $R_f = 20$ kΩ，确定 R_1 和 C_1 的值，使得 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 分别等于：(a) -50；(b) $-10^{-3}(s + 10^4)$；(c) $-10^{-4}(s + 10^3)$；(d) $10^{-3}(s + 10^5)$，用两级表示。

65. 某运放电路如图 15.49(a)所示，令 $R_f = 20$ kΩ，确定 R_1 和 C_f 的值，使得 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 分别等于：(a) -50；(b) $-10^{-3}(s + 10^4)$；(c) $-10^{-4}(s + 10^3)$；(d) $100(s + 10^5)$，用两级表示。

66. 利用几个运放的级联实现传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in} = -10^{-4}\mathbf{s}(\mathbf{s}+10^2)/(\mathbf{s}+10^3)$。要求只使用 10 kΩ 的电阻、开路及短路，但要确定所有电容值。

67. 设计一个振荡频率为 1 kHz 的文氏电桥振荡器，只能使用标准电阻值。用合适的 PSpice 仿真对设计结果进行验证。

68. 设计一个振荡频率为 60 Hz 的文氏电桥振荡器，用合适的 PSpice 仿真对设计结果进行验证。

69. 设计一个振荡电路，要求提供 440 Hz 的正弦信号，只能使用标准电阻值。用合适的 PSpice 仿真对设计结果进行验证。设计的这个电路将产生什么样的音符？

70. 设计一个电路，要求产生的输出电压由频率为由 220 Hz 和 440 Hz 的两种正弦波组成。用合适的 PSpice 仿真对设计结果进行验证。这两个正弦波是否同相？

第16章 频率响应

主要概念

- 电容和电感电路的谐振频率
- 品质因数
- 带宽
- 频率缩放和幅度缩放
- 波特图方法
- 低通和高通滤波器
- 带通滤波器设计
- 有源滤波器

引言

前面几章已经提到了频率响应,所以读者可能会问为什么还要用一整章的篇幅来讲述频率响应的话题?频率响应的概念在科学和工程领域极其重要,它是理解确定具体系统是否稳定的因素的基础,不论系统是电子的、机械的、化学的还是生物的。我们同样还发现在许多超越稳定性范畴的电子工程应用中也要用到频率响应的概念。比如,通信系统经常处理的是呼叫不同频率的(比如,不同的电台)问题,只有对滤波器电路的频率响应有深刻理解才能做得到这一点。简言之,我们可以用较长的篇幅来阐述学习频率响应的好处,但言归正传,我们还是从最简单的并联电路着手分析谐振的概念,最后讨论日常应用中的基本滤波器电路的设计问题,比如音频放大器。

16.1 并联谐振

为什么我们感兴趣的正弦激励响应在现实中很少碰到呢?电力工业是个例外,其传输的波形都是正弦波,虽然偶尔也会考虑器件的非线性引起的其他频率。但是,大多数电子系统的激励函数和响应都不是正弦波。对任何传输信息的系统而言,正弦波本身是没有任何价值的,它携带的信息太少了,因为其未来的数值可以完全由现在的值预测到。更进一步说,一旦一个周期结束,任何正弦周期的波形不再含有额外的信息。

假设一个激励函数含有的正弦分量的频率范围为10~100 Hz。现在假设该激励函数通过一个网络,该网络具有这样的特性,即当频率在0~200 Hz的输入信号作用于输入端时,网络的输出幅度加倍,相位不变。可见,输出信号是不失真的,它与输入信号形状相似,只是幅度加倍。但是,如果网络的频率响应对输入频率位于10~50 Hz和50~100 Hz的输入信号其输出具有不同的幅度放大倍数的话,则输出就会产生失真,即不再是输入波形的简单放大。失真的输出有些情况下是需要的,有些情况下却是不需要的。换句话说,网络的频率响应是可以精心设计成抑制激励函数的某些频率分量,或者放大某些频率分量。

后面将会讲到调谐电路和谐振电路都具备这些特性,在讨论谐振的时候,可以应用前面分析频率响应时介绍的所有方法。

谐振

本节开始讨论同时含有电感和电容电路的一种重要现象，称之为谐振，不严格描述的话，也可以看成任何物理系统在固定幅度的正弦激励函数作用下产生最大响应幅度的条件。但是，我们也经常提到激励函数不是正弦的谐振。谐振系统可以是电子的、机械的、水力的、声学的或其他的系统，但是这里只介绍电子系统。

谐振现象并不陌生。比如，汽车上下跳动的频率为某个适当的值（大约每秒跳一次）且减震器有些老化时，上下跳动可以使汽车产生更加剧烈的振动；但是，如果跳动的频率增加或者减少，那么汽车的振动将比先前显著减小。另一个更能说明问题的例子是关于唱歌的，当演唱者唱出的音符正好对应某个特定频率时，这个声音甚至可以震碎水晶玻璃酒杯。这些例子都是通过调整频率来达到谐振的，当然也可以调整振动物体的大小、形状和材料来达到谐振，不过改变这些参数并不容易。

谐振可能是需要的，也可能是不需要的，具体取决于物理系统的作用。比如，以汽车为例，较大幅度的振动可能有助于分开锁住的减震器，但当速度达到65英里/小时（105公里/小时）时，这种现象令人讨厌。

现在来仔细定义谐振。某二端网络至少含有一个电感和一个电容，定义该网络的输入阻抗为纯电阻时，网络谐振，即

当网络输入端的电压与电流同相时，网络谐振。

同样可以发现，网络谐振时产生的响应幅度最大。

首先将谐振定义应用于并联*RLC*网络，该网络由电流源激励，如图16.1所示。现实情况中，这个电路是对实验室构造的实际电感和电容并联而成的电路的很好近似，并联组合的能量由输出阻抗非常高的电源驱动。对理想电流源而言，其正弦稳态导纳为

图16.1 电阻、电容和电感的并联组合通常称为并联谐振电路

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \qquad [1]$$

当输入端的电压与电流同相时，产生谐振。也就是导纳是实数的导纳，因此，谐振的必要条件为

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

调整L，C或者ω，可以满足谐振条件。我们只把注意力集中在以ω为变量的情况，此时谐振频率就成为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rad/s} \qquad [2]$$

或者

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{Hz} \qquad [3]$$

这里的谐振频率ω_0等于第9章式[10]定义的谐振频率。

导纳函数的零极点图在这里非用有用：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathbf{s}L} + \mathbf{s}C$$

或者

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}/RC + 1/LC}{\mathbf{s}} \quad [4]$$

对分子进行因式分解，得到$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的零点：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) = C\frac{(\mathbf{s}+\alpha - j\omega_d)(\mathbf{s}+\alpha + j\omega_d)}{\mathbf{s}}$$

其中，α和ω_d代表的量与9.4节RLC并联电路的自由响应中提到的量相同，即α是指数衰减系数：

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

ω_d表示自然谐振频率（不是谐振频率ω_0）：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

由分式的两个因式可直接得到如图16.2(a)所示的零极点图。

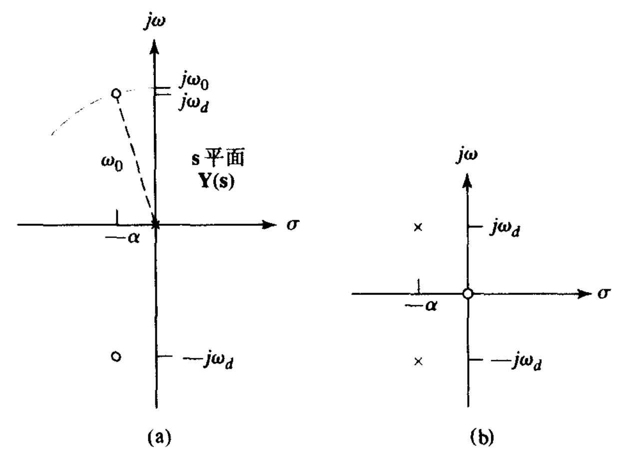


图16.2 (a)并联谐振电路的输入导纳在s平面上的零极点分布图，$\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$；(b)输入阻抗的零极点分布图

分析一下α、ω_d和ω_0之间的关系，显而易见的是从s平面的原点到导纳的一个零点的距离正好等于ω_0。根据零极点分布图，可以直接利用图解法得到谐振频率，只要以过零点的弧围绕s平面的原点为圆心旋转，该弧与正$j\omega$轴的交点对应的就是$\mathbf{s} = j\omega_0$。可以证明，ω_0比自然谐振频率略大一些，但它们的比值随着ω_d与α比值的增加而接近于1。

谐振和电压响应

接下来讨论响应的幅度，电压$\mathbf{V}(\mathbf{s})$如图16.1所示，激励函数的频率ω是变化的。如果假设电流源的幅度是恒定的，则电压响应与输入阻抗成正比。响应可以通过阻抗的零极点图得到：

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}/C}{(\mathbf{s}+\alpha - j\omega_d)(\mathbf{s}+\alpha + j\omega_d)}$$

如图16.2(b)所示，响应曲线从零开始增加，在自然谐振频率附近达到最大值，然后再下降，当ω趋于无穷大时，下降到零。频率响应曲线如图16.3所示。响应的最大值由R与电流源的乘积确定，其中隐含着阻抗的最大值等于R，而且，图中可见响应的最大值准确地取在谐振频率ω_0上。图中还标定了另外两个频率ω_1和ω_2，后面在测量带宽时要用到这两个频率。接下来证明阻抗的最大值等于R，且在谐振时得到。

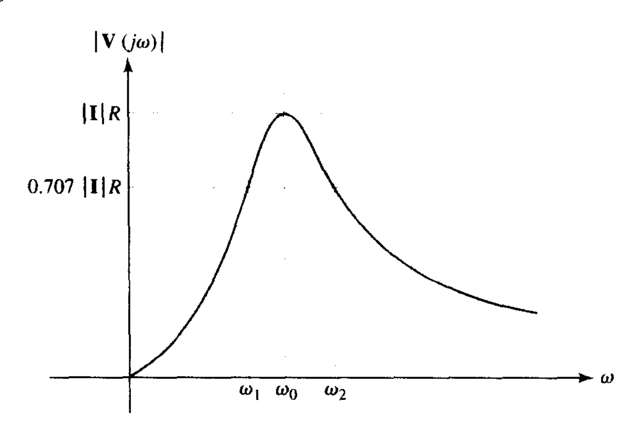


图16.3　并联谐振电路电压响应的幅度与频率的关系曲线

由式[1]定义的导纳含有一个常数电导和一个电纳，谐振时电纳具有最小幅度（零），因此电导幅度的最小值在谐振时获得，其值等于$1/R$，阻抗的最大值等于R，也是在谐振时得到。

因此谐振时图16.1所示的并联谐振的电压就等于$\mathbf{I}R$，电流源的所有电流都流过电阻。但是，L和C中也一样有电流。谐振时的电感电流为$\mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{V}_{L,0}/j\omega_0 L = \mathbf{I}R/j\omega_0 L$，电容电流为$\mathbf{I}_{C,0} = (j\omega_0 C)\mathbf{V}_{C,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I}$，由于谐振时$1/\omega_0 C = \omega_0 L$，因此，

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} \qquad [5]$$

和

$$\mathbf{I}_{C,0} + \mathbf{I}_{L,0} = \mathbf{I}_{LC} = 0$$

即流入LC组合的净电流等于零。找到响应幅度的最大值和谐振频率并不总是很容易的。在略欠标准的谐振电路中，响应幅度的表达式必须具有解析形式，通常等于实部平方加虚部平方再开根，然后对频率求导，再令导数等于零，求得最大响应时的频率，再将该频率代入幅度表达式，求得响应的最大幅度。可以用上面的简单电路作为练习来验证求解过程的正确性。然而前面已经讲到，这个求解步骤并不是必要的。

品质因数

这里需要强调的是虽然图16.3所示曲线的高度在激励源幅度恒定时只与电阻R的值有关，但是曲线的宽度或者两边的陡峭程度却与另外两个元件的值有关。我们把“响应曲线的宽度”定义为另外一个量，称为带宽，它与另外一个重要参数有关，这个参数称为品质因数Q。

说明： 必须十分小心，不要混淆品质因数、电荷和无功功率，因为它们都用相同的字母Q表示。

任何谐振电路频率响应曲线的陡峭程度都由电路储存的最大能量与一个完整周期内电路损耗的能量之间的比值决定。

所以Q被定义为

$$Q=\text{品质因数}=2\pi\frac{\text{电路存储的最大能量}}{\text{一个周期内电路损耗的总能量}} \qquad [6]$$

定义式中的比例系数2π能够将Q简化为更有用的表达式。因为能量只能储存在电容和电感中，因此在Q的表达式中可以用与电抗元件相关的瞬时能量以及电阻上消耗的平均功率表示：

$$Q=2\pi\frac{[w_L(t)+w_C(t)]_{\max}}{P_R T}$$

其中，T是用于计算Q的正弦频率的周期。

现在将定义式应用于图16.1所示的并联RLC电路，确定在谐振频率上的Q值。Q的数值用Q_0表示，选择电流激励函数为

$$i(t)=\mathbf{I}_m\cos\omega_0 t$$

则谐振时的相应电压为

$$v(t)=Ri(t)=R\mathbf{I}_m\cos\omega_0 t$$

电容储存的能量为

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cv^2=\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C}{2}\cos^2\omega_0 t$$

电感储存的瞬时能量由下式确定：

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li_L^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{1}{L}\int v\,dt\right)^2=\frac{1}{2L}\left[\frac{R\mathbf{I}_m}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right]^2$$

因此，

$$w_L(t)=\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C}{2}\sin^2\omega_0 t$$

可见存储的瞬时总能量为常数：

$$w(t)=w_L(t)+w_C(t)=\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C}{2}$$

该常数值必定也是最大值。为求出电阻在一个周期内消耗的能量，利用电阻消耗的平均功率（参见11.2节）

$$P_R=\tfrac{1}{2}\mathbf{I}_m^2R$$

乘以一个周期，得到

$$P_RT=\frac{1}{2f_0}\mathbf{I}_m^2R$$

从而得到谐振时的品质因数：

$$Q_0=2\pi\frac{\mathbf{I}_m^2R^2C/2}{\mathbf{I}_m^2R/2f_0}$$

或者

$$Q_0=2\pi f_0RC=\omega_0RC \qquad [7]$$

这个等式（及其式[8]）只针对图 16.1 所示的简单 RLC 并联电路。利用简单的代换，可以得到 Q_0 的一般表达式：

$$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \tag{8}$$

可见，对具体的电路而言，降低电阻 R 的值会同时降低 Q_0 的值。电阻值越低，电阻上消耗的能量越大。令人感兴趣的是，增加电容值会同时增加 Q_0，但是，增加电感值却会引起 Q_0 值的下降。当然，这些结论只对谐振频率而言。

Q 的其他解释

无量纲常数 Q_0 是并联谐振电路所有 3 个元件的函数。但是，Q 的概念并不只限于电子电路或者电子系统，它可以描述任何谐振现象。比如，考虑高尔夫球的反弹。假设将重量为 W 的高尔夫球从高度 h_1 落下并落于非常硬（无损耗）的水平面，这时球反弹到略低些的高度 h_2，开始的时候，储存的能量为 Wh_1，一次弹跳损失的能量为 $W(h_1 - h_2)$，则 Q_0 为

$$Q_0 = 2\pi \frac{h_1 W}{(h_1 - h_2)W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

完美的高尔夫球可以回到原来的高度，意味着 Q_0 为无穷大，但是典型值为35。注意，在这个机械例子中，Q 是在自然响应而不是在受迫响应中计算得到的，电子电路中的 Q 也可以从自然响应中得到，这可以参见下面要讨论的式[10]和式[11]。

Q 的另一个有用的解释来自于对谐振时流过电感和电容的电流的观察，由式[5]得到

$$\mathbf{I}_{C,0} = -\mathbf{I}_{L,0} = j\omega_0 CR\mathbf{I} = jQ_0\mathbf{I} \tag{9}$$

注意，每一个电流的幅度都等于 Q_0 倍的电流源电流幅度，但是相互之间的相位相差180°。因此，当谐振频率上的2 mA 电流输入 Q_0 为50的并联谐振电路时，在电阻上得到的电流仍是2 mA，但是电容和电感上的电流却是100 mA。并联谐振电路好似电流放大器，但不是功率放大器，因为它是无源网络。

现在来分析并联谐振电路各个不同参数之间的联系。先前提到的 3 个参数 α、ω_d 和 ω_0 与自然响应相关联。而谐振的定义基本是与受迫响应相关的，因为它是用正弦稳态时的输入阻抗（纯电阻）来定义的。谐振电路的两个最重要的参数应该是谐振频率 ω_0 和品质因数 Q_0。指数衰减系数和自然谐振频率都可以用 ω_0 和 Q_0 表示：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C}$$

或者

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \tag{10}$$

和

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

或

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \tag{11}$$

阻尼系数

深入讨论有助于认识联系 ω_0 和 Q_0 的另外一个关系式。式[4]中分母的二次因式为

$$\mathbf{s}^2+\frac{1}{RC}\mathbf{s}+\frac{1}{LC}$$

用 α 和 ω_0 改写成

$$\mathbf{s}^2+2\alpha\mathbf{s}+\omega_0^2$$

在系统理论和自动控制理论领域，通常将该因式写成略微不同的形式，其中含有无量纲常数 ζ，该常数称为阻尼系数：

$$\mathbf{s}^2+2\zeta\omega_0\mathbf{s}+\omega_0^2$$

比较这两个公式，可以得到 ζ 和其他参数的关系：

$$\zeta=\frac{\alpha}{\omega_0}=\frac{1}{2Q_0} \qquad [12]$$

例题 16.1 并联谐振电路的 $L=2.5$ mH，$Q_0=5$，$C=0.01$ μF，计算 ω_0、α、ω_d 和 R 的数值。

解： 由式[2]，得到 $\omega_0=1/\sqrt{LC}=200$ krad/s，所以 $f_0=\omega_0/2\pi=31.8$ kHz。

利用式[10]可以得到 α 的值：

$$\alpha=\frac{\omega_0}{2Q_0}=\frac{2\times10^5}{(2\times5)}=2\times10^4\ \text{Np/s}$$

现在利用第9章的关系式：

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

计算可得

$$\omega_d=\sqrt{(2\times10^5)^2-(2\times10^4)^2}=199.0\ \text{krad/s}$$

最后计算并联电阻的值，由式[7]可得

$$Q_0=\omega_0RC$$

所以，

$$R=\frac{Q_0}{\omega_0C}=\frac{5}{(2\times10^5\times10^{-8})}=2.50\ \text{k}\Omega$$

练习

16.1 并联谐振电路由下列元件组成：$R=8$ kΩ，$L=50$ mH，$C=80$ nF。求：(a) ω_0; (b) Q_0; (c) ω_d; (d) α; (e) ζ。

16.2 已知并联谐振电路的 $\omega_0=1000$ rad/s，$\omega_d=998$ rad/s，以及谐振时的 $\mathbf{Y}_{in}=1$ mS，求 R，L 和 C 的值。

答案： 16.1：15.811 krad/s; 10.12; 15.792 krad/s; 781 Np/s; 0.0494。16.2：1000 Ω; 126.4 mH; 7.91 μF。

现在来解释 Q_0 与并联 RLC 电路输入导纳 $\mathbf{Y(s)}$ 的零极点之间的关系。令 ω_0 为常数，这是不难做到的，比如，保持 L 和 C 不变，调节 R 的值。当 Q_0 增加的时候，α、Q_0 和 ω_0 之间的关系表明两个零点将向 $j\omega$ 轴移动，同时也说明零点远离了 σ 轴。移动的内在本质是很清楚的，因为 $\mathbf{s}=j\omega_0$ 的点

一定位于$j\omega$轴上，而且是由中心在原点并经过零点的一条弧与正$j\omega$轴的交点，由于ω_0保持为常数，即半径为定值，所以当Q_0增加时，零点将沿着弧向正的$j\omega$轴移动。

图 16.4 画出了这两个零点，箭头显示的路径对应于R的增加。当R趋于无限时，两个零点将位于$j\omega$轴上，且为$\mathbf{s} = \pm j\omega_0$。当$R$下降时，零点沿着圆形路径往$\sigma$轴移动，直至形成$\sigma$轴上的二重零点$\mathbf{s} = -\omega_0$，此时，$R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$或者$Q_0 = \frac{1}{2}$。这个条件使我们回想起了临界阻尼的情况，即$\omega_d = 0$，$\alpha = \omega_0$。电阻$R$取更低的数值以及$Q_0$取更低的数值都将导致零点在$\sigma$轴上往相反的方向移动，只是$Q_0$值太低的谐振电路不具有典型性，所以不对此进行更深入的探讨。

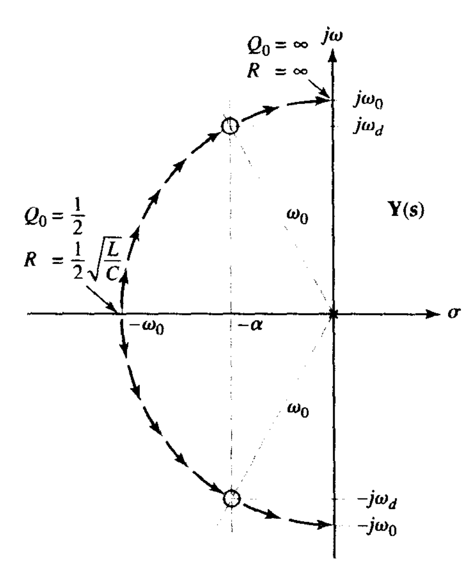


图 16.4 导纳 Y(s)位于$\mathbf{s} = -\alpha \pm j\omega_d$的两个零点，在$R$从$\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$增加到$\infty$时的半圆轨迹

$Q_0 \geqslant 5$是用来描述高Q电路的准则，当$Q_0 = 5$时，零点位于$\mathbf{s} = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$，此时的$\omega_0$和$\omega_d$只有 0.5% 的误差。

16.2 带宽和高 Q 值电路

下面继续讨论并联谐振电路的半功率频率和带宽，然后利用这些新的概念来近似得到高Q电路的响应。谐振响应曲线的"宽度"如图 16.3 所示，现在可以用Q_0来更清楚地给予定义。首先定义两个半功率频率ω_1和ω_2，在这两个频率上，并联谐振电路输入导纳的幅度是谐振幅度的$\sqrt{2}$倍。由于图16.3所示是并联谐振电路在正弦电流源作用下的端口电压随频率的变化关系，因此半功率频率点在图中位于电压响应为其最大值的$1/\sqrt{2}$（即0.707）倍的频率点上，可见与输入阻抗有相似的关系。我们将ω_1称为下半功率频率，ω_2称为上半功率频率。

说明： 之所以称为半功率带宽，原因在于谐振电压的$1/\sqrt{2}$的平方等于谐振电压的 1/2，因此，电阻所吸收的功率正好等于谐振频率的一半。

带宽

谐振电路的（半功率）带宽定义为两个半功率频率之差：

$$\mathcal{B} \equiv \omega_2 - \omega_1 \qquad [13]$$

即使实际的频响曲线从 $\omega=0$ 延伸至 $\omega=\infty$，我们还是认为带宽代表的是响应曲线的"宽度"。更确切地说，半功率带宽是在响应曲线所包含的功率占最大值的 70% 或者更高时测得的结果，如图 16.5 所示。

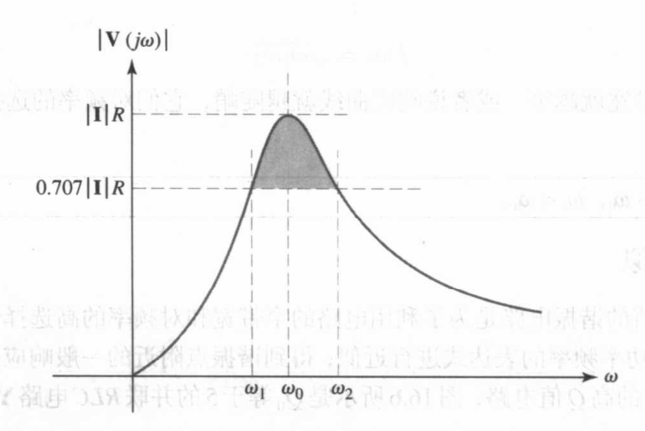


图 16.5 阴影部分表示电路响应的带宽，它代表响应曲线大于最大值 70.7% 以上的部分

现在将带宽用 Q_0 来表示。为此，先写出并联 *RLC* 电路的输入导纳的表达式：

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

用 Q_0 表示为

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}+j\frac{1}{R}\left(\frac{\omega\omega_0 CR}{\omega_0}-\frac{\omega_0 R}{\omega\omega_0 L}\right)$$

或者

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}\left[1+jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \qquad [14]$$

再次注意到谐振时导纳的幅度等于 $1/R$，为达到导纳幅度等于 $\sqrt{2}/R$ 的要求，需要选择合适的频率值，使得上式括号内的虚部等于 1，因此，

$$Q_0\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_2}\right)=1 \qquad \text{和} \qquad Q_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)=-1$$

联立求解可得

$$\omega_1=\omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}-\frac{1}{2Q_0}\right] \qquad [15]$$

$$\omega_2=\omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}+\frac{1}{2Q_0}\right] \qquad [16]$$

虽然这些表达式在某种程度上使用得不够广泛，但是二者的差却给出了非常简单的带宽表达式：

$$\mathcal{B}=\omega_2-\omega_1=\frac{\omega_0}{Q_0}$$

将式[15]与式[16]相乘，可以证明 ω_0 恰好是两个半功率频率的几何平均：

$$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$$

或

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

电路的 Q_0 值越大，带宽就越窄，或者说响应曲线就越陡峭，它们对频率的选择性就越高，或品质（因数）越高。

说明：记住，$\omega_2 > \omega_0$，$\omega_1 < \omega_0$。

高 Q 值电路的近似

设计具备高 Q_0 值的谐振电路是为了利用电路的窄带宽和对频率的高选择性。当 Q_0 大于5的时候，可以对上、下半功率频率的表达式进行近似，得到谐振点附近的一般响应表达式。任意考虑一个 Q_0 值等于或大于5的高 Q 值电路，图16.6所示是 Q_0 等于5的并联 RLC 电路 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 的零极点分布图。因为

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

所以

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

两个零点 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 的位置近似为

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{1,2} &= -\alpha \pm j\omega_d \\ &\approx -\tfrac{1}{2}\mathcal{B} \pm j\omega_0\end{aligned}$$

更进一步说，两个半功率频率（位于正的 $j\omega$ 轴上）的位置也可用以下的简洁形式表示：

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right] \approx \omega_0\left(1 \mp \frac{1}{2Q_0}\right)$$

或者

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \tfrac{1}{2}\mathcal{B} \qquad [17]$$

在高 Q 值电路中，每一个半功率频率位于距谐振频率大约一半带宽处，如图16.6所示。

将式[17]中 ω_1 和 ω_2 的近似关系式相加，便能够证明高 Q 值电路的 ω_0 其实是 ω_1 和 ω_2 的几何平均值：

$$\omega_0 \approx \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

现在直观地令测试点略高于 $j\omega$ 轴上的 $j\omega_0$，为了确定该频率下并联 RLC 网络的导纳，我们构造3个从临界频率出发指向测试点的矢量。如果测试点非常靠近 $j\omega_0$，则从极点出发的矢量近似于 $j\omega_0$，而从最低的零点出发的矢量近似于 $j2\omega_0$，因此，导纳可近似由下式给出：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx C\frac{(j2\omega_0)(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1)}{j\omega_0} \approx 2C(\mathbf{s}-\mathbf{s}_1) \qquad [18]$$

其中C是电容，如式[4]所示。为得到矢量（$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1$）的有用近似，将零点$\mathbf{s}_1$（见图 16.7）附近的s平面放大。

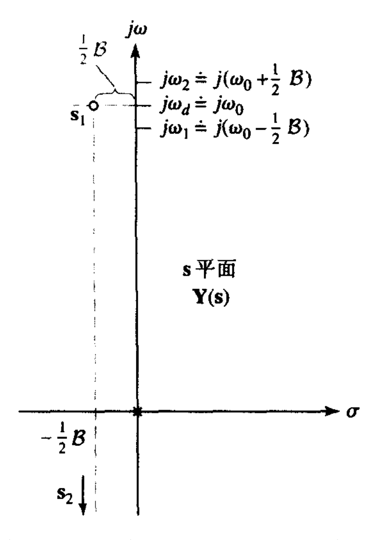


图 16.6 并联 RLC 电路的 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的零极点分布图。两个零点位于$j\omega$轴左边的距离是$\frac{1}{2}\mathcal{B}$ Np/s（或者 rad/s），距离σ轴上下约$j\omega_0$ rad/s。上、下半功率频率间的距离为$\mathcal{B}$ rad/s，每一个零点距离谐振频率和自然谐振频率约$\frac{1}{2}\mathcal{B}$ rad/s

图 16.7 高 Q_0 并联 RLC 电路的 $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ 放大的零极点分布图

采用直角分量的表示方式，可得

$$\mathbf{s}-\mathbf{s}_1 \approx \tfrac{1}{2}\mathcal{B}+j(\omega-\omega_0)$$

如果上式中的ω_0被ω_d代替，则该表达式是精确的。现在将上式代入$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的近似式（即式[18]）中并提取出因子（$\frac{1}{2}\mathcal{B}$）：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx 2C\left(\frac{1}{2}\mathcal{B}\right)\left(1+j\frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

或者

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}\left(1+j\frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}\right)$$

分式$(\omega-\omega_0)/(\frac{1}{2}\mathcal{B})$可以解释为“距离谐振频率的半带宽数”，用$N$表示，则

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}(1+jN) \qquad [19]$$

其中，

$$N=\frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}} \qquad [20]$$

对上半功率频率，$\omega_2 \approx \omega_0+\frac{1}{2}\mathcal{B}$，$N=+1$，表示距离谐振频率上方一个“半带宽数”。对下半功率频率，$\omega_1 \approx \omega_0-\frac{1}{2}\mathcal{B}$，$N=-1$，表示距离谐振频率下方一个“半带宽数”。

式[19]比起已经推导出的等式要简单得多，可以证明导纳的幅度为

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2}$$

而$\mathbf{Y}(j\omega)$的相角由N的反正切求得：

$$\text{ang } \mathbf{Y}(j\omega) \approx \arctan N$$

例题 16.2 确定并联RLC谐振网络的导纳近似值，网络参数为$R=40\text{ k}\Omega$，$L=1\text{ H}$，$C=\frac{1}{64}\mu\text{F}$，设电路的工作频率为$\omega=8.2\text{ krad/s}$。

解： ▶ **明确题目要求**

题目要求确定简单RLC网络在$\omega=8.2\text{ krad/s}$时$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的近似值。隐含条件是Q_0至少为5，工作频率离谐振频率不远。

▶ **收集已知信息**

R，L和C的值均已知，用于估算$\mathbf{Y}(\mathbf{s})$的频率也已给出，利用这些参数足以通过精确或近似的公式计算出导纳值。

▶ **设计方案**

为了应用近似表达式，首先需要确定Q_0的值（即谐振时的品质因数）以及包括带宽。

谐振频率由式[2]计算得到：$1/\sqrt{LC}=8\text{ krad/s}$，因此$Q_0=\omega_0 RC=5$，带宽为$\omega_0/Q_0=1.6\text{ krad/s}$。电路的$Q_0$值足可以满足"高$Q$值电路"的近似条件。

▶ **建立一组合适的方程**

式[19]表明：

$$\mathbf{Y}(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{R}(1+jN)$$

所以

$$|\mathbf{Y}(j\omega)| \approx \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2} \qquad \text{和} \qquad \text{ang } \mathbf{Y}(j\omega) \approx \arctan N$$

▶ **确定是否还需要其他信息**

需要参数N，确定工作频率离开谐振频率ω_0的距离：

$$N=(8.2-8)/0.8=0.25$$

▶ **尝试求解**

现在利用幅度与相位的近似关系计算网络的导纳：

$$\text{ang } \mathbf{Y} \approx \arctan 0.25 = 14.04^\circ$$

和

$$|\mathbf{Y}| \approx 25\sqrt{1+(0.25)^2} = 25.77\ \mu\text{S}$$

▶ **验证结果是否合理或是否与预计相符**

利用式[1]，可以精确求得

$$\mathbf{Y}(j8200) = 25.75\underline{/13.87^\circ}\ \mu\text{S}$$

在工作频率上用近似方法计算得到的值与精确解非常吻合（误差小于2%）。

练习

16.3 一个高Q值并联谐振电路的$f_0 = 440$ Hz，$Q_0 = 6$，利用式[15]和式[16]，求下列精确值：(a)f_1；(b)f_2。利用式[17]计算下列近似值：(c)f_1；(d)f_2。

答案：404.9 Hz；478.2 Hz；403.3 Hz；476.7 Hz。

我们已经得到高Q值电路在谐振频率附近的近似表达式，这里将高Q值默认为$Q_0 \geqslant 5$，但是，多近才称得上是"附近"呢？可以证明当$0.9\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1.1\omega_0$时，电路的$Q_0 \geqslant 5$，幅度和相位的误差低于5%。虽然这段带宽看起来很窄，但在大多数情况下，这已经足够包含感兴趣的频率范围了。比如，收音机AM波段通常包含谐振频率是455 kHz、带宽是10 kHz的调谐电路。该电路的Q_0值需达到45.5，半功率频率分别为450 kHz和460 kHz。在409.5~500.5 kHz的频率范围内做近似都是可行的（误差低于5%），该频段基本包含了频率曲线的所有峰值部分，只在响应曲线远端的"尾部"做近似时，会引起较大的误差[①]。

下面将有关并联谐振电路的一些重要结论总结如下：

- 谐振频率ω_0是在输入导纳的虚部等于零或相角等于零时得到的频率。对并联电路，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。
- 反映电路品质的参数Q_0定义为2π乘以电路储存的最大能量与一个周期内电路损耗的总能量之比。对并联电路，$Q_0 = \omega_0 RC$。
- 定义两个半功率频率——ω_1和ω_2，在这两个频率上，导纳的幅度等于最小值的 倍。（对应电压响应曲线，这两个频率上的电压响应是最大值响应的70.7%。）
- ω_1和ω_2的精确表达式为

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

- ω_1和ω_2的近似（高Q_0值电路）表达式为

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- 半功率带宽由下式给出：

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- 高Q值电路的输入导纳可近似表示为

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1 + jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1 + N^2} \underline{/\arctan N}$$

其中，N被称为距离谐振的"半带宽数"：

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

当$0.9\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1.1\omega_0$时，上式有效。



① 对远离谐振的频率，结果一般都比较粗糙，但还是令人满意的，因为并不总是需要精确的结果。

16.3　串联谐振

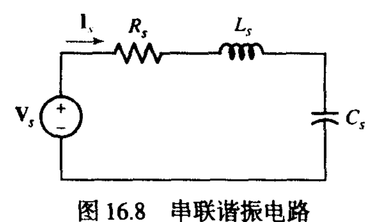


图 16.8　串联谐振电路

尽管串联谐振没有并联谐振有用，但是仍然值得关注。考虑图 16.8 所示的电路，注意，图中元件暂时用下标 s（串联）加以标注，以免与并联电路进行比较时引起混淆。

对并联电路的讨论分为两部分。现在对串联电路进行同样的处理，但是，没有必要重复每一个步骤，只需采用对偶的概念即可。为简单起见，我们将注意力集中在并联谐振电路讨论的最后一个段落，其中有一些重要的结论。我们利用对偶语言把这一些重要结论转换为适用于串联 *RLC* 电路的结论。

说明： 这一段内容与 16.2 节的最后一段相同，采用对偶语言，可以将并联 *RLC* 电路转换成串联 *RLC* 电路（故而下文使用了引号）。

"对前面得到的结论做一个回顾，总结出串联谐振电路的结果如下：

- 谐振频率 ω_0 是在输入阻抗的虚部等于零或者相角等于零时得到的频率。对串联电路，$\omega_0 = 1/\sqrt{C_s L_s}$。
- 反映电路品质的参数 Q_0 定义为 2π 乘以电路储存的最大能量与一个周期内电路损耗的总能量之比，对串联电路，$Q_0 = \omega_0 L_s/R_s$。
- 定义两个半功率频率——ω_1 和 ω_2，在这两个频率上，阻抗的幅度等于最小值的 $\sqrt{2}$ 倍。（对应电流响应曲线，这两个频率上的电流响应是最大值响应的 70.7%。）
- ω_1 和 ω_2 的精确表达式为

$$\omega_{1,2} = \omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0}\right]$$

- ω_1 和 ω_2 的近似（高 Q_0 值电路）表达式为

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}\mathcal{B}$$

- 半功率带宽由下式给出：

$$\mathcal{B} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

- 高 Q 值电路的输入导纳可近似表示为

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{R}(1+jN) = \frac{1}{R}\sqrt{1+N^2}\underline{/\arctan N}$$

其中，N 被定为距离谐振的"半带宽数"：

$$N = \frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

当 $0.9\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1.1\omega_0$ 时，上式有效。"

至此不再需要对串联电路用下标 s 进行标注了（除非需要更清楚地表示）。

例题16.3 电压源 $v_s = 100\cos\omega t$ mV是串联谐振电路的输入，谐振电路由10 Ω电阻、200 nF电容和2 mH电感组成。利用精确解法和近似解法求 $\omega = 48$ krad/s的电流幅度。

解： 电路的谐振频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2\times10^{-3})(200\times10^{-9})}} = 50\ \text{krad/s}$$

由于工作频率 $\omega = 48$ krad/s，它在谐振频率的10%范围内，因此有理由应用近似关系估算网络的等效阻抗，条件是电路具有高 Q 值。

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\underline{/\arctan N}$$

其中，N 在 Q_0 确定后可以计算得到。这是串联电路，所以，

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50\times10^3)(2\times10^{-3})}{10} = 10$$

该电路可以作为高 Q 值电路考虑：

$$\mathcal{B} = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50\times10^3}{10} = 5\ \text{krad/s}$$

因此，距离谐振频率的“半带宽数”（N）为

$$N = \frac{\omega-\omega_0}{\mathcal{B}/2} = \frac{48-50}{2.5} = -0.8$$

所以，

$$\mathbf{Z}_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2}\underline{/\arctan N} = 12.81\underline{/-38.66^\circ}\ \Omega$$

电流幅度的近似值为

$$\frac{|\mathbf{V}_s|}{|\mathbf{Z}_{eq}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806\ \text{mA}$$

利用精确表达式可得 $\mathbf{I} = 7.746\underline{/39.24^\circ}$ mA，因此，

$$|\mathbf{I}| = 7.746\ \text{mA}$$

练习

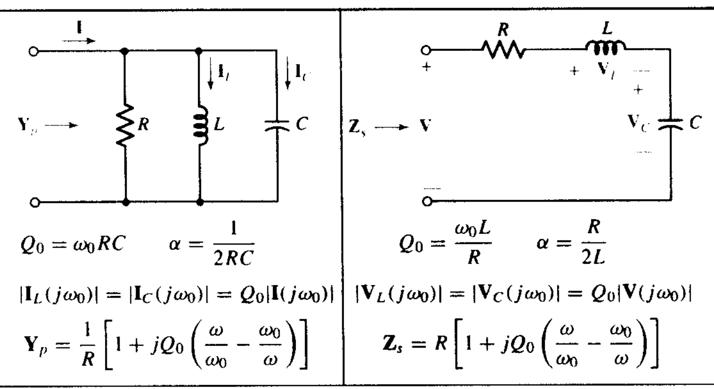
16.4 串联谐振电路的带宽为100 Hz，含有一个20 mH的电感和一个2 μF的电容，确定：(a) f_0；(b) Q_0；(c) 谐振时的 $\mathbf{Z}_{in}$；(d) f_2。

答案：796 Hz；7.96；12.57 + j0 Ω；846 Hz（近似）。

串联谐振电路具有最小的谐振阻抗，而并联谐振电路则具有最大的谐振阻抗。后者提供的谐振时电感电流和电容电流将达到电源电流幅度的 Q_0 倍，而串联谐振电路提供的电感电压和电容电压幅度将达到电源电压幅度的 Q_{0s} 倍。串联电路谐振时具有电压放大能力。

串联和并联谐振电路的结果比较、近似等式以及精确表达式均总结在表16.1中。


表 16.1 谐振特性的简要总结



并联	串联
$Q_0=\omega_0 RC \qquad \alpha=\frac{1}{2RC}$	$Q_0=\frac{\omega_0 L}{R} \qquad \alpha=\frac{R}{2L}$
$\lvert\mathbf{I}_L(j\omega_0)\rvert=\lvert\mathbf{I}_C(j\omega_0)\rvert=Q_0\lvert\mathbf{I}(j\omega_0)\rvert$	$\lvert\mathbf{V}_L(j\omega_0)\rvert=\lvert\mathbf{V}_C(j\omega_0)\rvert=Q_0\lvert\mathbf{V}(j\omega_0)\rvert$
$\mathbf{Y}_p=\frac{1}{R}\left[1+jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$	$\mathbf{Z}_s=R\left[1+jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

精确表达式

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\omega_1\omega_2}$$

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}$$

$$\omega_{1,2}=\omega_0\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2}\mp\frac{1}{2Q_0}\right]$$

$$N=\frac{\omega-\omega_0}{\frac{1}{2}\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B}=\omega_2-\omega_1=\frac{\omega_0}{Q_0}=2\alpha$$

近似表达式

$$(Q_0\geqslant 5 \qquad 0.9\omega_0\leqslant\omega\leqslant 1.1\omega_0)$$

$$\omega_d\approx\omega_0$$

$$\omega_{1,2}\approx\omega_0\mp\tfrac{1}{2}\mathcal{B}$$

$$\omega_0\approx\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$$

$$\mathbf{Y}_p\approx\frac{\sqrt{1+N^2}}{R}\underline{/\arctan N}$$

$$\mathbf{Z}_s\approx R\sqrt{1+N^2}\,\underline{/\arctan N}$$

16.4 其他谐振形式

前面两节讨论的串联和并联 RLC 谐振电路代表理想化的电路，是对实际物理电路的近似，其实际用途不大。实际物理电路一般由线圈、碳电阻和钽电容构成串联或并联的形式。实际电路与近似电路在精确度上的差别主要取决于电路工作时的频率、电路的 Q 值、物理元件的材料、元件的尺寸和其他因素。现在我们讨论如何确定给定物理电路的最佳模型的方法，这需要借助于电磁场理论和材料性质的相关知识，我们所关心的问题仍然是降低模型的复杂度，使之退化为我们熟悉的两个简单模型之一。

图 16.9(a)所示是一个实际电感、电阻和电容并联构成的相对来说比较精确的模型。R_1 是一个假想的电阻，代表线圈的热损耗、铁芯损耗以及辐射损耗所折合成的电阻。电容的电介质损耗以及电路原有的电阻都包含在 R_2 电阻中。对于这个模型，无法通过元件合并使其在任何频率上与原始

模型等效。然而可以看到，如果工作频率限制在某个频带以内，则可以得到一个比较简单的等效模型，而且，这个频带足以包含所有感兴趣的频率。网络的等效模型如图16.9(b)所示。

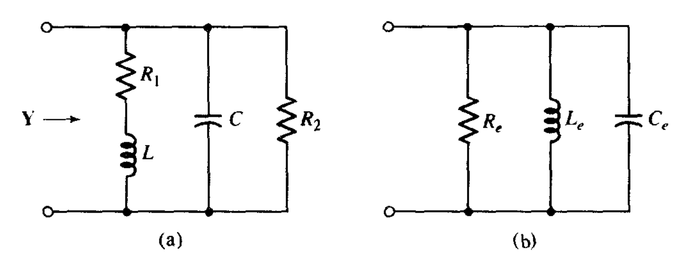


图16.9 (a)由实际电感、电容和电阻并联组成的网络模型；(b)在很窄的频率范围内与(a)等效的网络

在分析这个等效电路之前，首先考虑给定的图16.9(a)所示的电路。尽管R_1电阻的值很小，使得电路的谐振频率很接近$1/\sqrt{LC}$，但是不等于$1/\sqrt{LC}$，然而谐振频率的定义不变，因此仍然令输入导纳的虚部等于零，从而可得

$$\text{Im}\{\mathbf{Y}(j\omega)\} = \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right\} = 0$$

或者

$$\text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L}\right\}$$

$$= \text{Im}\left\{\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right\} = 0$$

所以，谐振条件为

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

即

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2} \qquad [21]$$

注意，ω_0小于$1/\sqrt{LC}$，而且比值R_1/L越小，ω_0与$1/\sqrt{LC}$的差别就越小。

输入阻抗的最大幅度同样值得关注。其值不等于R_2，也不在谐振频率ω_0（或者在$1/\sqrt{LC}$）上获得。这里不对此结论进行证明，因为代数表达式相当烦琐，但是结论却很直观。下面给出一个具体的数值例题。

例题16.4 设图16.9(a)所示电路的元件参数为$R_1 = 2\ \Omega$，$L = 1$ H，$C = 125$ mF，$R_2 = 3\ \Omega$，确定谐振频率和谐振时的阻抗值。

解： 将数值代入式[21]，得到

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

利用该值可以计算输入导纳：

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3} + j2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2 + j(2)(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.583 \text{ S}$$

因此，谐振时的阻抗值为

$$\mathbf{Z}(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714\ \Omega$$

当 R_1 等于零时，得到谐振频率为

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83\ \text{rad/s}$$

输入阻抗为

$$\mathbf{Z}(j2.83) = 1.947\underline{/-13.26^\circ}\ \Omega$$

如图 16.10 所示，出现阻抗幅度最大值时的频率标记为 ω_m，可知 $\omega_m = 3.26$ rad/s，阻抗幅度的最大值为

$$\mathbf{Z}(j3.26) = 1.980\underline{/-21.4^\circ}\ \Omega$$

谐振时的阻抗幅度值与阻抗幅度最大值之间有16%的误差，尽管实际应用中可以忽略误差，但考试时是不能忽略这么大的误差的。本节后面将证明电感－电阻组合在 2 rad/s 的 Q 值等于 1，如此低的数值才导致了 16% 的误差。

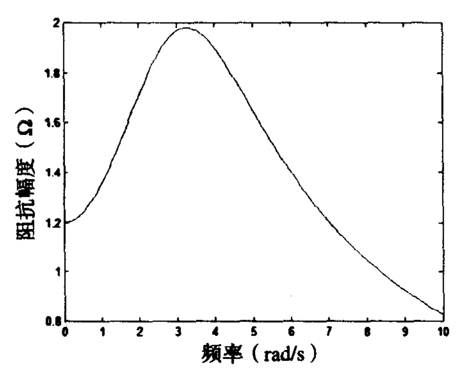


图 16.10　使用下面的 MATLAB 语句画出的 |Z| 随 ω 变化的曲线：

```
EDU>>omega = linspace(0,10,100);
EDU>>for i = 1:100
Y(i) = 1/3+j*omega(i)/8+1/(2+j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU>>plot(omega,abs(Z));
EDU>>xlabel('frequency(rad/s)');
EDU>>ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

练习

16.5　参见图 16.9(a)所示的电路，设 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 2.533$ pF，确定电感的值，使得谐振频率等于 1 MHz。（提示：注意 $\omega = 2\pi f$。）

答案：10 mH。

串联和并联组合的等效

为了把给定的图 16.9(a)所示的电路转换成图 16.9(b)所示的形式，需要对电阻和电抗的串联及并联组合的 Q 值进行讨论。首先考虑图 16.11(a)所示的电路。Q 值的定义仍然为 2π 乘以最大储能和

一个周期内耗能的比值，但是Q值可以在任何工作频率上通过计算得到。换句话说，Q是ω的函数。我们肯定要选择一个计算频率，这个频率显然是网络的谐振频率，然后计算出串联部分的Q值，然而，在给出完整电路之前，这个Q值是未知的。我们鼓励读者自己证明串联支路的Q值为$|X_s|/R_s$，而图16.11(b)所示的并联网络的Q值为$R_p/|X_p|$。

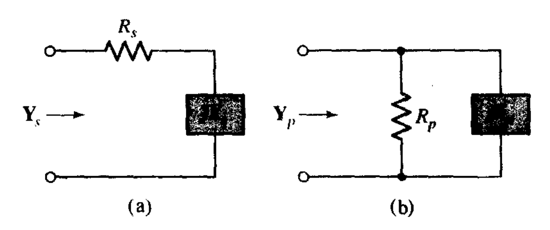


图16.11 (a)由电阻R_s和感性或容性电抗X_s组成的串联网络在某一指定频率下使得$\mathbf{Y}_s = \mathbf{Y}_p$，则可以转换完成；(b)所示的并联网络

现在详细推导必要的R_p值和X_p值，以便使图16.11(b)所示的并联网络与图16.11(a)所示的串联网络在某些单个频率点上等效。令$\mathbf{Y}_s$和$\mathbf{Y}_p$相等：

$$\mathbf{Y}_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

$$= \mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

得到

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

两式相除，得到

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

它要求串联和并联网络的Q必须相等：

$$Q_p = Q_s = Q$$

因此，变换等式可以简化为

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \qquad [22]$$

$$X_p = X_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \qquad [23]$$

当R_p和X_p给定时，就可以求得R_s和X_s。该变换是双向的。

如果$Q \geqslant 5$，采用近似关系式带来的误差非常小：

$$R_p \approx Q^2 R_s \qquad [24]$$

$$X_p \approx X_s \qquad (C_p \approx C_s \quad 或 \quad L_p \approx L_s) \qquad [25]$$

例题16.5 求100 mH电感和5 Ω电阻的串联组合的并联等效形式，工作频率为1000 rad/s。与串联组合相连的其他网络结构未知。

解： 在 $\omega = 1000$ rad/s 的频率上，$X_s = 1000(100 \times 10^{-3}) = 100\ \Omega$。该串联组合的 Q 值为

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

由于 Q 值相当大（20 远大于 5），我们采用式[24]和式[25]，得到

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000\ \Omega \qquad \text{和} \qquad L_p \approx L_s = 100\ \text{mH}$$

可以这样说，100 mH 电感和 5 Ω 电阻在 1000 rad/s 的频率上串联与 100 mH 电感和 2000 Ω 电阻的并联在本质上具有相同的输入阻抗。

为了验证该等效是否正确，计算每一个网络在 1000 rad/s 时的输入阻抗，可得

$$\mathbf{Z}_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9\underline{/87.1^\circ}\ \Omega$$

可见，在转换频率上的近似计算，其结果的精确性相当高。900 rad/s 频率上的精度也很高，因为，

$$\mathbf{Z}_s(j900) = 90.1\underline{/86.8^\circ}\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_p(j900) = 89.9\underline{/87.4^\circ}\ \Omega$$

练习

16.6 在 $\omega = 1000$ rad/s 的频率上，求图 16.12(a)所示串联组合的并联等效形式。

16.7 求图 16.12(b)所示的并联组合的串联等效形式，假设 $\omega = 1000$ rad/s。

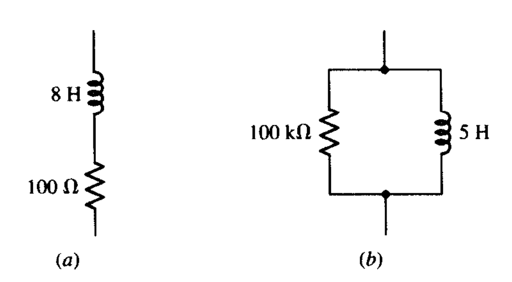


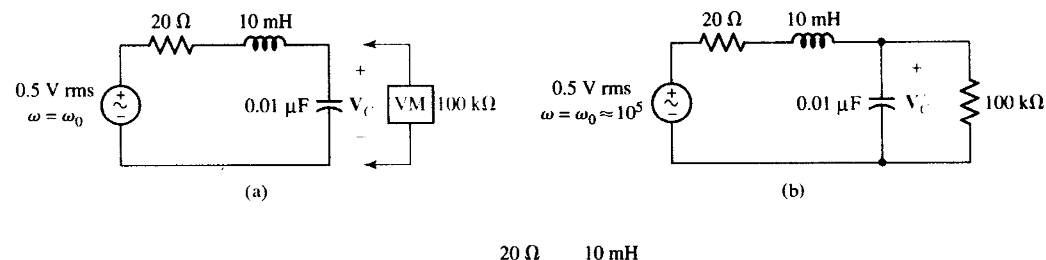
图 16.12 (a) 串联网络需要等效为并联网络（在 $\omega = 1000$ rad/s 时）；
(b) 并联网络需要等效为串联网络（在 $\omega = 1000$ rad/s 时）

答案： 16.6：8 H，640 kΩ；16.7：5 H，250 Ω。

说明：“理想”电表是指对测量电路不会带来任何干扰的用于测量具体物理量的仪器。虽然不太可能，但是现代测量仪器在这方面已经非常接近理想特性了。

作为进行 RLC 串联或者并联转换的更复杂的谐振电路例子，在使用电子仪器时需要考虑这类问题。图 16.13(a)所示的简单串联 RLC 网络由正弦电压源激励，电源的频率为网络的谐振频率。电源的有效值（rms）是 0.5 V，我们希望用内阻为 100 000 Ω 的电子电压表（VM）测量电容两端的电压，也就是说，电压表可以用一个理想电压表和一个 100 kΩ 的并联组合等效表示。

在电压表接入之前，计算得到的谐振频率为 10^5 rad/s，$Q_0 = 50$，电流是 25 mA，电容的有效值电压为 25 V。（如同 16.3 节最后所述：电压等于输入电压的 Q_0 倍。）因此，假如电压表是理想的，则测量得到电容电压的读数为 25 V。



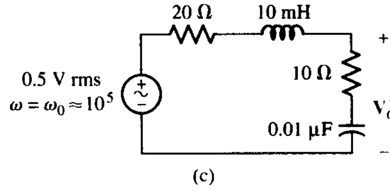


图 16.13 (a) 用非理想的电子电压表测量给定串联谐振电路的电容电压；(b) 考虑电压表影响因素的电路，电压表读数为$\mathbf{V}'_C$；(c) (b) 中的并联 *RC* 网络在频率为10^5 rad/s时被其等效的*RC*串联网络代替，从而得到串联谐振电路

然而，当接入实际电压表后，电路为如图16.13(b)所示。为得到串联*RLC*的电路形式，需要将并联*RC*网络转换成串联*RC*网络。假设*RC*网络的Q值足够大，以至于串联电容与给定的并联电容相等。这样做的目的是为了接近最终串联*RLC*电路的谐振频率。所以，假如串联*RLC*电路也含有0.01 μF的电容，则谐振频率仍然维持10^5 rad/s不变。我们需要知道估算出来的谐振频率，以便计算并联*RC*网络的Q值，即

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5(10^5)(10^{-8}) = 100$$

由于该值远大于5，因此验证了前面的循环假定，所以等效串联*RC*网络包含的电容$C_s = 0.01\ \mu\text{F}$，电阻为

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10\ \Omega$$

从而得到图16.13(c)所示的等效电路。现在电路的Q值只有33.3，因而图16.13(c)所示电路中电容两端的电压为$16\frac{2}{3}$ V。当然，我们要得到跨接在*RC*组合两端的$|\mathbf{V}'_C|$，所以，

$$|\mathbf{V}'_C| = \frac{0.5}{30}|10 - j1000| = 16.67\ \text{V}$$

电容电压与$|\mathbf{V}'_C|$基本相等，因为10 Ω电阻上的压降很小。

最后的结论是：即使最好的电压表也会对高Q值电路产生严重的影响。相同的效应也会出现在电路中串接安培表进行测量的时候。

下面用一个与技术有关的故事结束本节。

从前有个叫Sean的学生，他的教授是Dr. Abel。一天下午，Dr. Abel给了Sean 3个元器件：一个电阻、一个电感和一个电容，其标称值分别为20 Ω，20 mH和1 μF。要求把这3个元件串联到一个频率可变的电压源，测量电阻两端随频率变化的电压，然后计算谐振频率的数值、谐振时的Q值和半功率带宽。在测量之前，要求先预测实验结果。

有时，在进行电路分析时操之过急会打乱正常、清晰的思维过程，Sean为此画出的等效电路如图16.14所示，计算得到

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

接下来，Sean 测量了 Dr. Abel 要求的参数，并与预测值进行了比较，此时 Sean 强烈感觉到应该转学到商业学校去，因为他得到的测量结果为

$$f_0 = 1000 \text{ Hz} \qquad Q_0 = 0.625 \qquad \mathcal{B} = 1600 \text{ Hz}$$

Sean 知道如此大的差异绝对不在"工程允许的误差之内"，也不会是因为"电表误差"造成的，不过，他还是沮丧地把结果交给了教授。

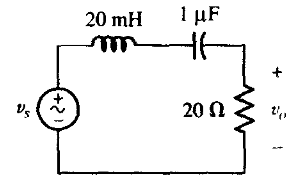


图 16.14 一个 20 mH 的电感、1 μF 的电容和 20 Ω 的电阻串联后接至电压源，这是第一个电路模型

Dr. Abel 了解以前学生们做判断时许多容易犯的错误，其中有些甚至（可能）是人为的，所以，Dr. Abel 微笑着告诉 Sean，注意 Q 表（或者叫阻抗桥），大多数装备良好的实验室都配备 Q 表，不妨用 Q 表去测量谐振频率附近的频率，比如 1000 Hz 处元件的值。

Sean 照样做了，他发现测量得到的电阻值是 18 Ω，电感是 21.4 mH，Q 是 1.2，而电容的值是 1.41 μF，损耗系数（Q 值的倒数）是 0.123。

学工程的大学生内心总有一种股追根溯源的劲头，Sean 认为实际电感的模型应该是 21.4 mH 的电感，它与 $\omega L/Q = 112\ \Omega$ 的电阻串联，而电容的合适模型应该是 1.41 μF，它与 $1/\omega C\, Q = 13.9\ \Omega$ 的电阻并联。利用现在的数据，Sean 重新画出了图 16.15 所示的电路模型，从而计算出一组新的预测值：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$\mathcal{B} = 916/0.856 = 1070 \text{ Hz}$$

看到现在的结果和测量值已经相当接近，Sean 自然非常高兴，但是，Dr. Abel 对细节的要求也很严格，他对存在于 Q_0 与带宽的预测值和测量值之间的差异仔细思考后，问道："你考虑过电压源的输出阻抗了吗？""没有。"Sean 回答，然后一路小跑地坐回到实验室的板凳上。

证实了电源的输出阻抗为 50 Ω 后，Sean 便在电路图中加入了这个值，从而得到了图 16.16 所示的电路。利用新的等效电阻值 193.9 Ω 修正后的 Q_0 值和 $\mathcal{B}$ 值为

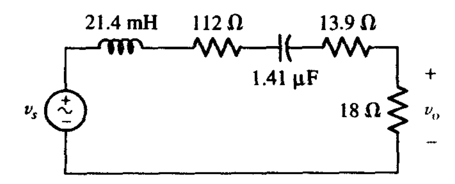


图 16.15 改进后的模型元件的值更精确，并且考虑了电感和电容的损耗

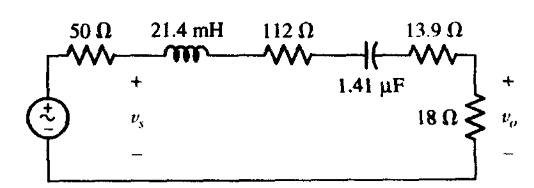


图 16.16 考虑了电压源输出电阻的最终电路模型

$$Q_0 = 0.635 \qquad B = 1442\ \text{Hz}$$

现在理论值和测量值之间的误差已经在 10% 以内了，Sean 又恢复了以往的热情和自信，他早早地做完了作业，并在上课之前预习了课本上的内容。Dr. Abel 欣然点头，并教导说：

当使用实际设备时，
仔细观察所选择的模型；
在计算之前仔细思考，
别忘了 Z 和 Q。

练习

16.8 串联组合 10 Ω 电阻和 10 nF 电容与另一个串联组合 20 Ω 电阻和 10 mH 电感相并联。(a) 求并联网络的近似谐振频率；(b) 求 *RC* 支路的 *Q* 值；(c) 求 *RL* 支路的 *Q* 值；(d) 求与原网络等效的 3 个元件值。

答案：10^5 rad/s；100；50；10 nF‖10 mH‖33.3 kΩ。

16.5 缩放

在所求解的例题和习题中，有些电路含有的无源元件的值为几个欧姆、几个亨利或几个法拉，得到的谐振频率也就几个弧度每秒，采用这些参数并不是因为实际使用时它们就是这样的数值，而是因为在计算过程中不必处理 10 的幂次方运算，因此计算起来比较简单。本节要讨论的缩放处理在对包含实际尺寸的网络进行分析时只需对元件值进行缩放，从而给计算带来了方便。需要讨论的缩放包括幅度缩放和频率缩放。

说明：回想一下，"纵坐标"指的是垂直坐标，"横坐标"指的是水平坐标。

以如图16.17(a)所示的并联谐振电路为例。用非实际尺寸得到的响应曲线如图16.17(b)所示，最大阻抗值为 2.5 Ω，谐振频率是 1 rad/s，Q_0 等于 5，半功率带宽为 0.2 rad/s。这些参数更像某些机械系统的电模拟特性参数，而不像任何基本电子设备的参数。计算时采用这些参数非常方便，但它们不是构造电路的实际参数。

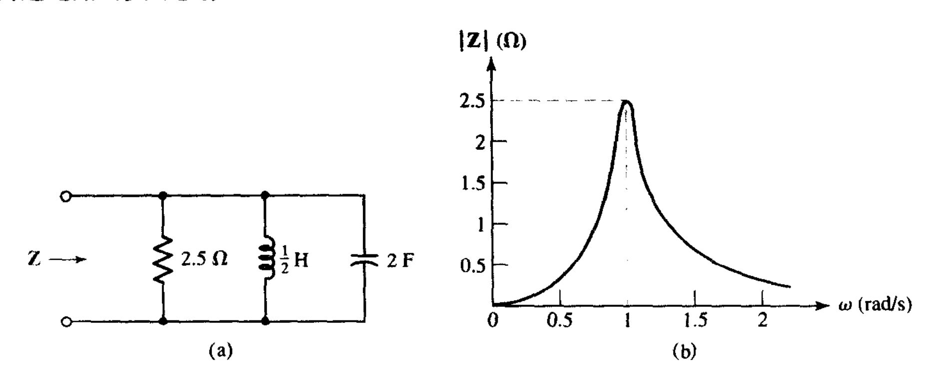


图 16.17 (a) 用于说明幅度和频率缩放的并联谐振电路；(b) 输入阻抗的幅度和频率之间的关系曲线

假设我们的目标是按照某种方法对网络进行缩放，使得谐振时的阻抗最大值为5000 Ω，谐振频率为 5×10^6 rad/s 或 796 kHz。换句话说，即采用图 16.17(b)所示的响应曲线，只是纵坐标尺度扩大了2000倍，横坐标尺度扩大了 5×10^6 倍。这里要处理两个问题：(1) 幅度的缩放因子是2000；(2)频率的缩放因子是 5×10^6。

幅度缩放定义为这样一个过程：二端口网络的阻抗放大 K_m 倍，但频率维持不变。这里的因子 K_m 是正实数，可以大于1，也可以小于1。另一种更简短的表述是“网络在幅度上的缩放因子是2”，这句话表示新网络的阻抗在任何频率上都是原来网络的两倍。接下来确定如何对每一类无源元件进行缩放。为使网络的输入阻抗增大 K_m 倍，可以令网络的每一个元件值也缩放相同的倍数，即电阻 R 用 $K_m R$ 代替，每个电感在任何频率上所呈现的阻抗是原来的 K_m 倍，为此，在维持s不变的情况下，阻抗 sL 被增大 K_m 倍，即 L 被 $K_m L$ 取代。同样，每个电容要被 C/K_m 代替。总之，这些变化产生的网络的元件幅度缩放的因子为 K_m：

$$\left.\begin{aligned} R &\to K_m R \\ L &\to K_m L \\ C &\to \frac{C}{K_m} \end{aligned}\right\} \text{幅度缩放}$$

当图 16.17(a)中所有元件的幅度乘以缩放因子2000后，得到的网络如图 16.18(a)所示。频率响应曲线如图16.18(b)所示，它表明除了纵坐标有尺度缩放之外，不需要对原来的响应曲线进行任何改变。

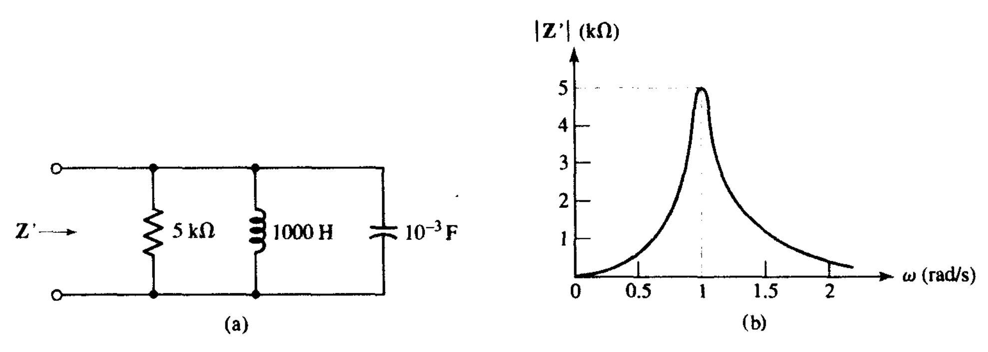
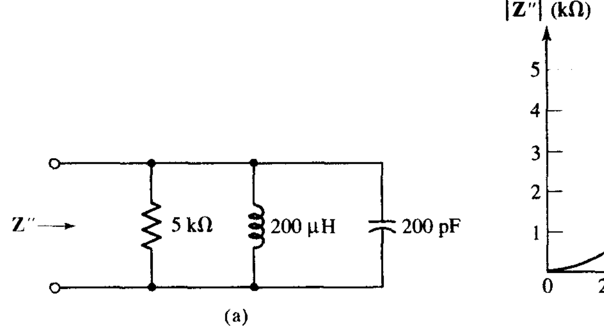


图 16.18 (a) 对图 16.17(a)所示电路的幅度进行 $K_m = 2000$ 缩放后的网络；(b) 相应的响应曲线

现在讨论新网络在频率上的缩放。定义频率的缩放过程如下：保持阻抗值不变，将阻抗值对应的频率乘以因子 K_f。再一次采用“网络在频率上的缩放因子是2”这种表达方法，它表明新网络在频率增大两倍时得到与原网络相同的阻抗。频率缩放伴随着每一个无源元件在频率上的缩放，显然，电阻值不会受到影响，当频率增大为 K_f 倍时，任何等于 sL 的电感阻抗的电感必须由 L/K_f 的电感取代；同样，电容 C 将被 C/K_f 代替。因此，若网络的频率缩放 K_f 倍，则意味着每个无源元件的参数值变为

$$\left.\begin{aligned} R &\to R \\ L &\to \frac{L}{K_f} \\ C &\to \frac{C}{K_f} \end{aligned}\right\} \text{频率缩放}$$

当图 16.18(a)所示的幅度缩放后对每个元件以因子 5×10^6 再进行频率缩放时，可得到图 16.19(a)所示的网络。相应的频率响应曲线如图 16.19(b)所示。



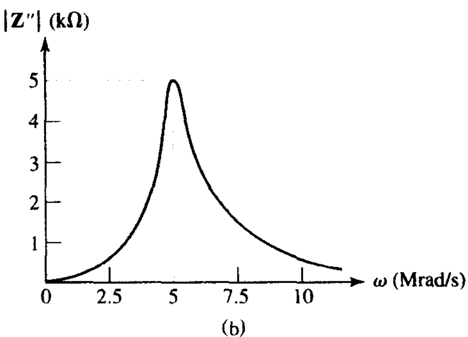


图 16.19 (a) 图 16.18 所示电路进行频率 $K_f = 5 \times 10^6$ 缩放后的网络；(b) 相应的响应曲线

最后这个网络中的电路元件值才是实际物理电路中得到的参数。该网络是真实的、可测试的。它表明如果图16.17(a)所示的原始网络确实是一些机械谐振系统的模拟，则可以对模拟的参数进行幅度和频率缩放，以期实现在实验室中能够构造的网络。由于测试机械系统相对于缩放了的电子系统来说花费既大而且还不方便，所以可对缩放了的电子系统的测量结果进行"反缩放"并转换回机械系统的单位，以便于完成分析。

以s为变量的阻抗函数同样可以在对幅度和频率进行缩放，哪怕不清楚组成二端口网络的究竟是哪些元件，也可以进行缩放。为了对幅度进行 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ 缩放，只需将 $\mathbf{Z}(\mathbf{s})$ 乘以 K_m 便可得到经过幅度缩放的阻抗。因此，如图 16.17(a)所示的并联谐振电路的阻抗为

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{s}^2 + 0.4\mathbf{s} + 2}$$

或者

$$\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \frac{0.5\mathbf{s}}{(\mathbf{s} + 0.1 + j0.995)(\mathbf{s} + 0.1 - j0.995)}$$

经过幅度缩放的网络阻抗 $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ 为

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{s}) = K_m \mathbf{Z}(\mathbf{s})$$

如果还是选择 $K_m = 2000$，则

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{s}) = (1000)\frac{\mathbf{s}}{(\mathbf{s} + 0.1 + j0.995)(\mathbf{s} + 0.1 - j0.995)}$$

假如现在 $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ 要以 5×10^6 进行频率缩放，则要求 $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ 在任何频率上的值要与 $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$ 在频率乘以 K_f 之后得到的值相等。动动脑筋，不难得到下面用函数表述的结论：

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = \mathbf{Z}'\left(\frac{\mathbf{s}}{K_f}\right)$$

注意，在 $\mathbf{Z}'(\mathbf{s})$ 中将每一个 s 用 $\mathbf{s}/K_f$ 代替即可得到 $\mathbf{Z}''(\mathbf{s})$。对图 16.19(a)所示的网络阻抗进行分析后的表达式一定为

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = (1000)\frac{\mathbf{s}/(5 \times 10^6)}{[\mathbf{s}/(5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][\mathbf{s}/(5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

或者

$$\mathbf{Z}''(\mathbf{s}) = (1000)\frac{(5 \times 10^6)\mathbf{s}}{[\mathbf{s} + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][\mathbf{s} + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

虽然通常只对无源元件进行缩放，但是受控源也可以进行幅度和频率缩放。假设任何源的输出都具有 $k_x v_x$ 或者 $k_y i_y$ 的形式，其中 k_x 对受控电流源具有导纳的量纲，对受控电压源没有量纲，而 k_y 对受控电压源具有欧姆的量纲，对受控电流源则没有量纲。如果对包含受控源的网络缩放 K_m，那么只需要处理 k_x 和 k_y。我们把它们看成与其量纲相应的某种类型的元件，也就是说，如果 k_x（或 k_y）无量纲，则其值不变；如果具有导纳量纲，则应除以 K_m；如果是阻抗，则应乘以 K_m。频率缩放对受控源没有影响。

例题 16.6 对图 16.20 所示的网络进行 $K_m = 20$ 和 $K_f = 50$ 的缩放，然后求缩放后网络的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$。

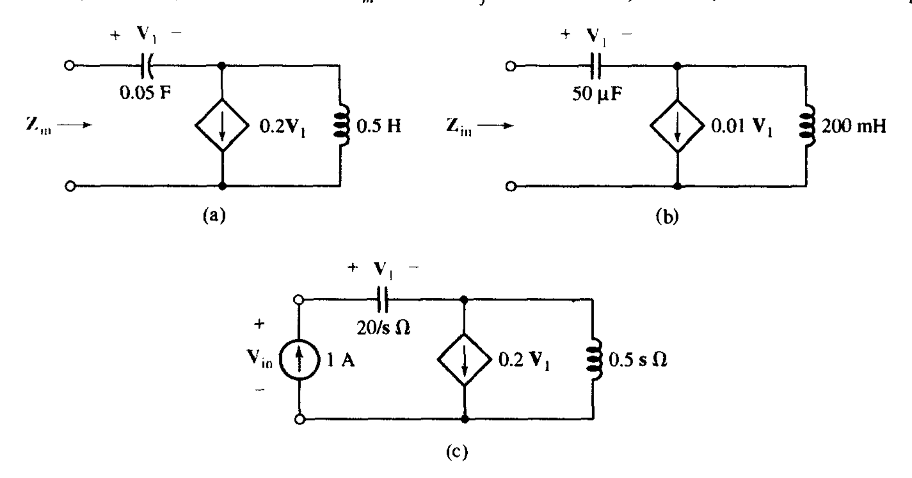


图 16.20 (a) 需要进行因数为 20 的幅度缩放和因数为 50 的频率缩放的网络；(b) 缩放后的网络；(c) 加在网络输入端的 1 A 的测试电源，用于获得未缩放的 a 网络的输入阻抗

解： 电容幅度的缩放过程是 0.05 F 除以缩放因子 $K_m = 20$，频率缩放的过程是除以缩放因子 $K_f = 50$，同时完成这两步操作：

$$C_{\text{scaled}} = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50\,\mu\text{F}$$

电感同样可以缩放成

$$L_{\text{scaled}} = \frac{(20)0.5}{50} = 200\text{ mH}$$

对受控源的缩放只需考虑幅度，因为频率缩放对受控源没有影响。由于这是一个电压控制的电流源，系数 0.2 的单位是 A/V 或者 S，具有导纳的量纲，因此需要除以缩放因子 K_m，因此，新的一项为 $0.01\mathbf{V}_1$，由此得到的（缩放后的）网络如图 16.20(b)所示。

为求解新网络的阻抗，需要在输入端接入一个 1 A 的测试电源，对两个电路进行分析，首先求图 16.20(a)所示的未缩放网络的阻抗，然后对所得结果进行缩放。

参考图 16.20(c)：

$$\mathbf{V}_{in} = \mathbf{V}_1 + 0.5\mathbf{s}(1 - 0.2\mathbf{V}_1)$$

且

$$\mathbf{V}_1 = \frac{20}{\mathbf{s}}(1)$$

进行变量代换及代数处理，得到

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{1} = \frac{\mathbf{s}^2 - 4\mathbf{s} + 40}{2\mathbf{s}}$$

将结果缩放成与图16.20(b)所示相应的值，缩放因子为$K_m = 20$，s需用$\mathbf{s}/\mathbf{K}_f = \mathbf{s}/50$代替，因此，

$$\mathbf{Z}_{\text{in}_{\text{scaled}}} = \frac{0.2\mathbf{s}^2 - 40\mathbf{s} + 20\,000}{\mathbf{s}}\ \Omega$$

练习

16.9 并联谐振电路的特性为$C = 0.01$ F，$\mathcal{B} = 2.5$ rad/s，$\omega_0 = 20$ rad/s。当网络按照下列要求缩放时，求R和L的值：(a) 幅度以800的缩放因子进行缩放；(b) 频率以10^4的缩放因子进行缩放；(c) 幅度以800的缩放因子进行缩放，同时频率以10^4的缩放因子进行缩放。

答案：32 kΩ，200 H；40 Ω，25 μH；32 kΩ，20 mH。

16.6 波特图

本节将讨论快速得到给定传输函数幅度和相位随频率ω变化的近似关系曲线。精确的曲线关系可以通过可编程计算器或者计算机获得精确值后逐点画出，也可以直接由计算机画出。然而这里要介绍的是如何获得响应曲线，它们比起通过零极点图得到响应曲线更好些，而且不需要借助任何计算工具。

分贝（dB）坐标

要构造的近似响应曲线也称为渐近线图，或者称为波特图，它是由贝尔实验室的一位电气工程师、数学家Hendrik W. Bode发明的。无论是幅度还是相位曲线，其横坐标都是频率坐标，且具有对数刻度，幅度坐标也是对数刻度单位，称为分贝（dB）。定义$|\mathbf{H}(j\omega)|$的分贝值如下：

$$H_{\text{dB}} = 20\log|\mathbf{H}(j\omega)|$$

其中的对数是常用对数（以10为底）。（若是功率传输函数则系数20必须替换为10，这里用不到。）其逆运算为：

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10^{(H_{\text{dB}}/20)}$$

说明：以分贝命名是为了表示对Alexander Graham Bell的尊敬。

在开始讨论波特图的详细绘制步骤之前，有必要了解分贝单位的大小，记住一些重要的分贝值，以及回忆对数的一些性质。由于log 1 = 0，log 2 = 0.301 03，以及log 10 = 1，写出下面的对应关系：

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} = 0$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} \approx 6\text{ dB}$$
$$|\mathbf{H}(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{\text{dB}} = 20\text{ dB}$$

如果$|\mathbf{H}(j\omega)|$增加10倍，对应的H_{dB}增加20 dB。而且由于$\log 10^n = n$，所以$10^n \Leftrightarrow 20n$ dB，因此1000对应60 dB，而0.01对应-40 dB。利用这些给定的值，可以得到$20\log 5 = 20\log\frac{10}{2} = 20\log 10 - 20\log 2 = 20 - 6 = 14$ dB，因此5 ⇔ 14 dB。同样，因为$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$，所以$\sqrt{2} \Leftrightarrow 3$ dB，$1/\sqrt{2} \Leftrightarrow -3$ dB[①]。

在求解幅度和相角的时候，先将传输函数表示成s的函数，再令$\mathbf{s} = j\omega$，如果需要，可将幅度表示为dB的形式。

① 注意，这里用了20 log 2 = 6 dB，而没有采用更精确的6.02 dB。这是习惯用法，$\sqrt{2}$表示3 dB，因为dB的尺度是求对数的结果，很小的误差通常不会产生严重影响。

练习

16.10 计算 $\omega = 146$ rad/s 时 H_{dB} 的值，其中 **H**(s)分别为(a) 20/(s + 100)；(b) 20(s + 100)；(c) 20 s。当 H_{dB} 分别为下列值时求 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 的值：(d) 29.2 dB；(e) −15.6 dB；(f) −0.318 dB 时。

答案：−18.94 dB；71.0 dB；69.3 dB；28.8；0.1660；0.964。

求渐近线

下一步是对 **H**(s)进行因式分解并显示零点和极点。首先考虑一个位于 s = −*a* 的零点，写出其标准形式为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + \frac{\mathbf{s}}{a} \qquad [26]$$

该函数的波特图由两条渐近线组成，分别是 ω 很大和很小时 H_{dB} 趋近的直线，因此首先计算：

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

即

$$H_{dB} = 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{a}\right| = 20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

当 $\omega << a$ 时，

$$H_{dB} \approx 20\log 1 = 0 \qquad (\omega \ll a)$$

渐近线如图 16.21 所示，$\omega < a$ 时画出的是一条实线，$\omega > a$ 时是虚线。

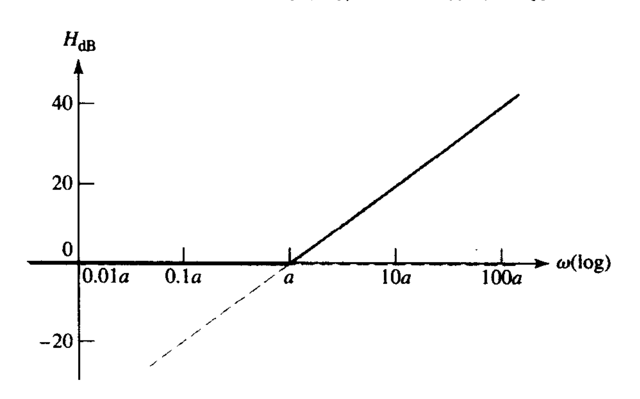


图 16.21 **H**(s) = 1 + *s*/*a* 的幅度波特图包含低频和高频渐近线，如图中虚线所示。两条虚线在横轴的转角频率处相交。波特图用两条很容易画的直线渐近线表示频率响应

当 $\omega >> a$ 时，

$$H_{dB} \approx 20\log\frac{\omega}{a} \qquad (\omega \gg a)$$

当 $\omega = a$ 时，$H_{dB} = 0$；当 $\omega = 10a$ 时，$H_{dB} = 20$ dB；而当 $\omega = 100a$ 时，$H_{dB} = 40$ dB。即频率每增加 10 倍，H_{dB} 增加 20 dB，因此渐近线的斜率为 20 dB/ 十倍频程。由于频率 ω 每增加一倍，H_{dB} 增加 6 dB，所以也就有了另一种表示方法：6 dB/ 二倍频程。高频时的渐近线如图 16.21 所示，即 $\omega > a$ 时的实线和 $\omega < a$ 时的虚线。注意，两条渐近线相交于 $\omega = a$，即零点频率处。该点的频率也称为转角频率、截止频率、3 dB 频率或者半功率频率。

说明：十倍频程是指频率之间的范围被定义成10倍的关系，比如3 Hz到30 Hz，12.5 MHz到125 MHz。二倍频程指的是频率之间的范围被定义为两倍的关系，比如7 GHz到14 GHz。

说明：注意，这里继续遵守约定，将$\sqrt{2}$表示成3 dB。

波特图的平滑处理

现在来看渐近响应曲线究竟存在多大的误差？在转角频率（$\omega=a$）处，其精确值为

$$H_{\rm dB} = 20\log\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2}} = 3\ {\rm dB}$$

而此时相应的渐近线上的值为0 dB。当$\omega=0.5a$时：

$$H_{\rm dB} = 20\log\sqrt{1.25} \approx 1\ {\rm dB}$$

可见，实际响应曲线为渐近线上方的一条平滑曲线，在$\omega=a$处，有3 dB的差异，而在$\omega=0.5a$（以及$\omega=2a$）处有1 dB的差异。如果需要画出精确结果，可以根据这些信息对转角处的渐近线进行平滑处理。

乘积项

大多数传输函数含有一个以上的零点（或极点），而用波特图方法处理起来却很方便，因为我们是进行对数运算。比如，有这样一个传输函数：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = K\left(1+\frac{\mathbf{s}}{s_1}\right)\left(1+\frac{\mathbf{s}}{s_2}\right)$$

其中，K为常数，$-s_1$和$-s_2$是传输函数$\mathbf{H}(\mathbf{s})$的两个零点，则函数的$H_{\rm dB}$可以写为

$$H_{\rm dB} = 20\log\left|K\left(1+\frac{j\omega}{s_1}\right)\left(1+\frac{j\omega}{s_2}\right)\right|$$

$$= 20\log\left[K\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}\right]$$

或者

$$H_{\rm dB} = 20\log K + 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

可见，它是常数（与频率无关）项$20\log K$与前面讨论的两个单零点项之和。换句话说，在画$H_{\rm dB}$时只是把各个单独项的曲线图形叠加。下面用例题来加以说明。

例题16.7 画出图16.22所示网络输入阻抗的波特图。

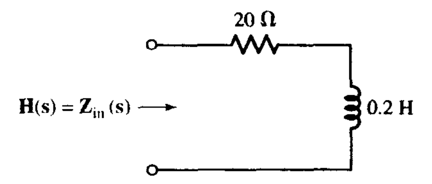


图16.22 如果选择$\mathbf{Z}_{\rm in}(\mathbf{s})$作为网络的$\mathbf{H}(\mathbf{s})$，则图16.23(b)所示的就是$H_{\rm dB}$的波特图

解： 写出输入阻抗的表达式：

$$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20 + 0.2\mathbf{s}$$

将上式写成标准形式：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20\left(1 + \frac{\mathbf{s}}{100}\right)$$

构成 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$的两项是位于 $\mathbf{s} = -100$ 的零点，即转角频率 $\omega = 100$ rad/s，以及常数项 20 log 20 = 26 dB。每一项对应的渐近线均画在图 16.23(a)中。由于对 $|\mathbf{H}(j\omega)|$ 进行了对数运算，接下来只需把各单独项相对应的波特图叠加在一起即可，图 16.23(b)显示的就是叠加后的幅度波特图。这里不再对转角频率处 $\omega = 100$ rad/s 的渐近线进行+3 dB 的平滑处理，而是留给读者作为练习。

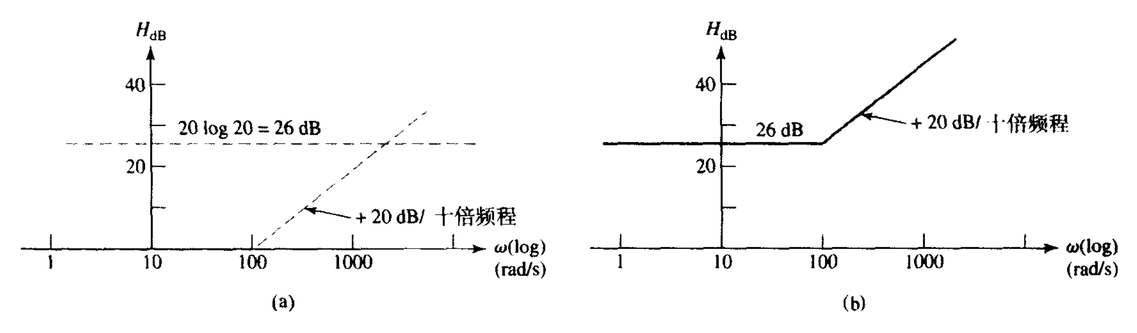


图 16.23 (a) $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 20(1 + \mathbf{s}/100)$各因子的波特图被分别画出；(b) 合成的波特图是(a)中所示各波特图的叠加

练习

16.11 画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 50 + \mathbf{s}$ 的幅度波特图。

答案： 34 dB，$\omega < 50$ rad/s；斜率 = +20 dB/ 十倍频程，$\omega > 50$ rad/s。

相位响应

回到传输函数（即式[26]），现在讨论简单零点的相位响应：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = \text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right) = \arctan\frac{\omega}{a}$$

这个表达式同样可以用渐近线表示，但是需要3个直线段来构成。当 $\omega << a$ 时，ang$\mathbf{H}(j\omega) \approx 0°$；我们把它作为 $\omega < 0.1a$ 的渐近线：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 0° \qquad (\omega < 0.1a)$$

在高频段，即 $\omega >> a$，有 ang $\mathbf{H}(j\omega) \approx 90°$，所以把它作为 $\omega = 10a$ 以上的渐近线：

$$\text{ang } \mathbf{H}(j\omega) = 90° \qquad (\omega > 10a)$$

由于 $\omega = a$ 时的角度为 45°，所以构造一条从 $\omega = 0.1a$ 的 0° 到 $\omega = 10a$ 的 90° 的一条线段，直线段的斜率等于 45°/ 十倍频程，如图 16.24 中实线所示，而虚线则表示实际的响应曲线。渐近线和实际曲线之间存在的最大误差等于 ±5.7°，分别在 $\omega = 0.1a$ 和 $\omega = 10a$ 处产生。在 $\omega = 0.394a$ 和 $\omega = 2.54a$ 处，存在的误差为∓5.29°，而在 $\omega = 0.159a$、a 和 $6.31a$ 处没有误差。虽然用相同的方法也可以得到平滑的曲线，如图 16.24 所示，但是更多时候典型的相位曲线还是用渐近直线表示的。

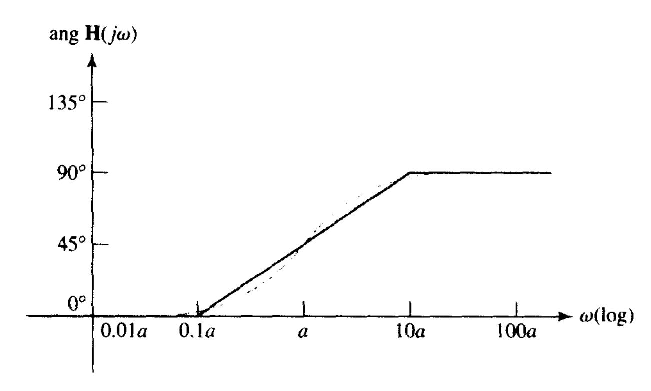


图 16.24　$\mathbf{H(s)} = 1 + \mathbf{s}/a$ 的相位响应渐近线由 3 条实线表示的直线段组成。斜线的两个端点分别是0.1a处的0°和10a处的90°。虚线表示精确（平滑）响应曲线

有必要简单思考一下波特图究竟告诉了我们什么信息？比如对$\mathbf{s} = a$的单零点，它表明当频率远低于转角频率时，响应函数的相位等于0°；而当频率很高（$\omega >> a$）时，相位却等于90°，在转角频率附近，传输函数的相位变化比较快，通过电路的合理设计（确定a）可以得到实际所需的响应函数的相角。

练习

16.12　画出例题16.7的传输函数的相位波特图。

答案：0°，$\omega \leqslant 10$；90°，$\omega \geqslant 1000$；45°，$\omega = 100$；斜率为45°/十倍频程，$10 < \omega < 1000$［ω用弧度/秒（rad/s）表示］。

绘制波特图的其他考虑

接下来考虑单极点的情况：

$$\mathbf{H(s)} = \frac{1}{1 + \mathbf{s}/a} \qquad [27]$$

由于这是零点的倒数，因此对数处理的结果是波特图成为前面所得图形的相反图形。在$\omega = a$之前幅度等于0 dB；$\omega > a$时，斜率为-20 dB/十倍频程，相位波特图在$\omega < 0.1a$时为0°，$\omega > 10a$时为-90°，$\omega = a$时为-45°，而在$0.1a < \omega < 10a$时是斜率为-45°/十倍频程的直线。我们鼓励读者直接根据式[27]绘制传输函数的波特图。

另外一种情况是传输函数的分子或者分母中出现s项，比如$\mathbf{H(s)} = \mathbf{s}$，那么

$$H_{\text{dB}} = 20 \log |\omega|$$

这是一条通过$\omega = 1$对应0 dB这一点的无限长的直线，其斜率为+20 dB/十倍频程，如图16.25(a)所示。如果s项出现在分母，直线的斜率变成-20 dB/十倍频程，并同样通过$\omega = 1$对应0 dB的点，如图16.25(b)所示。

还有一种情况是$\mathbf{H(s)}$中的常数乘积因子K，它的波特图是一条位于横轴之上$20\log|K|$ dB的水平线；如果$|K| < 1$，则水平线位于横轴之下。

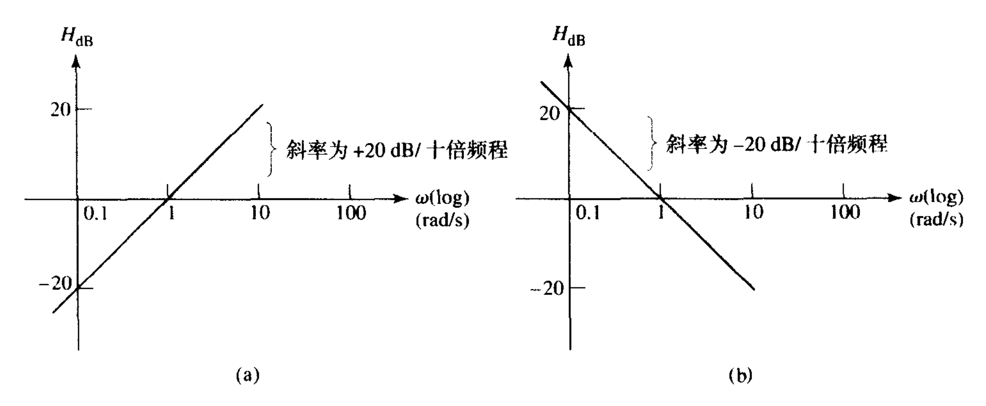


图 16.25 (a) $\mathbf{H(s)} = \mathbf{s}$ 和(b)$\mathbf{H(s)} = 1/\mathbf{s}$ 的渐近线，它们均为无限长的直线，并且穿过 $\omega = 1$ 时的 0 dB 点，斜率为 ±20 dB/ 十倍频程

例题 16.8 画出图 16.26 所示电路的电压增益波特图。

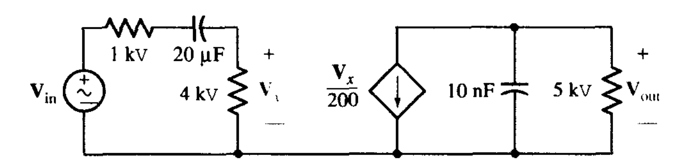


图 16.26 设 $\mathbf{H(s)} = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，该放大器的幅度波特图如图 16.27(b)所示，相位波特图如图 16.28 所示

解： 从电路的左边往右边计算电压增益：

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{4000}{5000 + 10^6/20\mathbf{s}}\left(-\frac{1}{200}\right)\frac{5000(10^8/\mathbf{s})}{5000 + 10^8/\mathbf{s}}$$

简化后得

$$\mathbf{H(s)} = \frac{-2\mathbf{s}}{(1 + \mathbf{s}/10)(1 + \mathbf{s}/20\,000)} \qquad [28]$$

可以发现有一个常数项，即 $20\log|-2| = 6$ dB，截止频率点在 $\omega = 10$ rad/s 和 $\omega = 20\,000$ rad/s 处，以及一个线性因子 **s**。每一项都画在图 16.27(a)中。把这 4 条线段相加，便得到如图 16.27(b) 所示的幅度波特图。

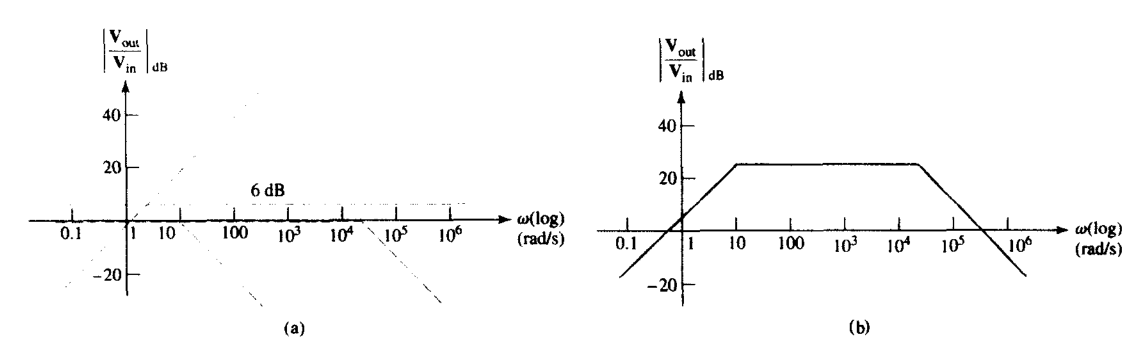


图 16.27 (a) 分别表示因子(−2)，(**s**)，$(1 + \mathbf{s}/10)^{-1}$ 和 $(1 + \mathbf{s}/20\,000)^{-1}$ 的幅度波特图；(b) (a)中4个单独的波特图相加后就是图16.26所示放大器的幅度波特图

练习

16.13 画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$分别等于下式时的幅度波特图：(a) $50/(\mathbf{s}+100)$；(b) $(\mathbf{s}+10)/(\mathbf{s}+100)$；(c) $(\mathbf{s}+10)/\mathbf{s}$。

答案：(a) –6 dB，$\omega<100$；–20 dB/ 十倍频程，$\omega>100$；(b) –20 dB，$\omega<10$；+20 dB/ 十倍频程，$10<\omega<100$；0 dB，$\omega>100$；(c) 0 dB，$\omega>10$；–20 dB/ 十倍频程，$\omega<10$。

在绘制图 16.26 所示放大器的相位波特图之前，需要花些时间观察一下幅度波特图的细节。

首先，不要过分依赖各个幅度曲线的相加结果。相反，通过考虑 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$的每个因式在选择的各频率点上的渐近值，可以很容易求得合并后的幅度曲线在这些点上的正确值。例如，图 16.27(a)所示的曲线在 $\omega=10$ 和 $\omega=20\,000$ 之间是平坦区域，它低于转角频率 $\omega=20\,000$，因此可以用 1 代表 $(1+s/20\,000)$；而该区域又高于频率 $\omega=10$，因此可以用 $\omega/10$ 代表$(1+s/10)$，所以，

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{dB}} &= 20\log\left|\frac{-2\omega}{(\omega/10)(1)}\right| \\
&= 20\log 20 = 26\ \mathrm{dB} \qquad (10<\omega<20\,000)
\end{aligned}
$$

我们当然也希望得到渐近响应穿过横轴的高频频率，现在这两项被表示成 $\omega/10$ 和 $\omega/20\,000$，则

$$
H_{\mathrm{dB}} = 20\log\left|\frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20\,000)}\right| = 20\log\left|\frac{400\,000}{\omega}\right|
$$

由于与横轴相交时的 $H_{\mathrm{dB}}=0$，即 $400\,000/\omega=1$，因此，$\omega=400\,000$ rad/s。

通常不需要在印制的半对数坐标纸上画出精确的波特图，只要简单地在纸上粗略地画出对数频率坐标即可。选择了十倍频程的区间——就是说从 $\omega=\omega_1$ 延续到 $\omega=10\omega_1$ 的长度 L（这里 ω_1 通常取为 10 的整数次幂）——用 x 表示 ω_1 右边的点 ω 到 ω_1 的距离，则 $x/L=\log(\omega/\omega_1)$。记住下面这些值对画图会有帮助：当 $\omega=2\omega_1$ 时，$x=0.3L$；当 $\omega=4\omega_1$ 时，$x=0.6L$；当 $\omega=5\omega_1$ 时，$x=0.7L$。

例题 16.9 画出由式[28]给出的传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=-2\,\mathbf{s}/[(1+\mathbf{s}/10)(1+\mathbf{s}/20\,000)]$的相位波特图。

解：从观察 $\mathbf{H}(j\omega)$开始：

$$
\mathbf{H}(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/20\,000)} \qquad [29]
$$

分子的相角是常数——–90°。

剩下的因子由截止频率为 $\omega=10$ 和 $\omega=20\,000$ 的两项相角相加而成。这 3 项的渐近线如图 16.28 中的虚线所示，它们相加的结果由实线表示。如果曲线向上平移 360°，结果与原曲线等效。

利用渐近线可以得到相位响应的正确值。比如，在图 16.28 中，$\omega=10^4$ rad/s 处的相角由式[29]的分子和分母多项式给定，分子的相角等于 –90°，分母的相角相对于 $\omega=10$ 的极点为 –90°，因为 ω 比截止频率的 10 倍还要大，它位于截止频率的 0.1 倍和 10 倍之间，相角按照 –45°/ 十倍频程变化，对截止频率 $\omega=20\,000$ rad/s，计算出相角为 $-45^\circ\log(\omega/0.1a)=-45^\circ\log[10\,000/(0.1\times20\,000)]=-31.5^\circ$。

这 3 项产生的相角的代数和为 –90° – 90° –31.5° = –211.5°，其值与图 16.28 所示的渐近线上的值很接近。



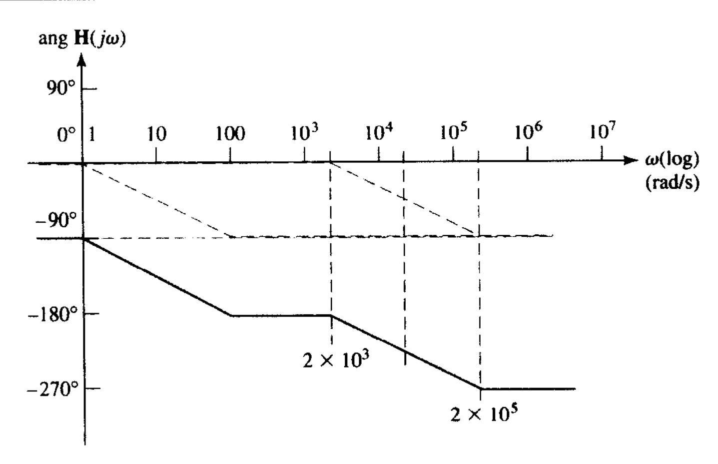


图 16.28 实线表示的曲线代表图 16.26 所示放大器相位响应的渐近曲线

练习

16.14 画出传输函数 **H**(s)为下列表达式的相位波特图：(a) 50/(s + 100)；(b) (s + 10)/(s + 100)；(c) (s + 10)/s。

答案：(a) 0°，$\omega < 10$；−45°/十倍频程，$10 < \omega < 1000$；−90°，$\omega > 1000$；(b) 0°，$\omega < 1$；+45°/十倍频程，$1 < \omega < 10$；45°，$10 < \omega < 100$；−45°/十倍频程，$100 < \omega < 1000$；0°，$\omega > 1000$；(c) −90°，$\omega < 1$；+45°/十倍频程，$1 < \omega < 100$；0°，$\omega > 100$。

高阶项

至此我们所讨论的零点和极点全部都是一阶项，比如 $s^{\pm 1}$, $(1 + 0.2s)^{\pm 1}$，等等。我们很容易将它们推广到高阶的情况。因式 $s^{\pm n}$ 对应的幅度响应曲线穿过 $\omega = 1$，且斜率为 ±20n dB/十倍频程，其相位响应曲线为常数相位 ±90n°。对于高阶零点因子 $(1 + s/a)^n$，其对应的幅度响应曲线和相位响应曲线相当于 n 个单零点幅度响应曲线或相位响应曲线的叠加。因此，得到的渐近幅度响应曲线在 $\omega < a$ 时为 0 dB，$\omega > a$ 时，斜率为 20n dB/十倍频程，$\omega = a$ 时误差为 −3n dB，在 $\omega = 0.5a$ 和 $\omega = 2a$ 处误差为 −n dB。渐近相位响应曲线在 $\omega < 0.1a$ 时为 0°，$\omega > 10a$ 时为 90n°，当 $\omega = a$ 时为 45n°，当 $0.1a < \omega < 10a$ 时，斜率为 45n°/十倍频程。在两个转角频率处误差为 ±5.71n°。

对于形如 $(1 + s/20)^{-3}$ 的因式，可以很快地画出其幅度与相位的渐近曲线，但是要记住：当幂指数比较高时误差也比较大。

共轭复数对

最后一种类型的因式是表示一对共轭复数对的零点或者极点。我们采用下面的标准形式表示这对零点：

$$\mathbf{H}(s) = 1 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

物理量 ζ 表示阻尼系数（16.1 节引入），我们很快会看到 ω_0 就是渐近线的转角频率。

当 $\zeta = 1$ 时，$\mathbf{H}(s) = 1 + 2(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/\omega_0)^2$，这就是前面刚讨论过的二阶零点的情况。若 $\zeta > 1$，$\mathbf{H}(s)$ 可以分解为两个一阶零点因子的乘积，比如 $\zeta = 1.25$，这时的 $\mathbf{H}(s) = 1 + 2.5(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1 + s/2\omega_0)(1 + s/0.5\omega_0)$，这也是我们熟悉的情况。

当$0 \leqslant \zeta \leqslant 1$时，出现的将是新情况。此时不必求解出共轭复数根的数值，这里只考虑低频和高频时幅度和相位响应的渐近数值，然后依据ζ值进行修正。

对幅度响应：

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\log|\mathbf{H}(j\omega)| = 20\log\left|1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right| \tag{30}$$

当$\omega << \omega_0$时，$\mathbf{H}_{\mathrm{dB}} = 20\log|1| = 0$ dB，这是低频渐近响应。接下来，当$\omega >> \omega_0$时，只有平方项起主要作用，因此$\mathbf{H}_{\mathrm{dB}} = 20\log|-(\omega/\omega_0)^2| = 40\log(\omega/\omega_0)$。这是一条斜率为40 dB/十倍频程的直线，是高频时的渐近响应，这两条渐近线相交于$\omega = \omega_0$对应的0 dB，如图16.29所示的实线，它表示幅度响应的渐近曲线。但是需要在转角频率附近对渐近线进行修正，令式[30]中的$\omega = \omega_0$，则

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\log\left|j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right| = 20\log(2\zeta) \tag{31}$$

若$\zeta = 1$，情况比较简单，此时修正值为+6 dB；若$\zeta = 0.5$，无须修正；若$\zeta = 0.1$，修正值则为−14 dB。了解修正值之后，通常可以画出比较满意的幅度渐近响应曲线。图16.29分别给出了$\zeta = 1$，0.5，0.25和0.1时更精确的幅度响应值，它们是根据式[30]计算得到的。比如，$\zeta = 0.25$，其准确的H_{dB}值在$\omega = 0.5\omega_0$处为

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\log|1 + j0.25 - 0.25| = 20\log\sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0\ \mathrm{dB}$$

负的峰值并不刚好出现在$\omega = \omega_0$处，它通常稍低于这个频率，这可以从$\zeta = 0.5$时对应的曲线看出来。

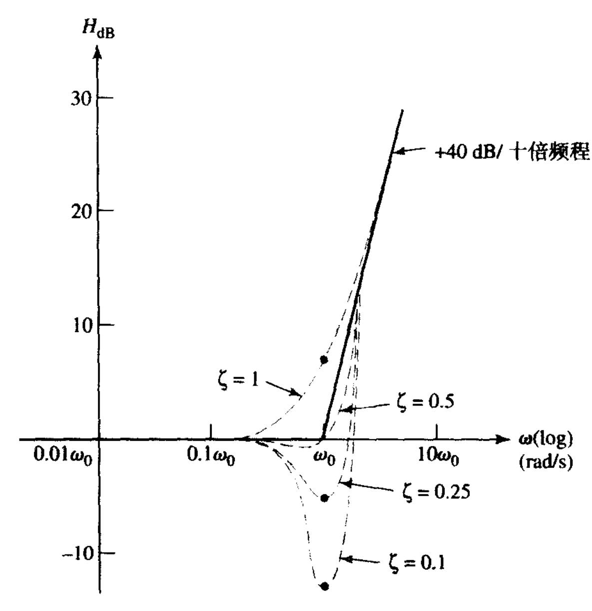


图16.29 对应不同阻尼系数ζ值的$\mathbf{H}(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$的幅度波特图

如果$\zeta = 0$，则$\mathbf{H}(j\omega_0) = 0$，$H_{\mathrm{dB}} = -\infty$。这种情况一般不画在波特图中。

最后画出$\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$的相位响应渐近曲线。当频率低于$\omega = 0.1\omega_0$时，可以令ang $\mathbf{H}(j\omega) = 0°$；频率高于$\omega = 10\omega_0$时，则有ang $\mathbf{H}(j\omega) = \mathrm{ang}[-(\omega/\omega_0)^2] = 180°$，在转角频率处，

ang $\mathbf{H}(j\omega_0)=\text{ang}(j2\zeta)=90°$。在 $0.1\omega_0<\omega<10\omega_0$ 区间内，开始用直线表示，如图 16.30 中的实线所示，它从点$(0.1\omega_0, 0°)$开始，通过点$(\omega_0, 90°)$，终止于点$(10\omega_0, 180°)$，其斜率为 90°/ 十倍频程。

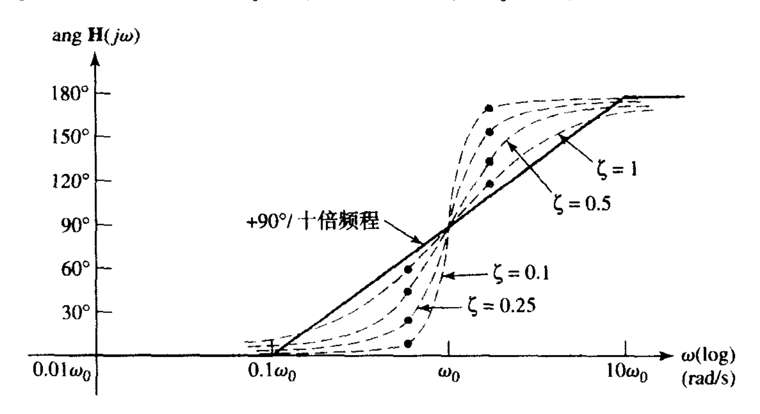


图 16.30　$\mathbf{H}(j\omega)=1+j2\zeta(\omega/\omega_0)-(\omega/\omega_0)^2$ 相位特性的直线近似，图中用实线表示，虚线表示 $\zeta=1$，0.5，0.25 和 0.1 时的精确相位响应曲线

现在需要对基本曲线在不同 ζ 值的情况下进行修正，由式[30]得到

$$\text{ang }\mathbf{H}(j\omega)=\arctan\frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

高于和低于 $\omega=\omega_0$ 的精确值足够用于对曲线形状的近似。比如，取 $\omega=0.5\omega_0$，则 $\text{ang}\mathbf{H}(j0.5\omega_0)=\arctan(4\zeta/3)$，而在 $\omega=2\omega_0$ 处的相位角是 $180°-\arctan(4\zeta/3)$。图 16.30 中的虚线表示 $\zeta=1, 0.5, 0.25$ 和 0.1 时的相位曲线，粗点表示 $\omega=0.5\omega_0$ 和 $\omega=2\omega_0$ 的精确值。

如果二次项位于分母，则将刚讨论的幅度和相位渐近曲线取反，下面用一个例题作为含有线性项和二次项的传输函数的总结。

例题 16.10　传输函数为 $\mathbf{H}(\mathbf{s})=100\,000\mathbf{s}/[(\mathbf{s}+1)(10\,000+20\mathbf{s}+\mathbf{s}^2)]$，画出它的波特图。

解： 首先考虑二次项，将其表示成能看出阻尼系数 ζ 的形式，所以将二次项除以常数 10 000：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})(1+0.002\mathbf{s}+0.0001\mathbf{s}^2)}$$

观察 $\mathbf{s}^2$ 项的系数，可求得 $\omega_0=\sqrt{1/0.0001}=100$，因此二次项中的线性项改写后出现系数 2，另外两项为因式$(\mathbf{s}/\omega_0)$和最终的因子 ζ：

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})=\frac{10\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s})[(1+2)(0.1)(\mathbf{s}/100)+(\mathbf{s}/100)^2]}$$

可见 $\zeta=0.1$。

幅度响应的渐近曲线如图 16.31 中的细线所示，其中 20 dB 代表常数项 10，通过横轴上 $\omega=1$ 的点，斜率等于 +20 dB/ 十倍频程的无限长直线代表 s 项，转角频率 $\omega=1$ 代表一阶极点，转角频率 $\omega=100$，斜率为 −40 dB/ 十倍频程代表分母的二次项。把这 4 个图形相加，并对二次项进行 +14 dB 的修正，得到图 16.31 中粗线表示的幅度响应曲线。

相位响应曲线包含 3 个部分：代表 s 项的 +90°；$\omega<0.1$ 时的 0°，$\omega>10$ 时的 −90° 和 −45°/ 十倍频程代表的一阶极点；$\omega<10$ 时的 0°，$\omega>1000$ 时的 −180° 和 −90°/ 十倍频程代表的二阶极点因子。将 3 条渐近线相加并对 $\zeta=0.1$ 进行修正后得到的响应渐近线如图 16.32 中的实线所示。

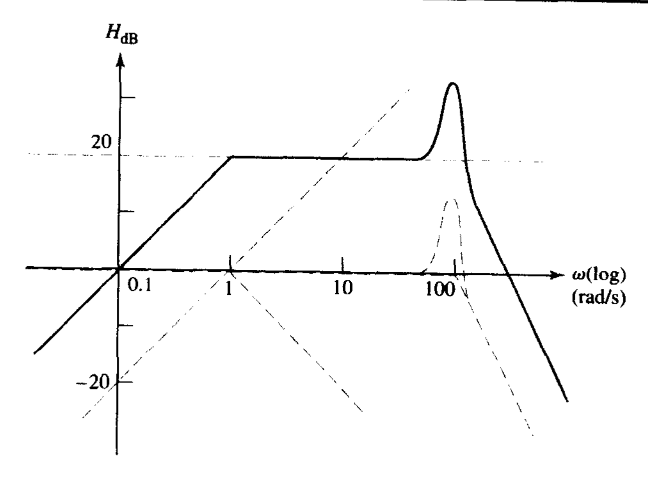


图 16.31　传输函数 $\mathbf{H}(s) = \dfrac{100\ 000s}{(s+1)(10\ 000+20s+s^2)}$ 的幅度波特图

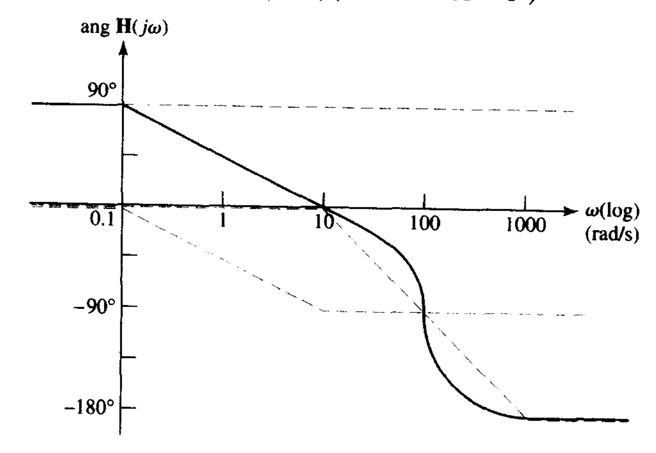


图 16.32　传输函数 $\mathbf{H}(s) = \dfrac{100\ 000s}{(s+1)(100\ 000+20s+s^2)}$ 的相位波特图

练习

16.15　设传输函数 $\mathbf{H}(s) = 1000s^2/(s^2+5s+100)$，画出幅度波特图并计算下列值：(a) $H_{dB}=0$ 时的 ω；(b) $\omega=1$ 时的 H_{dB}；(c) $\omega\to\infty$ 时的 H_{dB}。

答案：0.316 rad/s；20 dB；60 dB。

计算机辅助分析

绘制波特图的方法很有价值。很多情况下需要快速画出近似的响应曲线（比如考试时或者在某个特殊应用场合下计算一个特定电路的拓扑结构），因为这些情况下了解大致的曲线形状已经足够。而且在滤波器设计中选择因式和系数时，波特图也具有非常重要的价值。

在需要精确计算响应曲线的情况下（比如对电路设计进行最后的验证），工程师可以有多种计算机辅助分析工具的选择。这里要介绍的第一种方法是利用 MATLAB 得到频率响应曲线。为此，先要分析电路的传输函数，但是不必对表达式进行简化或因式分解。

考虑图 16.26 所示电路，前面已经求得了电路的传输函数表达式为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{-2\mathbf{s}}{(1+\mathbf{s}/10)(1+\mathbf{s}/20\ 000)}$$

要求画出频率范围从100 Mrad/s到1 Mrad/s的详细响应曲线。由于最后的曲线是画在对数坐标中的，所以频率间隔不必均匀选取。用 MATLAB 的函数 logspace( )可以产生一个频率矢量，它的前两个参数分别表示频率区间的起始频率和终止频率，表示方式是10的幂指数（在本例中分别为-1和6），第 3 个参数为总的点数。因此，相应的 MATLAB 程序为

```
EDU» w = logspace(-1,6,100);
EDU» denom = (1+j*w/10) .* (1+j*w/20000);
EDU» H = -2*j*w ./ denom;
EDU» Hdb = 20*log10(abs(H));
EDU» semilogx(w,Hdb)
EDU» xlabel('frequency (rad/s)')
EDU» ylabel ('|H(jw)| (dB)')
```

得到的曲线见图 16.33。

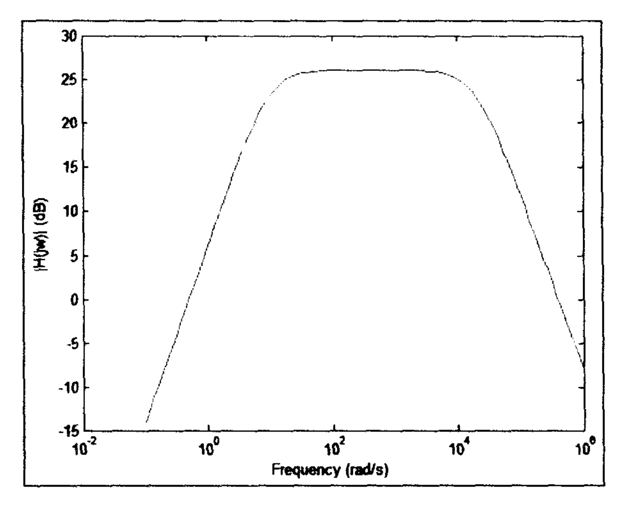


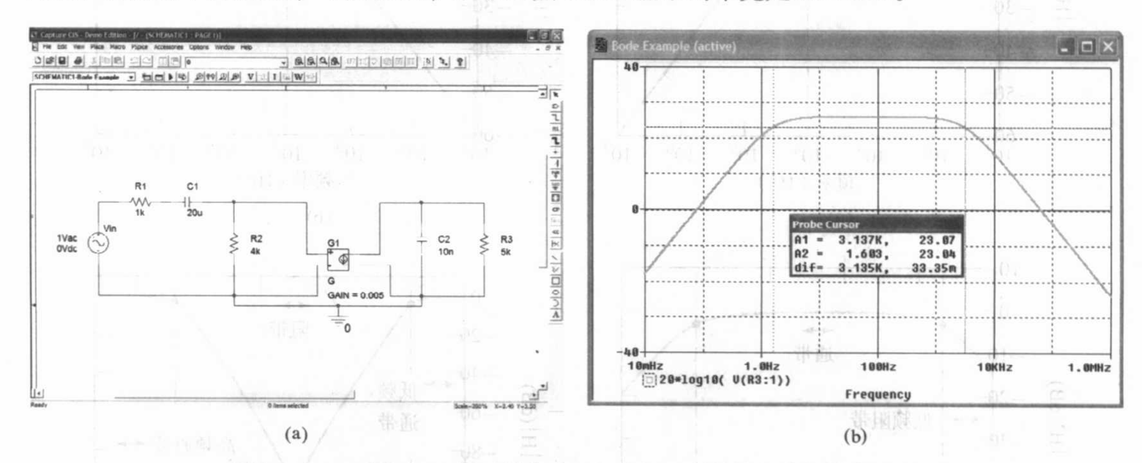
图 16.33 利用 MATLAB 画出的 H_{dB} 曲线

这里对 MATLAB 程序代码做些解释。首先，在 **H**(s)的表达式中进行了 $\mathbf{s} = j\omega$ 的代换，且 MATLAB 认为变量 w 是矢量或者是一维矩阵。因此，该变量将导致分母表达式计算上的困难，这是因为 MATLAB 会试图用矩阵运算的规则对表达式进行运算所致。因此，用单独的一行来计算 $\mathbf{H}(j\omega)$ 的分母，为了将两个因子相乘，使用运算符“.*”而不是“*”。这个新的运算符与下面的 MATLAB 语句等效：

```
EDU» for k = 1:100
denom = (1 + j*w(k)/10) * (1 + j*w(k)/20000);
end
```

下一行代码中的新运算符“./”具有同样的含义。结果用 dB 表示，因此调用函数 log10( )。在 MATLAB 中，log( )表示自然对数。最后，新的作图命令语句 semilogx( )用于画出以对数尺度的 x 为轴的图形。希望读者回到前面的例题，用现在的方法画出准确的响应曲线，并与相应的波特图进行比较。

PSpice也是广泛采用的产生频率响应曲线的一种方法，尤其是在电路设计的最后计算阶段。图16.34(a)是图16.26所示电路的原理电路，图中，电阻R3上的电压是输出电压，信号源Vac选用固定电压1 V，这样比较方便。交流瞬态仿真用于确定电路的频率响应；图16.34(b)是由每十倍频程10个点画出的曲线（选中Logarithmic AC Sweep Type下的Decade），频率从10 mHz到1 MHz。注意，仿真的单位是Hz，不是rad/s，所以工具cursor显示的带宽是3.14 kHz。



(a) (b)

图16.34 (a)图16.26所示的电路；(b)用dB表示的电路的频率响应

我们希望读者能够对例题电路进行仿真，并与已得到的波特图进行比较。

16.7 滤波器

滤波器设计是一项很实际（也很有趣）的工作，值得用单独的一本教材来阐述它。本节只是介绍有关滤波器的最基本的概念，包括有源和无源滤波器电路。这些电路可能相当简单，只包含单个电容或者电感并加到给定的网络中以提高性能；也可能相当复杂，包含许多电阻、电容、电感和运放，从而获得具体应用所需要的精确的响应曲线。滤波器用在现代电子电路中可以得到电源需要的直流电压，滤除通信信道中的噪声，从天线接收的复用信号中分离出广播信号和电视信号，用于放大汽车立体声系统中的低音信号，这里只列出了一些简单的应用。

滤波器的本质是对通过网络的信号频率进行选择。根据具体应用有几种不同的选择频率的方法。低通滤波器的频率响应如图16.35(a)所示，它允许低于截止频率的信号通过网络，而对高于截止频率的信号则进行衰减。高通滤波器的频率响应如图16.35(b)所示，性能正好与低通滤波器相反。滤波器频率响应曲线的重要性能体现在曲线在衰减区域是否尖锐，或者在截止频率点附近是否陡峭。一般而言，越陡峭的响应曲线对应的电路越复杂。

将低通滤波器和高通滤波器结合在一起可以构成带通滤波器，其响应曲线如图16.35(c)所示。在这类滤波器中，位于两个转角频率之间的区域称为通带，通带之外的区域称为阻带。这些名词同样适用于图16.35(a)和图16.35(b)所示的低通和高通滤波器。当然，也可以构成带阻滤波器，即允许低频和高频信号通过，但阻止两个截止频率之间的频率信号通过［如图16.35(d)所示］。

陷波器是特殊的带阻滤波器，它具有非常窄的响应特性，只阻止信号的某个频率。多带滤波器也是一种可能的滤波器，其电路具有多个通带和阻带。这种滤波器的设计比较简单，但是超出了本书的范围。

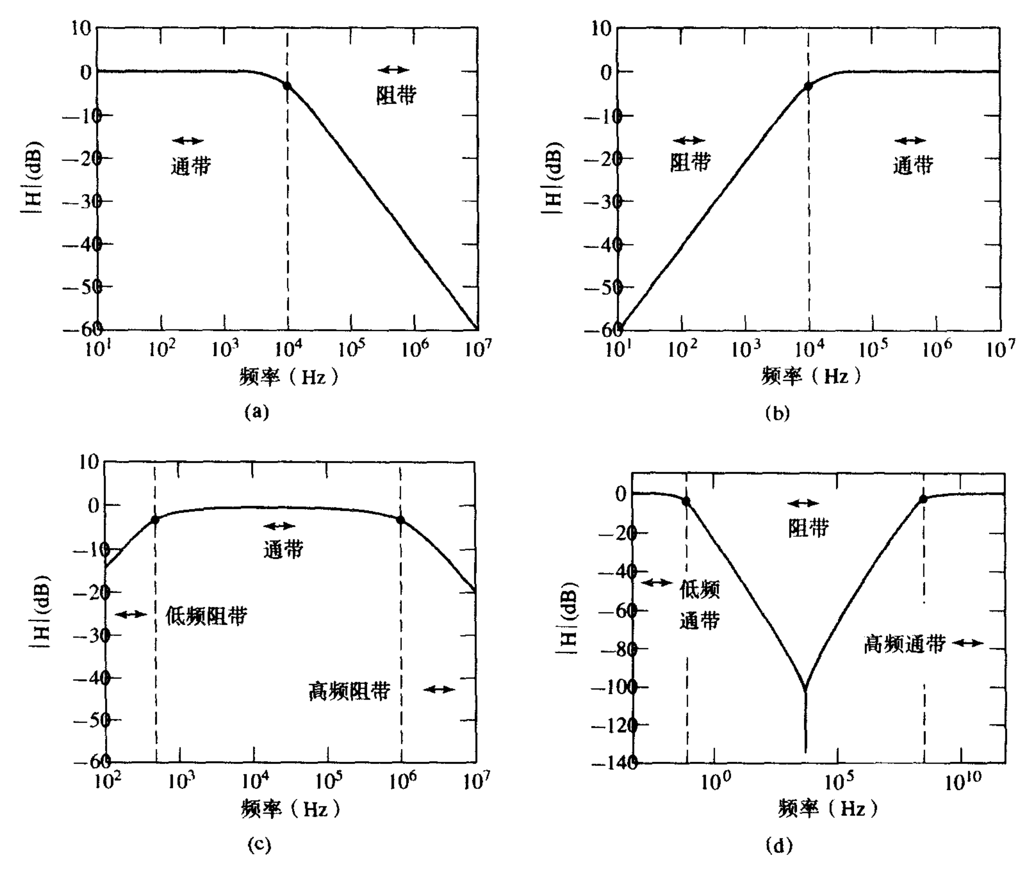


图 16.35 频率响应曲线：(a) 低通滤波器；(b) 高通滤波器；(c) 带通滤波器；(d) 带阻滤波器。每个图中的实心点对应的幅度是 −3 dB

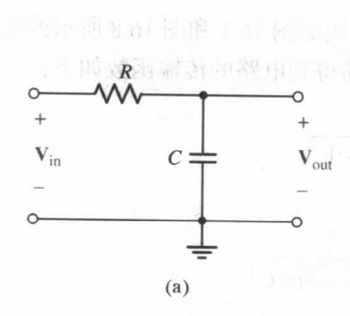
无源低通和高通滤波器

利用一个电容和一个电阻可以组成一个滤波器，如图16.36(a)所示。该低通滤波器的传输函数为

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} = \frac{1}{1 + RC\mathbf{s}} \qquad [32]$$

H(**s**)有一个单极点，其频率为 $\omega = 1/RC$；它还有一个位于 $\mathbf{s} = \infty$ 的零点，从而导致其具有低通滤波特性。低频（$\mathbf{s} \to 0$）导致 $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ 位于最大值（1 或者 0 dB）附近，高频（$\mathbf{s} \to \infty$）导致 $|\mathbf{H}(\mathbf{s})| \to 0$。定性地考虑电容的阻抗就能够理解滤波器的频率特性：当频率增加时，电容对交流信号呈现短路特性，所以输出电压下降。设该电路的 $R = 500\ \Omega$，$C = 2$ nF，则其响应曲线如图 16.36(b)所示。将指针移至 −3 dB，可以发现转角频率为 159 kHz（1 Mrad/s）。在电路中增加电抗元件（比如电容或电感）可以提高响应曲线在截止频率附近的陡峭程度。

将图 16.36(a)中元件的位置相互交换就可以得到高通电路，具体参见下面的例题。



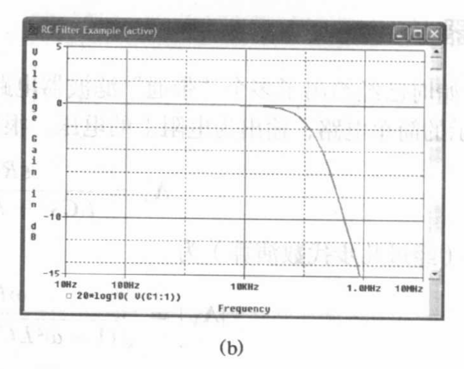


图 16.36 (a) 电阻 – 电容组合构成的简单低通滤波器；(b) 用 PSpice 得到的电路的频率响应

例题 16.11 设计一个转角频率为 3 kHz 的高通滤波器。

解： 首先确定电路的拓扑结构，由于对曲线的陡峭程度没有要求，因此选择最简单的电路结构，如图 16.37 所示。

很容易写出电路的传输函数：

$$\mathbf{H(s)} \equiv \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_x} = \frac{RC\mathbf{s}}{1 + RC\mathbf{s}}$$

图 16.37 简单的高通滤波器电路，选择 R 和 C 的值，使得截止频率为 3 kHz

它有一个位于 $\mathbf{s} = 0$ 的零点和一个 $\mathbf{s} = -1/RC$ 的极点，因而具有“高通”（即 $\omega \to \infty$ 时 $|\mathbf{H}| \to 0$）性能。

滤波器的转角频率 $\omega_c = 1/RC$，已知 $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(3000) = 18.85$ krad/s。需要选择两个参数 R 和 C，实际情况通常是根据手头现有的电容和电阻值来选择，这里没有提供这方面的信息，所以可以任意选择参数。

为 R 选取标准参数 4.7 kΩ，则电容 C 必须等于 11.29 nF。

剩下的一步是用 PSpice 来对我们的设计进行仿真，预计的频率响应曲线如图 16.38 所示。

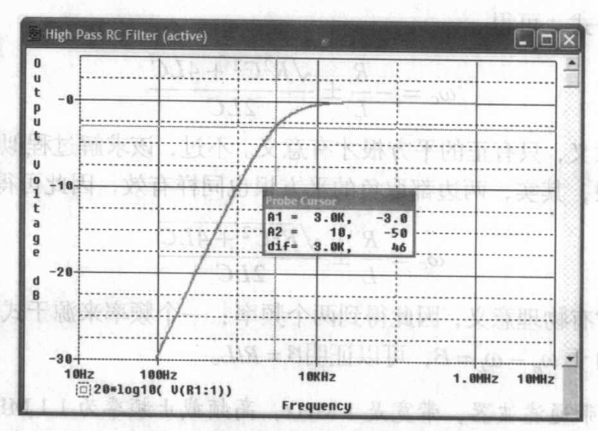


图 16.38 滤波器设计的最后阶段是频率响应的仿真。由图可见截止频率（3 dB）3 kHz 与设计要求一致

练习

16.16 设计一个截止频率为 13.56 MHz 的高通滤波器，这是射频电源常用的频率，用 PSpice 对设计进行验证。

带通滤波器

本章开始时已经给出了多个“带通”滤波器电路（比如图 16.1 和图 16.8 所示的电路）。考虑图 16.39 所示的简单电路，输出为电阻上的电压。很容易得到电路的传输函数如下：

$$\mathbf{A}_V = \frac{\mathbf{s}RC}{LC\mathbf{s}^2 + RC\mathbf{s} + 1} \tag{33}$$

函数的幅度（经过几步代数演算）为

$$|\mathbf{A}_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{34}$$

对 $\omega \to 0$ 取极限，可得

$$|\mathbf{A}_V| \approx \omega RC \to 0$$

对 $\omega \to \infty$ 取极限，可得

$$|\mathbf{A}_V| \approx \frac{R}{\omega L} \to 0$$

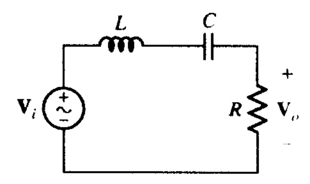


图 16.39 由串联 RLC 电路构成的简单带通滤波器

根据从波特图得出的经验，式[33]有 3 个临界频率：一个零点和两个极点。为了得到带通响应的峰值为 1（0 dB）的结果，两个极点的频率必须大于 1 rad/s，这是零点项的 0 dB 交界频率。这两个极点频率通过对式[33]进行因式分解或者令式[34]等于 $1/\sqrt{2}$ 得出。滤波器的中心频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$。令式[34]等于 $1/\sqrt{2}$，经过少量代数运算，得到

$$\left(1 - LC\omega_c^2\right)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \tag{35}$$

两边开方，可得

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

应用二次方程的求根公式，可得

$$\omega_c = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{36}$$

负频率的解没有物理意义，只有正的平方根才有意义。不过，该求解过程似乎有些匆忙，式[35]两边同时取了正的平方根，其实，两边都取负的平方根也同样有效，因此可得

$$\omega_c = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC} \tag{37}$$

上式只有正的平方根才有物理意义，因此得到两个频率：一个频率来源于式[36]的 ω_L，另一个频率来源于式[37]的 ω_H。由于 $\omega_H - \omega_L = \mathcal{B}$，可以证明 $\mathcal{B} = R/L$。

例题 16.12 设计一个带通滤波器，带宽是 1 MHz，高频截止频率为 1.1 MHz。

解： 选择如图 16.37 所示的电路结构，先确定转角频率。带宽由 $f_H - f_L$ 决定：

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100\ \text{kHz}$$

和

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3\ \text{krad/s}$$

高频截止频率（ω_H）等于 6.912 Mrad/s。

为了继续设计符合要求的电路，需要将截止频率和R、L、C关联起来。

令式[37]为$2\pi(1.1\times10^6)$，从而可以求解出$1/LC$［因为已知$\mathcal{B}=2\pi(f_H-f_L)=6.283\times10^6$］。

$$\frac{1}{2}\mathcal{B}+\left[\frac{1}{4}\mathcal{B}^2+\frac{1}{LC}\right]^{1/2}=2\pi(1.1\times10^6)$$

解得$1/LC=4.343\times10^{12}$。任意选择$L=1$ H（事实上，电感值有些大），则$R=6.283$ MΩ，$C=230.3$ fF。注意，“设计”问题没有唯一的解，R，L和C都可以作为最先设定的参数。

PSpice的仿真结果如图16.40所示。

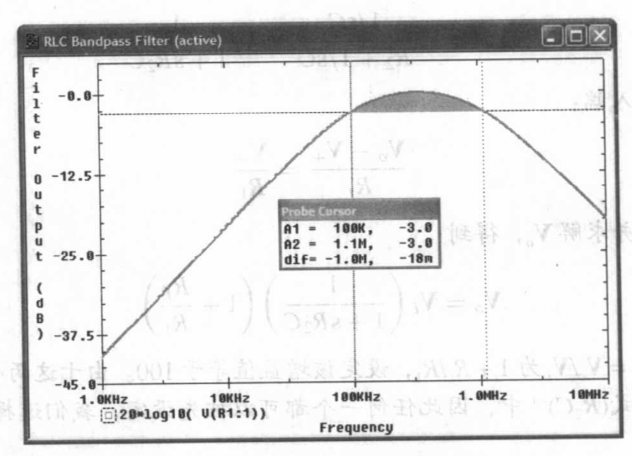


图16.40 带通滤波器设计时的响应仿真表明带宽1 MHz、高频截止频率1.1 MHz与设计要求一致。通带如图中阴影部分所示

练习

16.17 设计一个带通滤波器，其低频截止频率为100 rad/s，高频截止频率为10 krad/s。

答案： 众多答案中的一种可能结果：$R=990\ \Omega$，$L=100$ mH，$C=10\ \mu$F。

前面考虑的电路称为无源滤波器，因为组成滤波器的元件都是无源元件（即没有晶体管、运放或者其他“有源”器件）。虽然无源滤波器相对比较普遍，但是它们不适合所有的应用，且无源滤波器的增益（定义为输出电压与输入电压的比值）很难设定，而滤波器电路的放大能力通常是必要的指标。

有源滤波器

在滤波器电路设计中加入有源器件（比如运算放大器）可以克服无源滤波器电路的很多缺点。在第6章中曾经讲到，设计运算放大器以提供增益是很简单的事情，通过有策略地设置电容的位置，运放电路还能够呈现电感的性能。

运放的内部电路通常含有很小的电容（典型值在100 pF数量级），它们限制了运放发挥作用时的最大频率。因此，任何运放电路如果起到低通滤波器的作用，对现代电子器件而言，其截止频率一般在20 MHz或更高一些（取决于电路的增益）。

例题 16.13 设计一个有源低通滤波器电路，要求截止频率为 10 kHz，电压增益是 40 dB。

解：当频率远低于 10 kHz 时，放大器电路要求能够提供 40 dB（即 100 V/V）的电压增益。它可以用同相组态的单运放实现［如图 16.41(a)所示的电路］，因此，

$$\frac{R_f}{R_1}+1=100$$

为提供 10 kHz 的高频截止频率，需要将低通滤波器的输出接至运放的输入端［如图 16.41(b)所示］。为推导传输函数，先分析运放的同相输入端：

$$\mathbf{V}_+=\mathbf{V}_i\frac{1/\mathbf{s}C}{R_2+1/\mathbf{s}C}=\mathbf{V}_i\frac{1}{1+\mathbf{s}R_2C}$$

在运放的反相输入端：

$$\frac{\mathbf{V}_o-\mathbf{V}_+}{R_f}=\frac{\mathbf{V}_+}{R_1}$$

联立这两个等式并求解 $\mathbf{V}_o$，得到

$$\mathbf{V}_o=\mathbf{V}_i\left(\frac{1}{1+\mathbf{s}R_2C}\right)\left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)$$

增益的最大值 $\mathbf{A}_V=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$ 为 $1+R_f/R_1$，设定该增益值等于 100。由于这两个电阻都没有出现在转角频率的表达式 $(R_2C)^{-1}$ 中，因此任何一个都可以被先设定，我们选择 $R_1=1\ \mathrm{k\Omega}$，则 $R_f=99\ \mathrm{k\Omega}$。

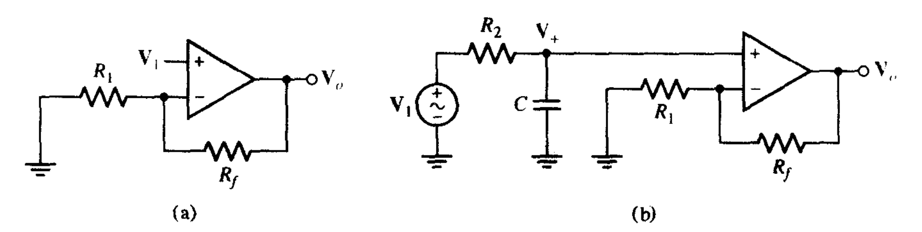


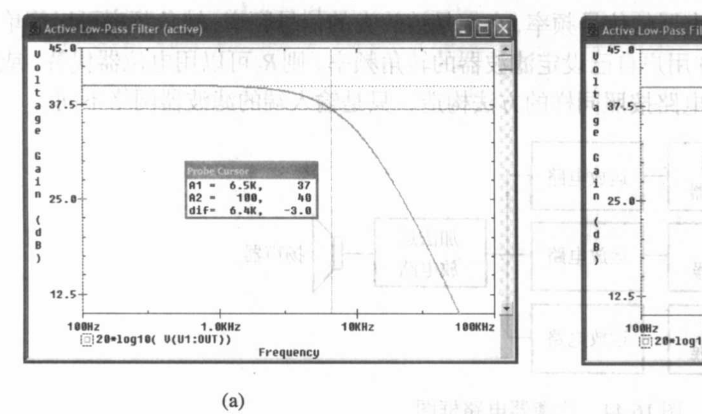
图 16.41 (a) 简单同相运算放大器电路；(b) 由电阻 R_2 和电容 C 组成的低通滤波器接在输入端

任意选择 $C=1\ \mu\mathrm{F}$，求得

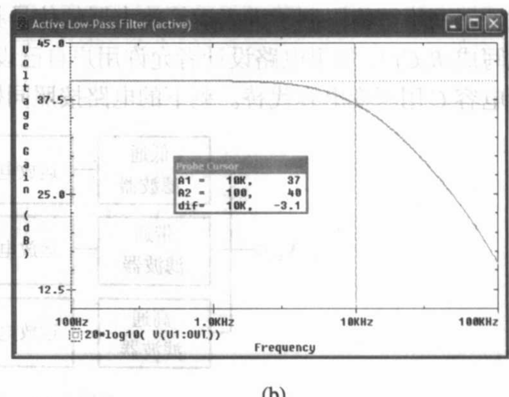
$$R_2=\frac{1}{2\pi(10\times10^3)C}=15.9\ \Omega$$

从这一点看，设计应该算完成了。然而真是这样吗？图 16.42(a)所示是电路仿真得到的频率响应。

显而易见，设计的结果与 10 kHz 截止频率的要求不吻合。我们错在哪里了？仔细检查代数运算的结果并未发现有错误，看来一定是什么地方使用了错误的假设。仿真用的运放是 μA741，它与推导时假设的理想运放恰好不同，这就是产生差异的主要原因。如果使用 LF111 运放代替 μA741，得到的截止频率就是需要的 10 kHz，相应的仿真结果如图 16.42(b)所示。遗憾的是，带有 40 dB 增益的运放 μA741 本身的截止频率约为 10 kHz，在本设计中不能被忽略；而 LF111 的第一个截止频率出现在 75 kHz 处，远大于 10 kHz，因此不会影响我们的设计。



(a)



(b)

图 16.42　(a) 采用μA741运放构成的滤波器电路的频率响应，图中所示的转角频率为 6.4 kHz；(b) 相同滤波器电路的频率响应，但是运放被替换成了 LF111，该电路的截止频率正好等于设计要求的 10 kHz

练习

16.18　设计一个低通滤波器电路，要求增益为 30 dB，截止频率为 1 kHz。

答案： 众多答案中的一个可能结果是：$R_1 = 100\ \text{k}\Omega$，$R_f = 3.062\ \text{M}\Omega$，$R_2 = 79.58\ \Omega$ 和 $C = 2\ \mu\text{F}$。

实际应用——低音、高音和中音调节

音响系统通常需要独立调节低音、高音和中音，即便对不昂贵的设备来说也是如此。音频范围（至少人耳能听到的）通常可接受的是 20 Hz 到 20 kHz，低音对应的是低频（小于 500 Hz 左右），高音对应的是高频（大于 5 kHz 左右）。

虽然设计如图 16.43 所示的系统有一些难度，但是设计均衡器的系统框图相对来说比较简单。在许多手提收音机中都有低音、中音和高音 3 种类型的均衡器，主要信号（收音机接收电路或 CD 唱机需要的）包含的频率范围比较宽，带宽约为 20 kHz。

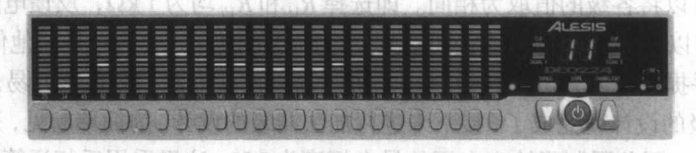


图 16.43　均衡器的例子。经 Alesis 允许使用

必须将此信号送到 3 个不同的运放电路中进行放大，每个运放的输入端需要接上不同的滤波器。低音调节电路需要一个低通滤波器，高音调节电路需要一个高通滤波器，中音调节电路则需要一个带通滤波器。然后将每个运放电路的输出接到一个加法运放电路中，图 16.44 给出了完整的电路框图。

基本电路模块如图 16.45 所示。电路由同相组态的运算放大器和低通滤波器组成，运放的增益由 $1 + R_f/R_1$ 决定，简单低通滤波器由电阻 R_2 和电容 C 组成。反馈电阻 R_f 的阻值可以改变（因此有时也称为电位器），通过调节旋钮可以改变运放的增益，人们通常也把它称为音量控制电阻。低通

滤波器网络严格限制了进入运算放大器的信号频率，它们是被放大的信号频率，转角频率可以简单地写成$(R_2C)^{-1}$。如果电路设计者允许用户自己设定滤波器的转角频率，则R_2可以用电位器代替，或者电容C用可变电容代替。剩下的电路按照同样的方法构造，只是输入端的滤波器网络不同。

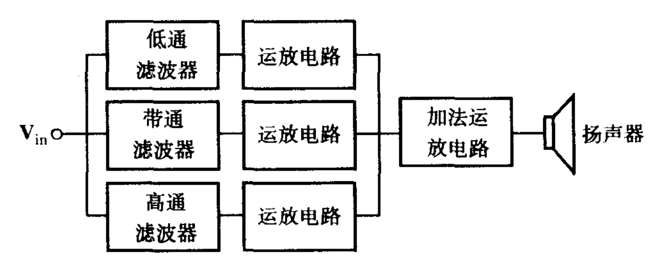


图 16.44 均衡器电路框图

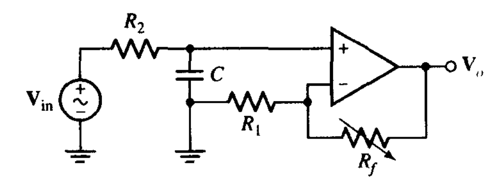


图 16.45 低音调整部分的放大器电路

为了区分不同级的电阻、电容和运算放大器，采用不同的下标表示所属各级的元件（t, m, b）。我们从高音级开始，我们在使用高增益时频率范围为10~20 kHz的μA741时曾经碰到过这个问题，因此这里用LF111也许会好一些。将高音截止频率取为5 kHz（不同的音频电路设计者取的值可能会不同），则

$$\frac{1}{R_{2t}C_t} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

取$C_t = 1\ \mu\text{F}$，可得到R_{2t}的值为31.83 Ω。取低音截止频率为500 Hz，同样取$C_b = 1\ \mu\text{F}$（可能质量会打折扣），可得R_{2b}的值为318.3 Ω。带通滤波器的设计留给读者完成。

下一步设计是选择合适的R_{1t}和R_{1b}的值以及反馈电阻的值。由于没有给出任何具体要求，因此为了简单起见，可以将各级的值取为相同。即选择R_{1t}和R_{1b}均为1 kΩ，反馈电阻为10 kΩ的电位器（意味着阻值可以是0~10 kΩ）。这表明对某一个信号的声音放大倍数是其他信号的11倍。这里的设计是应用于手提设备的，电源选择±9 V。如果需要改变电源，则也很容易。

现在滤波器级的设计就完成了，接下来进行加法器级的设计。为简单起见，采用与其他部分相同的电源进行供电，因此限制了输出电压的最大幅度为9 V。这里采用反相运算放大器的组态，也就是说，将每个滤波器放大级的输出端直接接到各自的1 kΩ电阻上，然后将每个1 kΩ电阻的另一端接到加法放大器这一级的反相输入端。为避免出现饱和，加法放大器这级需要选择合适的反馈电位器，当然还需要知道输入电压的范围以及扬声器的功率。

总结和复习

- 谐振是指这样一种情况：固定幅度的正弦激励函数在谐振时产生最大的幅度响应。
- 电网络谐振时网络输入端的电压与电流同相。

- 品质因数正比于网络中储存的最大能量与一个周期内消耗的能量之比。
- 半功率频率定义为电路响应函数的幅度下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率。
- 谐振电路的带宽定义为上、下半功率频率的差。
- 高 Q 值电路是指谐振电路的品质因数 $Q \geqslant 5$。
- 高 Q 值电路中，每个半功率频率近似位于离开谐振频率一个“半带宽数”的地方。
- 串联谐振电路的谐振阻抗很低，而并联谐振电路的谐振阻抗很高。
- 当 $R_p = R_s(1 + Q^2)$ 和 $X_p = X_s(1 + Q^{-2})$ 时，串联谐振电路和并联谐振电路等效。
- 不符合实际应用的元件值通常会使设计容易进行。对网络的传输函数进行幅度缩放和频率缩放可以得到符合实际情况的元件值。
- 可以根据传输函数的零极点快速画出波特图大致的形状。
- 4 种基本滤波器的类型是：低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器。
- 无源滤波器由电阻、电容和电感组成，有源滤波器通常由运算放大器或者其他有源元件组成。

深入阅读

大量不同滤波器的讨论可参考：

J. T. Taylor 和 Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1997。

各种有源滤波器电路和设计过程的综合汇编：

D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook*, 2nd ed. Burlington, Mass, :Newnes, 1996。

习题

16.1 并联谐振

1. 并联电路的 $R = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 47\ \mu\text{F}$，$L = 11\ \text{mH}$。(a) 计算 Q_0; (b) 确定谐振频率（用 Hz 表示）; (c) 假设电路的激励是 1 mA 的正弦稳态电流源，画出电压响应随频率的变化曲线。
2. 并联 RLC 谐振电路的 Q_0 值等于200。已知其中两个元件参数，求另一个参数的值：(a) $R = 1\ \Omega$，$C = 1\ \mu\text{F}$; (b) $L = 12\ \text{fH}$，$C = 2.4\ \text{nF}$; (c) $R = 121.7\ \text{k}\Omega$，$L = 100\ \text{pH}$。
3. 变容二极管是一种可变电抗的半导体器件，通过加在其上的偏置电压来改变电抗。它的品质因数可以用下式表示①：

$$Q \approx \frac{\omega C_J R_P}{1 + \omega^2 C_J^2 R_P R_S}$$

其中，C_J 为结电容（与加在器件上的电压有关），R_S 是器件的串联电阻，R_P 是等效的并联电阻。(a) 如果电压为 1.5 V 时，$C_J = 3.77\ \text{pF}$，$R_P = 1.5\ \text{M}\Omega$，$R_S = 2.8\ \Omega$，画出品质因数随 ω 变化的曲线; (b) 对 Q 求导，求出 ω_0 及 Q_{max}。

① S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, 2d ed. New York: Wiley, 1981, p. 116。

4. 求出下列物体的Q值: (a) 乒乓球; (b) 硬币; (c) 这本教材。请给出测量的条件以及测量结果，包括用求平均或者其他统计分析方法得出的结果。
5. 一个并联谐振电路的参数值为$\alpha = 80$ Np/s，$\omega_d = 1200$ rad/s。如果$\mathbf{s} = -2\alpha + j\omega_d$时阻抗的幅度为400 Ω，求$Q_0$，$R$，$L$和$C$的值。
6. 二端口网络如图16.47所示，求谐振频率。
7. 电路如图16.1所示，设$R = 1$ MΩ，$L = 1$ H，$C = 1$ μF，电流$\mathbf{I} = 10\angle 0°$ μA。(a) 求ω_0和Q_0; (b) 画出$|\mathbf{V}|$随ω变化的曲线，995 rad/s < ω < 1005 rad/s。
8. 网络如图16.48所示，求: (a) 谐振频率ω_0; (b) $\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。

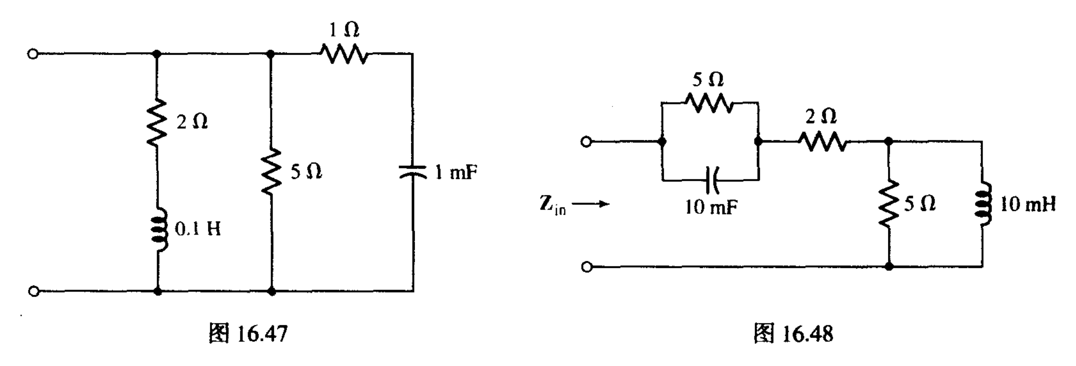


图 16.47　　图 16.48

9. 一个并联谐振电路阻抗的极点为$\mathbf{s} = -50 \pm j1000$ s^{-1}，零点在原点处。假设$C = 1$ μF。(a) 求L和R的值; (b) 计算$\omega = 1000$ rad/s时的$\mathbf{Z}$。
10. 设计一个用于接收调幅广播的并联谐振电路，采用可变电感器进行调谐，调谐范围覆盖调幅广播的频带，即从535 kHz至1605 kHz，在频带的一端Q_0值为45，在整个频带内$Q_0 \leqslant 45$。设$R = 20$ kΩ，求C，L_{min}和L_{max}的值。
11. (a) 求图16.49所示网络的$\mathbf{Y}_{in}$; (b)求该网络的ω_0和$\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。
12. 网络如图16.50所示，求$t > 0$时的谐振频率。

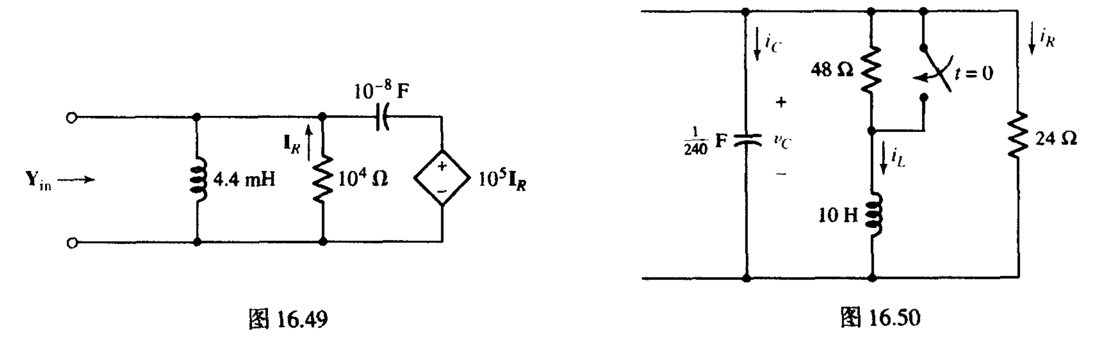


图 16.49　　图 16.50

13. 网络如图16.51所示，求$t > 0$时的谐振频率。
14. (a) 电路如图16.52所示，设$L = 1$ mH，$C = 1$ mF，R的值能够使$\alpha = 100$ s^{-1}。确定谐振频率以及谐振时的阻抗$\mathbf{Z}_{in}$; (b) 用PSpice仿真对答案进行验证。(提示: 利用VAC电源，应包含可忽略的串联小电阻，从而可以避免自动执行DC偏置计算时电感与电源的短路。)

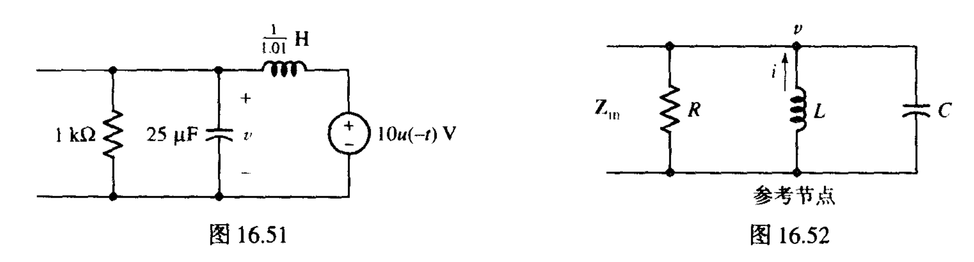


图 16.51　　图 16.52

15. (a) 电路如图16.52所示，设$L = 1$ mH，R的值可使$\alpha = 50\ \text{s}^{-1}$，$C$的值可使$\omega_d = 5000$ rad/s。确定谐振频率以及谐振时的阻抗$\mathbf{Z}_{in}$；(b) 用PSpice仿真对答案进行验证。（提示：利用VAC电源，应包含可忽略的串联小电阻，从而可以避免自动执行DC偏置计算时电感与电源的短路。）

16.2 带宽和高Q值电路

16. 某并联谐振电路的$\omega_0 = 100$ rad/s，$Q_0 = 80$，$C = 0.2\ \mu$F。(a) 求R和L的值；(b) 利用近似方法画出$|\mathbf{Z}|$随ω的变化曲线。
17. 某并联谐振电路的$\omega_1 = 103$ rad/s，$\omega_2 = 118$ rad/s，$|\mathbf{Z}(j105)| = 10\ \Omega$，采用精确的表达式求出$R$，$L$和$C$的值。
18. 某并联谐振电路的$\omega_0 = 30$ krad/s，$Q_0 = 10$，$R = 600\ \Omega$。(a) 求带宽；(b) 计算$\omega = 28$ krad/s时的N值；(c) 采用近似关系式求$\mathbf{Z}_{in}(j28\ 000)$；(d) 求$\mathbf{Z}_{in}(j28\ 000)$的精确值；(e) 采用近似方法计算频率为28 krad/s时的$|\mathbf{Z}_{in}|$和ang $\mathbf{Z}_{in}$，其误差百分率是多少？
19. 并联谐振电路的谐振频率为400 Hz，相应的$Q_0 = 8$，$R = 500\ \Omega$。如果电路的输入电流为2 mA，采用近似方法求下列情况下该电流的频率：(a) 电路两端的电压幅度为0.5 V；(b)流过电阻的电流幅度为0.5 mA。
20. 并联谐振电路的$\omega_0 = 1$ Mrad/s，$Q_0 = 10$，设$R = 5$ kΩ，求：(a) L；(b) 使$|\mathbf{Z}_{in}| = 2$ kΩ的频率且该频率大于ω_0；(c) 使ang $\mathbf{Z}_{in} = -30°$的频率。
21. 采用较好的近似方法对图16.53所示电路进行近似。(a) 求ω_0；(b) 计算谐振时的$\mathbf{V}_1$值；(c) 计算比谐振频率大15 krad/s时的$\mathbf{V}_1$值。
22. (a) 利用谐振定义求图16.54所示网络的ω_0；(b) 求$\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$。

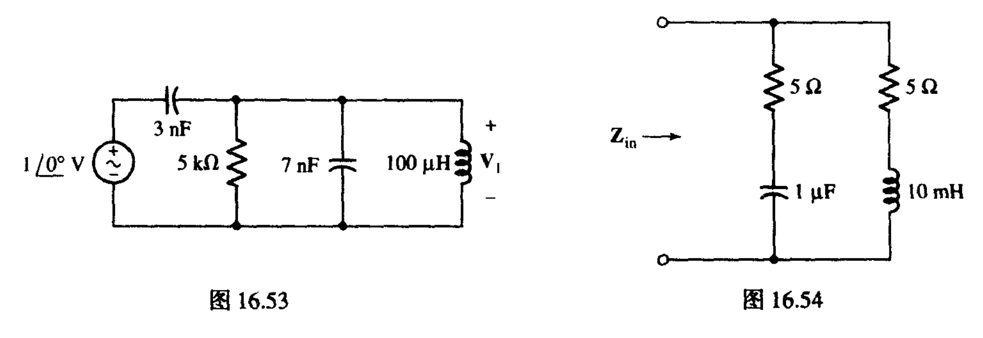
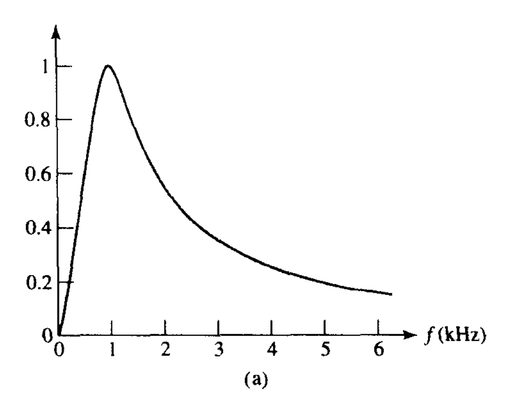


图 16.53　　图 16.54

23. 一个并联谐振电路的$f_0 = 1000$ Hz，$Q_0 = 40$，$|\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)| = 2$ kΩ，利用近似关系式求：(a) 频率等于1010 Hz时的$\mathbf{Z}_{in}$；(b) 近似方法相对比较准确的频率范围。


24. 求图 16.55 所示各响应曲线的带宽。



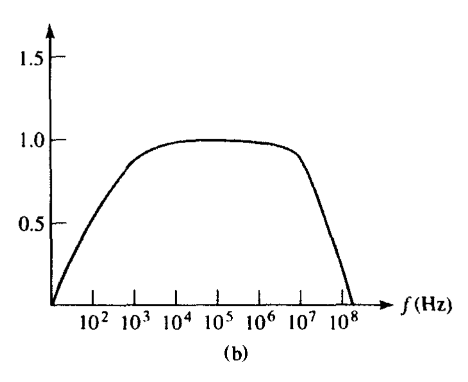


图 16.55

25. 已知并联谐振电路的带宽为 1 MHz，下半功率频率 $f_1 = 5.5$ kHz。(a) 上半功率频率等于多少（用 Hz 表示）？(b) 电路的谐振频率 f_0 等于多少？(c) 谐振时电路的品质因数等于多少？
26. 已知并联谐振电路的带宽为 1 GHz，下半功率频率 $f_1 = 75.3$ MHz。(a) 上半功率频率等于多少（用 Hz 表示）？(b) 电路的谐振频率 f_0 等于多少？(c) 谐振时电路的品质因数等于多少？
27. (a) 电路的下半功率频率为 1000 rad/s，上半功率频率为 4000 rad/s，最大电压幅度等于 10 V，画出电压响应曲线；(b) 电路的谐振频率等于多少？(c) 电路的带宽等于多少？(d) 谐振时电路的品质因数等于多少？
28. (a) 如果图 16.54 所示电路中 1 μF 电容被 330 pF 的电容取代，求新电路的谐振频率；(b) 用 PSpice 对答案进行验证。（提示：利用 VAC 电源，仿真时频率覆盖若干十倍频程。）
29. 设计一个 *RLC* 并联谐振电路，要求带宽等于 5.5 kHz，下半功率频率为 500 Hz。用 PSpice 仿真对设计结果进行验证。

16.3 串联谐振

30. 由两个 5 Ω 的电阻、4 个 100 μH 的电感和一个 3.3 μF 的电容组成串联谐振网络。(a) 计算电路的谐振频率 ω_0；(b) 计算谐振时电路的品质因数；(c) 确定谐振时的输入阻抗、谐振频率的 0.1 倍处的输入阻抗、谐振频率的 10 倍处的输入阻抗。
31. 已知串联谐振电路的带宽为 3 MHz，下半功率频率 $f_1 = 17$ kHz，确定：(a) 上半功率频率（用 Hz 表示）；(b) 电路的谐振频率 f_0；(c) 谐振时电路的品质因数。
32. (a) 确定串联 *RLC* 谐振电路（$R = 1\ \Omega$，$L = 1$ mH，$C = 2$ mF）在谐振频率点上的阻抗；(b) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。（提示：在电容两端并联一个非常大的电阻可以避免因不存在到地的直流通路而产生的错误信息。）
33. (a) 确定串联 *RLC* 谐振电路（$R = 1\ \text{k}\Omega$，$L = 1\ \mu$H，$C = 2\ \mu$F）在谐振频率点上的阻抗；(b) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。（提示：在电容两端并联一个非常大的电阻可以避免因不存在到地的直流通路而产生的错误信息。）
34. (a) 采用近似法画出图 16.56 所示电路的 $|\mathbf{V}_{out}|$ 随频率 ω 变化的曲线；(b) 求 $\omega = 9$ rad/s 时 $\mathbf{V}_{out}$ 的精确值。

35. 一个串联谐振网络由一个50 Ω的电阻、4 mH的电感和0.1 μF的电容组成。计算下列数值：(a) ω_0; (b) f_0; (c) Q_0; (d) $\mathcal{B}$; (e) ω_1; (f) ω_2; (g) 45 krad/s时的$\mathbf{Z}_{in}$; (h) 45 krad/s时电容阻抗幅度与电阻阻抗幅度的比值。

36. 推导图16.57所示电路的$\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$，然后求：(a) ω_0; (b) Q_0。

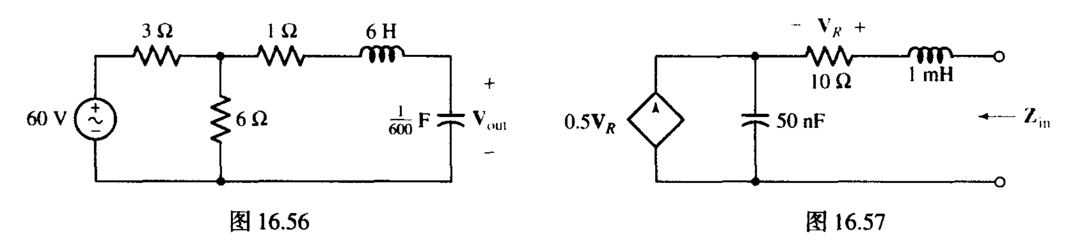


图 16.56　　　　图 16.57

37. 观察图16.58所示的电路，关注电源的幅度。现在假定在实验室里建立了这个电路，你能否将手放到电容的两端？画出$|\mathbf{V}_C|$随ω变化的曲线以验证答案。

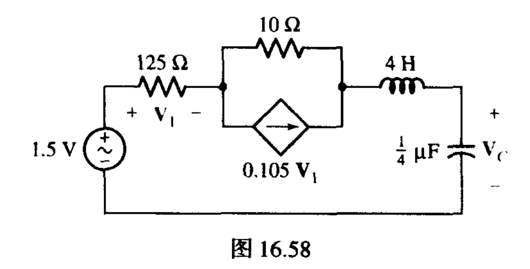


图 16.58

38. 某串联谐振电路的$f_0 = 500$ Hz，$Q_0 = 10$，谐振时$X_L = 500$ Ω。(a) 求R，L和C的值；(b) 如果电源$\mathbf{V}_s = 1\underline{/0^\circ}$ V与电路串联，求频率分别为$f = 450$ Hz、500 Hz和550 Hz时$|\mathbf{V}_C|$的精确值。

39. 由3个元件组成的网络的输入阻抗含有位于$\mathbf{s} = 0$和无穷远处的极点，此外还有一对位于$\mathbf{s} = -20\,000 \pm j80\,000\ \mathrm{s}^{-1}$的零点。如果$\mathbf{Z}_{in}(-10\,000) = -20 + j0$ Ω，求这3个元件的值。

16.4 其他谐振形式

40. 对图16.59所示的网络进行合理的近似，并求出ω_0，Q_0，$\mathcal{B}$，$\mathbf{Z}_{in}(j\omega_0)$和$\mathbf{Z}_{in}(j99\,000)$的值。

41. 在图16.59所示的网络输入端接上一个多大的电阻后可以使该网络的Q_0等于50?

42. 网络如图16.60所示，采用近似方法确定$\mathbf{Z}_{in}$的最小值以及出现最小值时对应的频率。

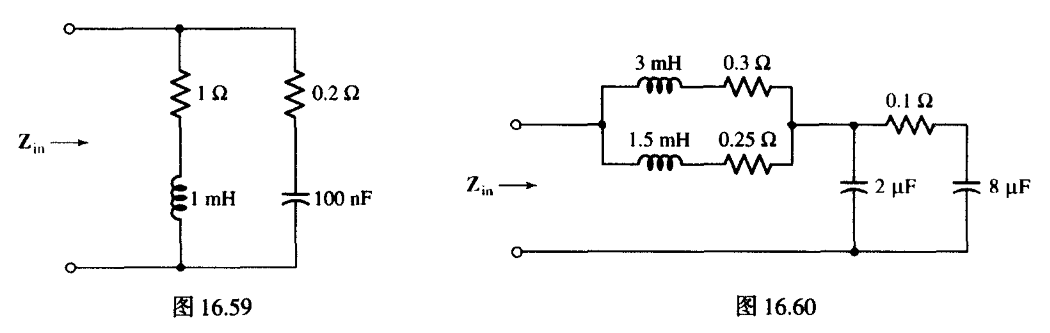


图 16.59　　　　图 16.60

43. 电路如图16.61所示：(a) 画出$|\mathbf{V}|$随频率ω变化的近似响应曲线；(b) 计算$\omega = 50$ rad/s时$\mathbf{V}$的精确值。

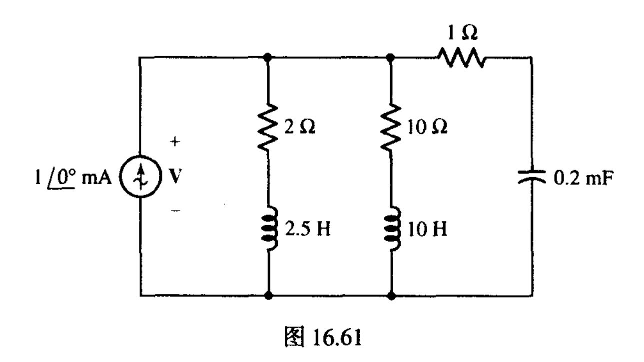


图 16.61

44. (a) 采用近似方法计算图 16.62 所示电路在 $\omega = 2000$ rad/s 的 $|\mathbf{V}_x|$ 值；(b) 求 $|\mathbf{V}_x(j2000)|$ 的精确值。

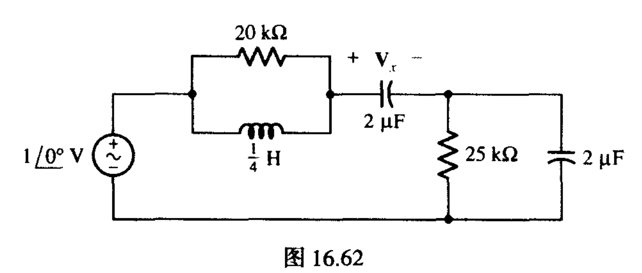


图 16.62

45. 5 kΩ 电阻和 1 μF 电容组成并联结构，确定频率 ω 分别为下列值时该并联组合的等效串联形式：(a) 10^3 rad/s；(b) 10^4 rad/s；(c) 10^5 rad/s。
46. 5 kΩ 电阻和 1 μF 电容组成串联结构，确定频率 ω 分别为下列值时该串联组合的等效并联形式：(a) 10^3 rad/s；(b) 10^4 rad/s；(c) 10^5 rad/s。
47. 470 Ω 电阻和 3.3 μH 电感组成串联结构，确定频率 ω 分别为下列值时该串联组合的等效并联形式：(a) 10^3 rad/s；(b) 10^4 rad/s；(c) 10^5 rad/s。
48. 470 Ω 电阻和 3.3 μH 电感组成并联结构，确定频率 ω 分别为下列值时该并联组合的等效并联形式：(a) 10^3 rad/s；(b) 10^4 rad/s；(c) 10^5 rad/s。
49. (a) 电路如图 16.63 所示，采用近似方法计算 $f = 1.6$ MHz 时的 $|\mathbf{V}_x|$ 值；(b) 计算 $|\mathbf{V}_x(j10 \times 10^6)|$ 的精确值；(c) 用 PSpice 仿真对结果进行验证。

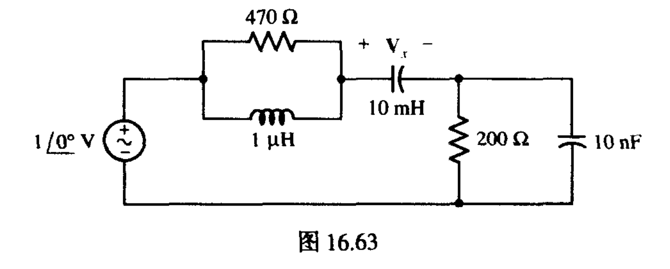
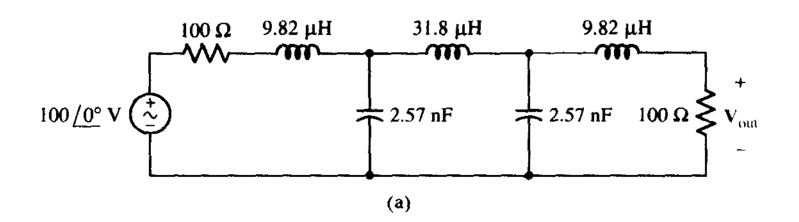


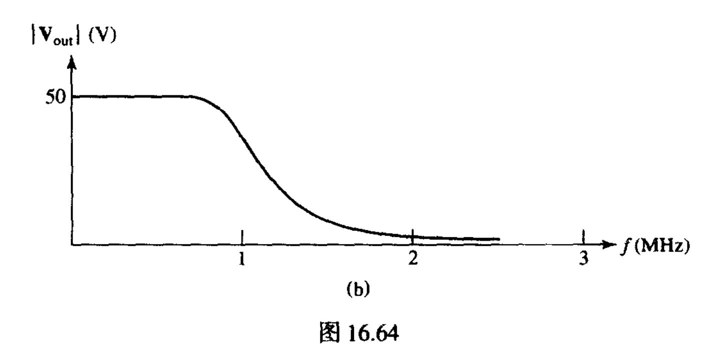
图 16.63

16.5 缩放

50. 图 16.64(a)所示的滤波器响应曲线如图 16.64(b)所示。(a) 对滤波器进行缩放，使得当电源内阻为 50 Ω、负载为 50 Ω 时，其截止频率为 20 kHz；(b)画出缩放后的响应曲线。



(a)



(b)

图 16.64

51. (a) 求图 16.65 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$；(b) 写出按照 $K_m = 2$，$K_f = 5$ 进行缩放后 $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s})$的表达式。(c) 求按照 $K_m = 2$，$K_f = 5$ 缩放的网络元件值并画出新的网络。

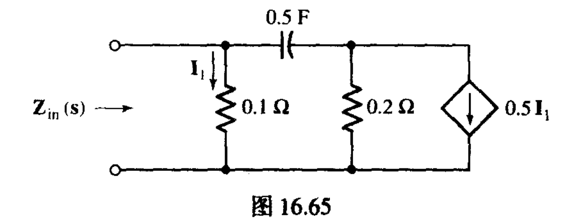


图 16.65

52. (a) 采用合适的近似方法求图 16.66所示电路的 ω_0 和 Q_0; (b) 对电源右端的网络进行缩放，使其谐振频率为 1 Mrad/s; (c)求出缩放后电路的 ω_0 和 B。

53. (a) 对图 16.67 所示的网络进行缩放，缩放因子为 $K_m = 250$，$K_f = 400$，画出缩放后的网络；(b) 求缩放后的网络在 $\omega = 1$ krad/s 时的戴维南等效电路。

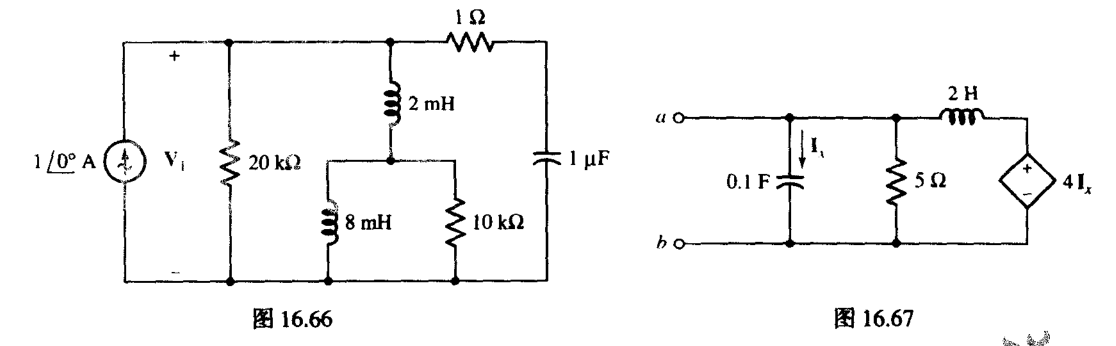


图 16.66　　　　图 16.67

54. 某网络由理想 R，L 和 C 组成，在其输入端接上正弦电流源 $\mathbf{I}_s$，其输出端电压为 $\mathbf{V}_{out}$。如果 $\omega = 50$ rad/s 时的 $\mathbf{I}_s = 1\underline{/0^\circ}$ A，$\mathbf{V}_{out} = 30\underline{/25^\circ}$ V，求出在下列条件下 $\mathbf{V}_{out}$ 的值；如果不可能求出 $\mathbf{V}_{out}$ 的值，则只写出 OTSK[①]即可：(a) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/0^\circ}$ A，$\omega = 50$ rad/s; (b) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40^\circ}$ A,

① 只有幽灵知道。



$\omega = 50$ rad/s; (c) $\mathbf{I}_s = 2\underline{/40^\circ}$ A，$\omega = 200$ rad/s; (d) 对网络进行缩放，缩放因子为 $K_m = 30$，$\mathbf{I}_s = 2\underline{/40^\circ}$ A，$\omega = 50$ rad/s; (e) $K_m = 30$，$K_f = 4$，$\mathbf{I}_s = 2\underline{/40^\circ}$ A，$\omega = 200$ rad/s。

16.6 波特图

55. 求 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$等于下列数值时 H_{dB} 的值: (a) 0.2; (b) 50; (c) 12/(s + 2) + 26/(s + 20)，s = j10。求 H_{dB} 等于下列值时 $|\mathbf{H}(\mathbf{s})|$ 的值: (d) 37.6 dB; (e) −8 dB; (f) 0.01 dB。

56. 画出下列幅度波特图: (a) 20(s + 1)/(s + 100); (b) 2000s(s + 1)/(s + 100)^2; (c) s + 45 + 200/s。(d) 用MATLAB对答案进行验证。

57. 对于图 16.68 所示的电路，画出传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_C/\mathbf{I}_s$ 的幅度波特图和相位波特图。

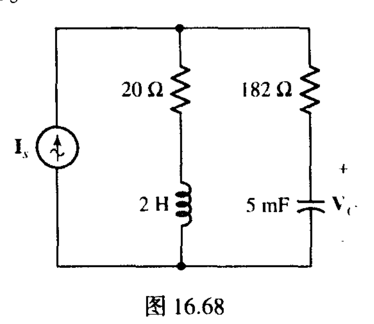


图 16.68

58. (a) 原点设在 $\omega = 1$ 和 $H_{dB} = 0$ 处，画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 5 \times 10^8$ s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1000)^3]的幅度波特图; (b) 写出波特图上所有转角点和所有交点的坐标; (c) 求(b) 中每个转角频率对应的 20 log$|\mathbf{H}(j\omega)|$ 的精确值。

59. (a) 原点设在 $\omega = 1$ 和 ang = 0° 处，画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 5 \times 10^8$ s(s + 100)/[(s + 20)(s + 1000)^3]的相位波特图; (b) 写出相位波特图上所有斜率发生变化的点的坐标; (c) 求(b)中所列各点对应的 ang $\mathbf{H}(j\omega)$的精确值。

60. (a) 画出传输函数$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = 1 + 20/\mathrm{s} + 400/\mathrm{s}^2$的幅度波特图; (b) 当 ω 分别为 5 rad/s 和 100 rad/s 时，比较波特图上的值和精确值; (c) 用 MATLAB 验证波特图。

61. (a) 电路如图 16.69 所示，求 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_R/\mathbf{V}_s$; (b)画出 $\mathbf{H}(\mathbf{s})$的幅度波特图和相位波特图; (c) 求 $\omega = 20$ rad/s 时 H_{dB} 和 ang $\mathbf{H}(j\omega)$的精确值。

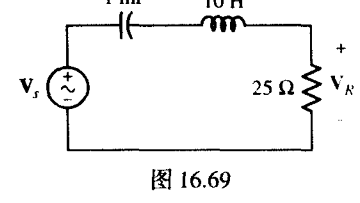


图 16.69

62. 网络如图 16.70 所示，画出传输函数 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的幅度波特图。

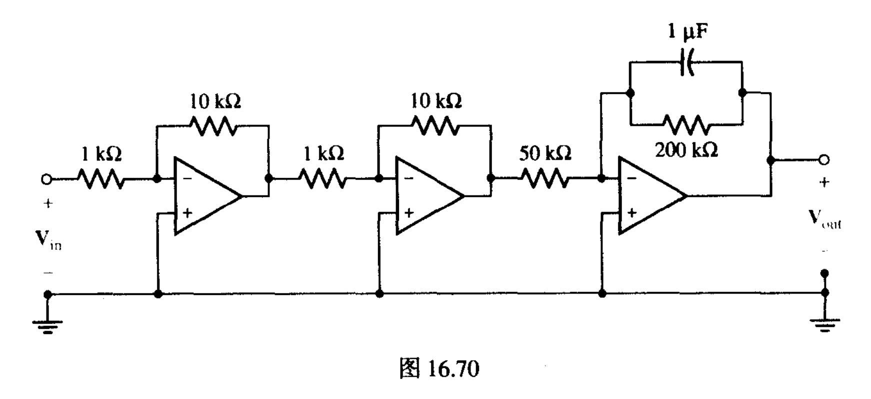


图 16.70

63. 网络如图 16.71 所示: (a) 求 $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$; (b) 画出 H_{dB} 的幅度波特图; (c) 画出 $\mathbf{H}(j\omega)$的相位波特图。

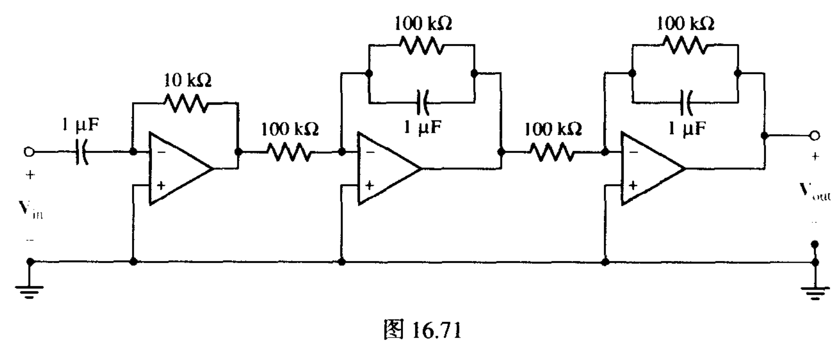


图 16.71

16.4 滤波器

64. 宽吻海豚（bottlenose dolphin）发出的声音频率范围大约是 250 Hz~150 kHz。其中，250 Hz~50 kHz 的频率被认为主要用于"社会交往"，而高于 40 kHz 的"滴答声"被认为主要用于回声定位。设计一个放大电路，用来有选择地放大海豚之间的"交谈"。用麦克风来接收海豚的声音时，可以将麦克风模拟成一个幅度值小于 15 mV 的正弦电压源与一个 1 Ω 电阻串联的模型，传到阻值为 1 kΩ 耳机上的放大了的电压峰值必须接近 1 V。

65. 设计一个滤波器电路，要求滤除人耳听得见的整个频率范围（20 Hz~20 kHz），从而使高频和低频信号通过。用 PSpice 对设计结果进行验证。

66. 设计一个滤波器电路，要求滤除频率大于或等于 1 kHz 的所有信号，用 PSpice 对设计结果进行验证。

67. 一种对高频信号非常敏感的麦克风可以用来检测某些类型的喷气发动机即将发生的故障，遗憾的是，它对由襟翼和副翼的液压系统产生的低频噪声也有响应，从而导致虚警。设计一个滤波器用以除去噪声，同时有选择地放大高频信号，要求放大倍数不小于 100。已知低频噪声信号的能量峰值出现在 20 Hz 附近，频率为 1 kHz 时幅度下降到最大值的 1% 以内，发动机故障信号的起始频率约为 25 kHz。

68. 完成"实际应用"一节中所讨论的设计。(a) 首先设计出合适的中音级；(b) 在反馈电阻的最大值和最小值之间进行调节，对所设计电路的频率响应进行仿真。

69. 尽管人耳所能听到的频率范围普遍认为是 20 Hz ~ 20 kHz，但许多电话系统的带宽却限制在 3 kHz 内。设计一个滤波器，将 20 kHz 带宽的语音转换为 3 kHz "电话带宽"的语音。用最大电压为 150 mV、串联电阻几乎为零的麦克风作为输入，输出设备为一个 8 Ω 的扬声器。要求语音的放大倍数至少为 10。用 PSpice 对设计结果进行验证。

70. 设计一个电路，要求除去接收天线信号中 50*n* Hz 的频率成分，其中 *n* 为整数，取值范围为 1 ~ 4。图 16.39 给出了一个好的"陷波"滤波器（即"陷去"某种频率成分）的结构，只是现在的输出取自电感和电容串联组合上的电压而不是电阻上的电压。将天线信号模拟成幅度值为 1 V 的时变电压源，其串联电阻为零。

71. 监视设备的一个敏感部分受到 60 Hz 工频的负面影响，引入的噪声对输入信号造成了污染。由于该信号的特征决定了不能使用任何类型的低通、高通或者带通滤波器来除去噪声，设计一个"陷波"滤波器，有选择地滤除任何输入该设备的 60 Hz 信号。假设该设备的戴维南等效电阻为无穷大。图 16.39 给出了一个好的"陷波"滤波器结构，只是现在的输出取自电感和电容串联组合上的电压而不是电阻上的电压。

第17章　二端口网络

主要概念

- 单端口网络和二端口网络之间的差别
- 导纳(y)参数
- 阻抗(z)参数
- 混合(h)参数
- 传输(t)参数
- **y 参数，z 参数，h 参数和 t 参数之间的转换方法**
- 使用网络参数进行电路分析的方法

引言

一般网络包括两对端子，一对称为“输入端”，另一对称为“输出端”，这是电子系统、通信系统、自动控制系统、传输和分配系统以及其他许多系统中非常重要的结构单元。在这些系统中，电子信号或者能量从输入端进入，经过网络之后，由输出端输出。输出端可以与下一个网络的输入端相连。在第5章介绍戴维南和诺顿等效电路的时候，我们已经知道并不总是需要了解电路每一部分的工作细节，本章将把这个概念延伸到甚至不知道整个电路内部工作细节的情况。后面将会讲到，只要知道网络是线性的并且能够测出电压值和电流值，就可以用一套参数来描述这样的网络，并且可以估计网络之间是如何相互作用的。

17.1　单端口网络

如果信号进入或者离开网络的一对端子，则这对端子就称为端口。只有一个端子对的网络称为单端口网络，或者简称为单端口。由于不能与单端口内部的任何其他节点进行连接，因此对于图 17.1(a)所示的单端口，显然有 $i_a = i_b$。如果一个网络有不止一个端子对，则这样的网络称为多端口网络。图17.1(b)所示是本章重点介绍的二端口网络。二端口网络每个端口的两个端子上的电流必须相等，因此对于图 17.1(b)所示的二端口网络，有 $i_a = i_b$ 以及 $i_c = i_d$。如果要使用本章介绍的方法，则必须将电源和负载直接连在端口的两个端子上。换句话说，每个端口只能连接一个单端口网络或者其他多端口网络的一个端口。例如，不能将任何设备连接到图17.1(b)所示二端口网络的 a 端子和 c 端子之间。我们可以使用一般的回路分析和节点分析方法来分析此类二端口网络。

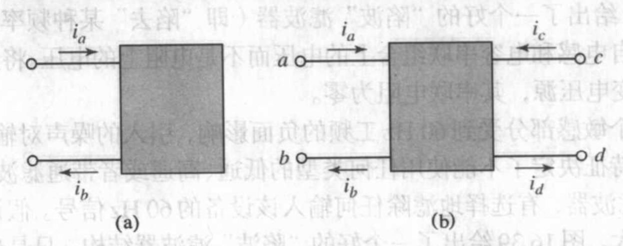


图 17.1　(a) 单端口网络；(b) 二端口网络

二端口网络(或者简称为二端口)的分析方法强调的是网络端子上电流与电压的关系，隐藏的是网络内部电流和电压的细节。在刚开始学习时应该首先熟悉很多重要的参数及其在简化和系统化线性二端口网络分析中的用法。

使用附录 2 介绍的通用网络符号和缩写术语可以非常方便地分析单端口和二端口网络。因此，可以列出一个无源网络的回路方程组：

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{12}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\
\mathbf{Z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{23}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\
\mathbf{Z}_{31}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{32}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \\
\mathbf{Z}_{N1}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{N2}\mathbf{I}_2 + \mathbf{Z}_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + \mathbf{Z}_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N
\end{aligned} \tag{1}$$

可见，每个电流的系数是阻抗 $\mathbf{Z}_{ij}(\mathbf{s})$，而电路的行列式(或者说系数行列式)为

$$\Delta_{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix} \tag{2}$$

上式中假设回路的个数为N,在每个方程中电流按下标顺序排列,而方程的顺序与电流的顺序一致。我们同时也假定在方程组中运用了 KVL，因此每个 $\mathbf{Z}_{ii}$ 项($\mathbf{Z}_{11}, \mathbf{Z}_{22}, \cdots, \mathbf{Z}_{NN}$)的符号为正，而 $\mathbf{Z}_{ij}(i \neq j)$ 项的符号可正可负，具体取决于 $\mathbf{I}_i$ 和 $\mathbf{I}_j$ 的指定参考方向。

如果网络中有受控源，那么回路方程中的系数可以不全是电阻或阻抗。即使这样，我们仍将电路的行列式记为 $\Delta_{\mathbf{Z}}$。

使用附录 2 中的子行列式符号，可以使单端口网络输入阻抗或者策动点阻抗的表达式更为简练。如果二端口网络的一个端口通过一个无源阻抗连接起来(包括开路和短路的情况)，上述结果也可以应用到二端口网络中。

假设图 17.2 所示的单端口网络完全由无源元件和受控源组成，同时假设它是线性的。一个理想电压源 $\mathbf{V}_1$ 接在端口处，电压源的电流在回路 1 中标出。应用格拉姆法则：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{vmatrix}}$$

或者，可以更为简洁地表示为

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 \Delta_{11}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

因此，

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{\Delta_{\mathbf{Z}}}{\Delta_{11}} \tag{3}$$

说明： 格拉姆法则可以参见附录2。

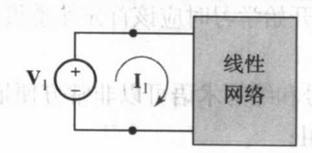


图 17.2 理想电压源 $\mathbf{V}_1$ 与不含独立源的线性单端口网络相连，$\mathbf{Z}_{in} = \Delta_Z/\Delta_{11}$

例题 17.1 计算图 17.3 所示单端口电阻性网络的输入阻抗。

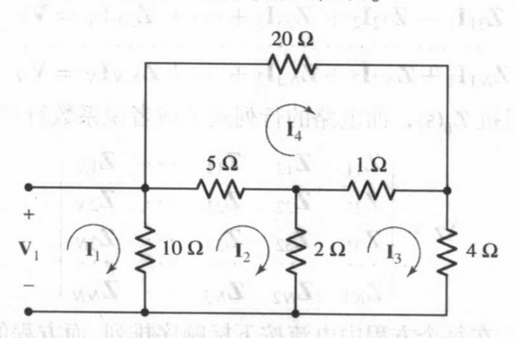


图 17.3 只含有电阻的单端口网络的例子

解： 首先指定如图所示的网孔电流，并且通过观察写出该响应的网孔方程：

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_1 &= 10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \\
0 &= -10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 \\
0 &= -2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4 \\
0 &= -5\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 + 26\mathbf{I}_4
\end{aligned}$$

可以得到电路的行列式为

$$\Delta_{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

该行列式的值为 9680 Ω⁴。不考虑第一行和第一列：

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2778\ \Omega^3$$

因此，由式[3]可以求出输入阻抗为

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{9680}{2778} = 3.485\ \Omega$$

练习

17.1 将图17.4所示的网络在下列端点处断开，使其形成单端口网络，分别求出网络的输入阻抗：(a) a 和 a'；(b) b 和 b'；(c) c 和 c'。

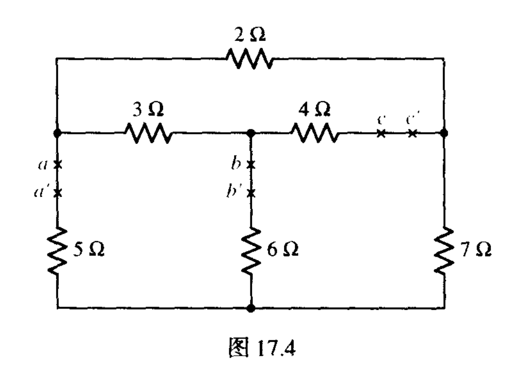


图 17.4

答案：9.47 Ω；10.63 Ω；7.58 Ω。

例题 17.2　求出图 17.5 所示网络的输入阻抗。

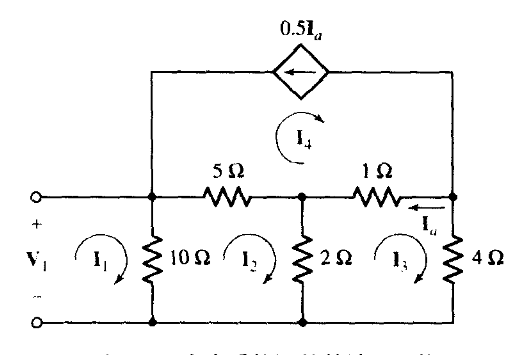


图 17.5　含有受控源的单端口网络

解：首先可以列出含有 4 个网孔电流的 4 个网孔方程：

$$
\begin{aligned}
10\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 \qquad\qquad\qquad &= \mathbf{V}_1 \\
-10\mathbf{I}_1 + 17\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3 - 5\mathbf{I}_4 &= 0 \\
- \ 2\mathbf{I}_2 + 7\mathbf{I}_3 - \ \mathbf{I}_4 &= 0
\end{aligned}
$$

以及

$$\mathbf{I}_4 = -0.5\mathbf{I}_a = -0.5(\mathbf{I}_4 - \mathbf{I}_3)$$

或

$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

因此可以写出

$$\Delta_\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590\ \Omega^3$$

而

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159\ \Omega^2$$

于是得到

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \tfrac{590}{159} = 3.711\ \Omega$$

同样可以采用熟悉的节点方程得到输入导纳：

$$\mathbf{Y}_{\text{in}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{in}}} = \frac{\Delta_{\mathbf{Y}}}{\Delta_{11}} \tag{4}$$

其中，Δ_{11} 表示 $\Delta_{\mathbf{Y}}$ 的子行列式。

练习

17.2 列出图17.6所示电路的节点方程组，计算$\Delta_{\mathbf{Y}}$，然后计算从以下两点看进去的输入导纳：(a) 节点1和参考节点；(b) 节点2和参考节点。

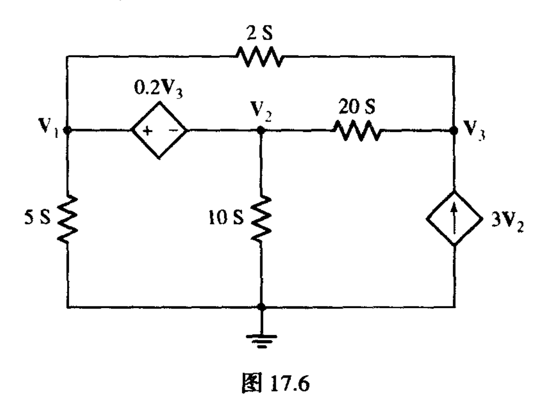


图 17.6

答案：10.68 S；13.16 S。

例题 17.3 再次使用式[4]求图17.7（即图17.3）所示网络的输入阻抗。

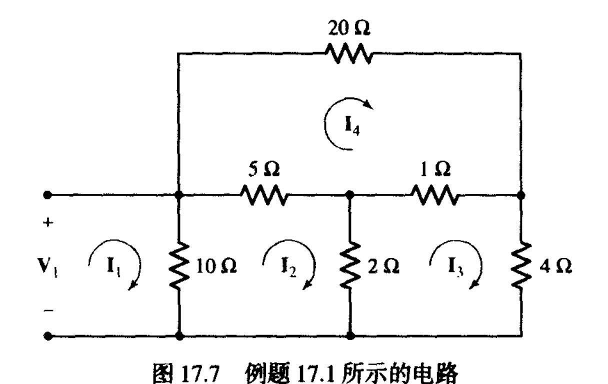


图 17.7 例题 17.1 所示的电路

解：我们首先在图17.7所示的电路中从左到右依次设定节点电压为$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$和$\mathbf{V}_3$，并且取底部的节点为参考节点，然后可以列出系统的导纳矩阵为

$$\Delta_{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.3473\ \text{S}^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & -1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21\ \text{S}^2$$

因此，

$$\mathbf{Y}_{in} = \frac{0.3473}{1.21} = 0.2870\ \text{S}$$

相应可得

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{1}{0.287} = 3.484\ \Omega$$

这一结果在舍入误差允许的范围内与前面求得的结果一致（在计算过程中只保留4位小数）。

本章后面的习题8和习题9给出了由运放构成的单端口网络的例子。这些习题说明可以从只含有电阻的无源元件中得到负电阻，也可以由电阻和电容来模拟电感。

17.2　导纳参数

现在将注意力转移到二端口网络上。假设后面所有讨论的网络均由线性元件组成，并且不含有独立源，但可以含有受控源。对于一些特殊情况，还将对网络给出进一步的限定条件。

考虑图17.8所示的二端口网络，输入端的电压和电流为 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}_1$，输出端的电压和电流为 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$。上端导线的电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的方向通常取为流入网络的方向（下端导线的电流方向则为流出网络的方向）。因为该网络是线性的并且不包含任何独立源，所以 $\mathbf{I}_1$ 可以看做两个分量的叠加，其中一个由 $\mathbf{V}_1$ 引起，另一个由 $\mathbf{V}_2$ 引起。同样可以由两个分量的叠加得到 $\mathbf{I}_2$，于是可以得到下面的方程组：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \quad [5]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \quad [6]$$

其中，$\mathbf{y}$ 只是常数，或者目前为止还是未知系数。但是，必须弄清楚它们的量纲一定是A/V或S。因此，它们被称为 $\mathbf{y}$（或导纳）参数，并由式[5]和式[6]给出其定义。

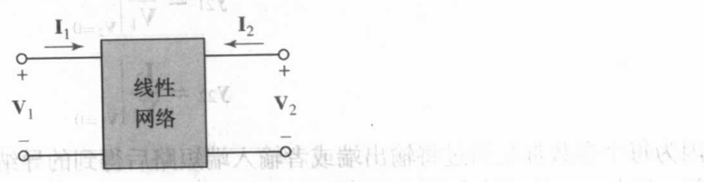


图17.8　标出了端口电压和电流的一般二端口网络模型，该二端口网络由线性元件组成，可能含有受控源，但不含任何独立源

$\mathbf{y}$ 参数以及本章后面将要定义的其他参数用矩阵表示更为简洁。定义（2 × 1）的列矩阵 $\mathbf{I}$ 为

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad [7]$$

（2 × 2）的 $\mathbf{y}$ 参数方阵为

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \quad [8]$$

（2 × 1）的列矩阵 $\mathbf{V}$ 为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad [9]$$

于是，可以写出矩阵方程 $\mathbf{I} = \mathbf{yV}$，或者写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

将上式右边的两个矩阵相乘，得到等价形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

上述两个（2×1）的列矩阵必须相等，即各对应元素必须相等，因此得到定义式[5]和式[6]。

说明： 本书用来表示矩阵的符号是标准的，但也可能容易与前面表示向量或者一般复数量的符号相混淆。但是根据上下文，应该可以清楚地知道这些符号所代表的物理意义。

通过直接观察式[5]和式[6]是理解 y 参数物理意义的最有用的非正式方法。例如，在式[5]中，如果令 $\mathbf{V}_2$ 为零，则可以看到 $\mathbf{y}_{11}$ 是 $\mathbf{I}_1$ 与 $\mathbf{V}_1$ 的比值，因此可以将 $\mathbf{y}_{11}$ 看成是输出端短路（$\mathbf{V}_2 = 0$）时在输入端测得的导纳。因为我们可以很容易做到将输出端短路，所以将 $\mathbf{y}_{11}$ 形象地称为短路导纳。另外，也可以将 $\mathbf{y}_{11}$ 理解为输出端短路时输入端所测得的阻抗的倒数，但是用导纳来描述显然更加直接。其实，参数的名称并不重要，重要的是式[5]和式[6]应满足的条件以及网络应满足的条件。当加到网络的条件确定以后，可以通过电路分析（或者对实际电路进行实验）直接得到这些参数。令 $\mathbf{V}_1 = 0$（输入端短路）或者 $\mathbf{V}_2 = 0$（输出端短路），可以将每个 y 参数表示为电流与电压比的形式。

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad [10]$$

$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \qquad [11]$$

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad [12]$$

$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0} \qquad [13]$$

因为每个参数都是通过将输出端或者输入端短路后得到的导纳，所以也将 y 参数称为短路导纳参数。其中，$\mathbf{y}_{11}$ 的具体名称是短路输入导纳，$\mathbf{y}_{22}$ 的具体名称是短路输出导纳，$\mathbf{y}_{12}$ 和 $\mathbf{y}_{21}$ 的具体名称为短路转移导纳。

例题 17.4 求图 17.9 所示的电阻性二端口网络的 4 个短路导纳参数。

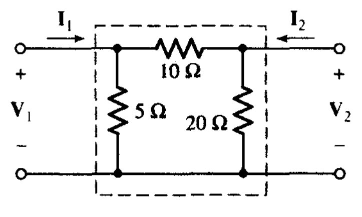


图 17.9 一个电阻性二端口网络

解： 运用式[10]~式[13]可以很容易地求得所需要的参数，这些公式可以直接从定义式[5]和式[6]得到。为了求出 $\mathbf{y}_{11}$，将输出端短路并且求出 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1$ 的比值。即令 $\mathbf{V}_1 = 1$ V，则 $\mathbf{y}_{11} = \mathbf{I}_1$。观察

图 17.9，显然可以求得当输入端电压为 1 V 且输出端短路时，输入电流为($\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$)，即 0.3 A。因此，

$$\mathbf{y}_{11}=0.3\ \mathrm{S}$$

为了求出 $\mathbf{y}_{12}$，将输入端短路并在输出端接上 1 V 电压，这时，输入电流流过短路线且 $\mathbf{I}_1=-\frac{1}{10}$ A。因此，

$$\mathbf{y}_{12}=-0.1\ \mathrm{S}$$

采用类似的方法可得

$$\mathbf{y}_{21}=-0.1\ \mathrm{S}\qquad \mathbf{y}_{22}=0.15\ \mathrm{S}$$

因此，描述该二端口网络的导纳参数形式的方程为

$$\mathbf{I}_1 = 0.3\mathbf{V}_1-0.1\mathbf{V}_2 \tag{14}$$

$$\mathbf{I}_2 = -0.1\mathbf{V}_1+0.15\mathbf{V}_2 \tag{15}$$

和

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0.3 & -0.1\\ -0.1 & 0.15\end{bmatrix}\quad \text{（所有单位均为 S）}$$

由此可以看出，没有必要通过式[10]~式[13]逐个求解这些参数，而是可以一次性地把它们全部求解出来。

例题 17.5　在图 17.9 所示的网络中指定节点电压 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$，并用它们表示电流 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。

解：已知：

$$\mathbf{I}_1=\frac{\mathbf{V}_1}{5}+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{10}=0.3\mathbf{V}_1-0.1\mathbf{V}_2$$

以及

$$\mathbf{I}_2=\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{10}+\frac{\mathbf{V}_2}{20}=-0.1\mathbf{V}_1+0.15\mathbf{V}_2$$

以上两个公式与式[14]和式[15]是相同的，可以从中直接得出 4 个 $\mathbf{y}$ 参数。

练习

17.3　电路如图 17.10 所示，通过添加适当的 1 V 电压源和短路线，计算：(a) $\mathbf{y}_{11}$；(b) $\mathbf{y}_{21}$；(c) $\mathbf{y}_{22}$；(d) $\mathbf{y}_{12}$。

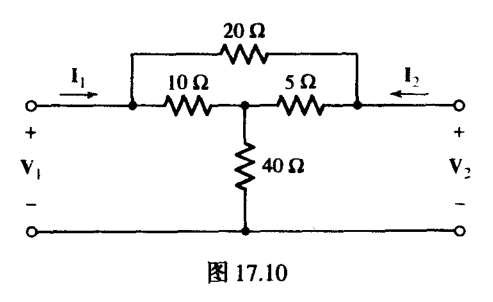


图 17.10

答案：0.1192 S；−0.1115 S；0.1269 S；−0.1115 S。

一般来说，当只要确定一个参数的时候，使用式[10]、式[11]、式[12]或式[13]会简单一些。但是如果需要确定所有的参数，更为简单的方法是设定输入和输出节点的电压为$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{V}_2$，并且设定其他内部节点相对于参考节点的内部节点电压，然后求出一般解。

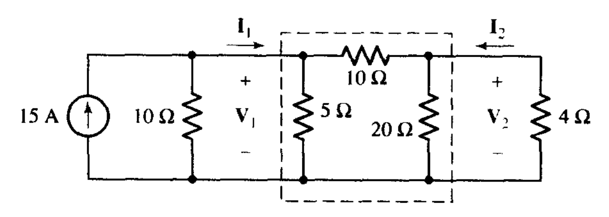


图 17.11 将图 17.9 所示电阻性二端口网络的两端分别接上单端口网络

为了说明如何应用上述方程组，现在分别在两个端口接上一个单端口网络。考虑例题 17.4 所示的二端口网络，现重画在图 17.11 中。将该二端口网络的输入端接上一个实际电流源，输出端与一个电阻性负载相连。这时，$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{I}_1$之间必然存在与该二端口网络无关的某种关系，而这个关系可以只根据外部电路求出。如果将 KLC（或者列出一个节点方程）应用于输入端，则

$$\mathbf{I}_1 = 15 - 0.1\mathbf{V}_1$$

对于输出端，由欧姆定律得

$$\mathbf{I}_2 = -0.25\mathbf{V}_2$$

将式[14]和式[15]中的$\mathbf{I}_1$和$\mathbf{I}_2$的表达式代入，可得

$$\begin{aligned} 15 &= \ \ 0.4\mathbf{V}_1 - 0.1\mathbf{V}_2 \\ 0 &= -0.1\mathbf{V}_1 + 0.4\mathbf{V}_2 \end{aligned}$$

从而得到

$$\mathbf{V}_1 = 40\ \text{V} \qquad \mathbf{V}_2 = 10\ \text{V}$$

同样，可以很容易地得到输入和输出电流：

$$\mathbf{I}_1 = 11\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_2 = -2.5\ \text{A}$$

因此便可知道这个电阻性二端口网络完整的端口特性。

对于这样一个简单的例子，并不能很明显地看出二端口网络分析的优点，但是很显然，对于一个更加复杂的二端口网络，可以通过$\mathbf{y}$参数很容易地得到不同端口条件下的网络响应。因为这时我们只需要将输入端口的$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{I}_1$联系起来，同时将输出端口的$\mathbf{V}_2$和$\mathbf{I}_2$联系起来即可。

由前面例题中的结果可以看出，$\mathbf{y}_{12}$和$\mathbf{y}_{21}$均等于−0.1 S。对于由 3 个一般阻抗元件$\mathbf{Z}_A$，$\mathbf{Z}_B$和$\mathbf{Z}_C$组成的Π网络，证明它们相同并不困难。但是对于一般电路，推导出$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$的充分条件比较困难，不过可以借助行列式符号来推导。我们下面将看到能否用阻抗的行列式及其子行列式来表示式[10]至式[13]所示的关系。

因为我们只关心二端口网络，而不关注其所连接的网络，因此可以用两个理想电压源来代表$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{V}_2$。令$\mathbf{V}_2 = 0$（即将输出端短路）并求出输入阻抗，可以得到式[10]。这时，原网络变为一个单端口网络，而单端口网络输入阻抗的求解已经在 17.1 节中做了介绍。选取回路 1，使之包含输入端，并令$\mathbf{I}_1$为该回路的电流，令（$-\mathbf{I}_2$）为回路 2 的电流，可以用任何合适的符号表示其他回路电流，因此，

$$\mathbf{Z}_{\text{in}}\big|_{\mathbf{V}_2=0} = \frac{\Delta_\mathbf{Z}}{\Delta_{11}}$$

从而得出

$$\mathbf{y}_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

同样，

$$\mathbf{y}_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

为了求出 $\mathbf{y}_{12}$，令 $\mathbf{V}_1=0$ 并且将 $\mathbf{I}_1$ 表示成 $\mathbf{V}_2$ 的函数。于是 $\mathbf{I}_1$ 可以表示为下面的比值形式：

$$\mathbf{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ -\mathbf{V}_2 & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}}$$

因此，

$$\mathbf{I}_1=-\frac{(-\mathbf{V}_2)\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

和

$$\mathbf{y}_{12}=\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

运用类似的方法，可以证明：

$$\mathbf{y}_{21}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\mathbf{Z}}}$$

可以看出，$\mathbf{y}_{12}$ 和 $\mathbf{y}_{21}$ 是否相等取决于 $\Delta_{\mathbf{Z}}$ 的两个子行列式 Δ_{12} 和 Δ_{21} 是否相等。这两个子行列式分别为

$$\Delta_{21}=\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N}\\ \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \mathbf{Z}_{42} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}$$

和

$$\Delta_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{23} & \mathbf{Z}_{24} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N}\\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{33} & \mathbf{Z}_{34} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N}\\ \mathbf{Z}_{41} & \mathbf{Z}_{43} & \mathbf{Z}_{44} & \cdots & \mathbf{Z}_{4N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N3} & \mathbf{Z}_{N4} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN}\end{vmatrix}$$

首先将其中一个子行列式（例如 Δ_{21}）的行和列互换，这样不会改变行列式的值（任何一本大学代数的课本中都能找到相关的证明过程），然后将每个互阻抗 $\mathbf{Z}_{ij}$ 替换为 $\mathbf{Z}_{ji}$，即令：

$$\mathbf{Z}_{12}=\mathbf{Z}_{21}\qquad \mathbf{Z}_{23}=\mathbf{Z}_{32}\quad 等$$

对于3种熟悉的无源元件电阻、电容和电感来说，$\mathbf{Z}_{ij}$和$\mathbf{Z}_{ji}$显然是相等的，对于互感而言，它们也是相等的。但是，并不是所有包含在二端口网络中的元件都满足这样的关系。尤其值得一提的是，受控源、回转器（回转器是对霍尔效应器件和含有铁氧体的波导进行建模的有用模型）通常就不满足这个关系。在比较窄的角频率范围内，回转器使输出端向输入端传输的信号比沿相反方向传输的信号附加180°的相位差，因此$\mathbf{y}_{12} = -\mathbf{y}_{21}$。而另一类无源元件也会导致$\mathbf{Z}_{ij}$和$\mathbf{Z}_{ji}$不相等，但它们是非线性的元件。

所有满足$\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji}$的元件称为双向元件，而只包含双向元件的电路称为双向电路。因此，可以看到双向二端口网络的一个重要性质是：

$$\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$$

根据这个特性，可以得到互易定理：

> 对于任何线性无源双向网络，如果支路x中唯一电压源$\mathbf{V}_x$在支路y中产生的电流响应为$\mathbf{I}_y$，因此将电压源从支路x移到支路y后，将在支路x中产生电流响应$\mathbf{I}_y$。

如果我们考虑的是电路的导纳行列式，并且已经证明导纳行列式$\Delta_\mathbf{Y}$的子行列式Δ_{12}和Δ_{21}相等，则可以得到互易定理的对偶形式：

> 对于任何线性无源双向网络，如果节点x和x'之间唯一的电流源$\mathbf{I}_x$在节点y和y'之间产生的电压为$\mathbf{V}_y$，那么将电流源从节点x和x'之间移到y和y'之间后，将在节点x和x'之间产生电压响应$\mathbf{V}_y$。

17.3节将重点讨论二端口网络包含受控源时的情况。

说明： 这个定理的一种简单描述为：对于任何线性无源双向电路，将理想电压源和理想安培表的位置互换，安培表的读数不变。

说明： 换句话说，对于任何线性无源双向电路，将理想电流源和理想伏特表的位置互换，伏特表的读数不变。

练习

17.4 在图17.10所示的电路中，假设$\mathbf{I}_1$和$\mathbf{I}_2$表示理想电流源，输入端的节点电压为$\mathbf{V}_1$，输出端的节点电压为$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{V}_x$为中间节点相对于参考节点的电压。试列出3个节点方程，消去$\mathbf{V}_x$后得到两个方程，然后将这两个方程重新整理为式[5]和式[6]的形式，从而使所有4个y参数可以直接从公式中得到。

17.5 求图17.12所示二端口网络的y参数。

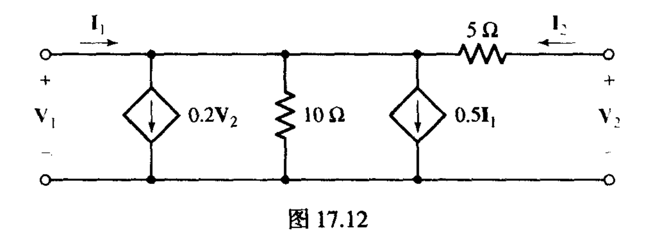


图 17.12

答案： 17.4: $\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$（单位为S）；17.5: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$（单位为S）。

17.3　一些等效网络

在分析电子电路时，通常有必要将一些有源设备(可能同时包含与它相关的无源电路)用一个等效的二端口网络来替换，这个二端口网络一般只包含3~4个阻抗。这里说的等效仅仅局限于小信号和单频的情况，或者说是在一个有限的频率范围内。这种等效也是非线性电路的线性近似。但是，如果要分析的网络包含很多电阻、电容和电感以及晶体管(例如2N3823)，那么将无法运用以前讲过的方法来分析这个电路。如果要分析这样的电路，首先必须将晶体管用其线性模型来替换，就像在第6章中用线性模型来替换运放那样。**y** 参数模型就是这样一种线性二端口模型，它经常在高频电路中使用。另一种常用的晶体管线性模型将在17.5节中介绍。

以下两个公式定义了短路导纳参数：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \tag{16}$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{17}$$

式[16]与式[17]的形式与具有两个非参考节点电路的一对节点方程类似。一般来说，当$\mathbf{y}_{12}$和$\mathbf{y}_{21}$不相等时，求解式[16]和式[17]的等效电路比较困难，这时需要运用一些技巧来得到一对相等的互系数。在式[17]的右边同时加上和减去$\mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1$(我们希望在式[17]的右边看到这一项)，得到

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 + (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 \tag{18}$$

即

$$\mathbf{I}_2 - (\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1 = \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \tag{19}$$

这时，式[16]和式[19]的右边满足双向电路的对称性。式[19]的左边可以看做是两个电流源的代数和，其中一个是流入节点2的独立源电流源$\mathbf{I}_2$，另一个是流出节点2的受控源电流源$(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$。

下面来看式[16]和式[19]所表示的等效网络。我们首先确定一个参考节点，然后指定节点电压$\mathbf{V}_1$和节点电压$\mathbf{V}_2$。根据式[16]，假设电流$\mathbf{I}_1$流入节点1并在节点1和节点2之间放置一个互导纳$(-\mathbf{y}_{12})$，在节点1和参考节点之间放置导纳$(\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12})$。当$\mathbf{V}_2 = 0$时，$\mathbf{I}_1$与$\mathbf{V}_1$的比值的确等于$\mathbf{y}_{11}$。现在来考虑式[19]，假设电流$\mathbf{I}_2$流入第二个节点，电流$(\mathbf{y}_{21} - \mathbf{y}_{12})\mathbf{V}_1$流出该节点，我们注意到两个节点之间已经放置了合适的导纳$(-\mathbf{y}_{12})$，然后，在节点2和参考节点之间放置导纳$(\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12})$。完成后的电路如图17.13(a)所示。

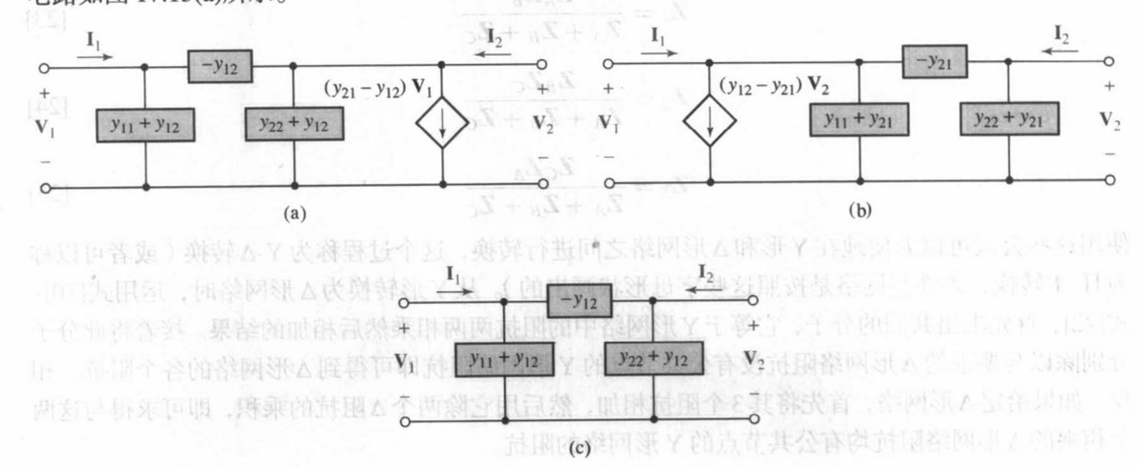


图17.13　(a, b)与任意线性二端口网络等效的二端口网络：(a)中受控源受电压$\mathbf{V}_1$控制，而在(b)中受电压$\mathbf{V}_2$控制；(c)等效的双向网络电路

另一种等效网络可以通过在式[16]的右边同时减去和加上$\mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_2$得到，该等效电路如图17.13(b)所示。

如果二端口网络是双向的，那么$\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}$，则这两个等效网络均可以简化为一个简单的无源Π形网络，它不含受控源。等效的双向二端口网络如图17.13(c)所示。

这些等效电路可以在不同的场合运用。前面已经证明了任何复杂的线性二端口网络（无论含有多少个节点和回路）都存在一个与之等效的二端口网络，而且这个等效的二端口网络不会比图17.13所示的电路复杂。如果我们只对给定网络的端口特性感兴趣，那么使用这些等效电路中的一个可能会比直接使用原网络要简单得多。

图17.14(a)所示的三端网络通常称为阻抗的Δ形连接，而图17.14(b)所示网络称为阻抗的Y形连接。如果这些阻抗之间满足某些特定的条件，则这两种连接形式可以相互转换，并且可以通过使用y参数得到它们之间相互转换的关系。因此可以得到：

$$\mathbf{y}_{11}=\frac{1}{\mathbf{Z}_A}+\frac{1}{\mathbf{Z}_B}=\frac{1}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_3)}$$

$$\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}=-\frac{1}{\mathbf{Z}_B}=\frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}$$

$$\mathbf{y}_{22}=\frac{1}{\mathbf{Z}_C}+\frac{1}{\mathbf{Z}_B}=\frac{1}{\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3/(\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_3)}$$

求解这些方程，可以将$\mathbf{Z}_A$，$\mathbf{Z}_B$和$\mathbf{Z}_C$用$\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$和$\mathbf{Z}_3$来表示：

$$\mathbf{Z}_A=\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \quad [20]$$

$$\mathbf{Z}_B=\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3} \quad [21]$$

$$\mathbf{Z}_C=\frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2+\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3+\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \quad [22]$$

同样，也可以将$\mathbf{Z}_1$，$\mathbf{Z}_2$和$\mathbf{Z}_3$用$\mathbf{Z}_A$，$\mathbf{Z}_B$和$\mathbf{Z}_C$来表示：

$$\mathbf{Z}_1=\frac{\mathbf{Z}_A\mathbf{Z}_B}{\mathbf{Z}_A+\mathbf{Z}_B+\mathbf{Z}_C} \quad [23]$$

$$\mathbf{Z}_2=\frac{\mathbf{Z}_B\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A+\mathbf{Z}_B+\mathbf{Z}_C} \quad [24]$$

$$\mathbf{Z}_3=\frac{\mathbf{Z}_C\mathbf{Z}_A}{\mathbf{Z}_A+\mathbf{Z}_B+\mathbf{Z}_C} \quad [25]$$

使用这些公式可以方便地在Y形和Δ形网络之间进行转换，这个过程称为Y-Δ转换（或者可以称为Π-T转换，条件是网络是按照这些字母形状画出的）。从Y形转换为Δ形网络时，运用式[20]~式[22]，首先求出共同的分子，它等于Y形网络中的阻抗两两相乘然后相加的结果。接着将此分子分别除以与要求的Δ形网络阻抗没有公共节点的Y形网络阻抗即可得到Δ形网络的各个阻抗。相反，如果给定Δ形网络，首先将其3个阻抗相加，然后用它除两个Δ阻抗的乘积，即可求得与这两个相乘的Δ形网络阻抗均有公共节点的Y形网络的阻抗。

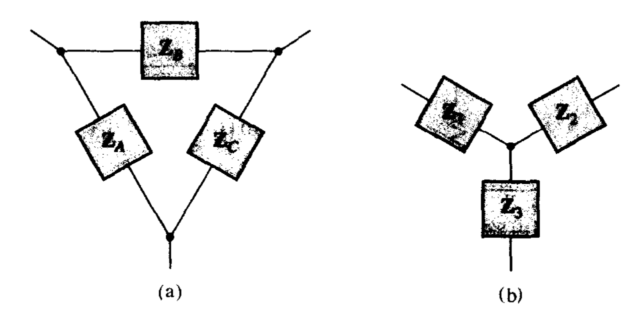


图 17.14　如果图中的 6 个阻抗满足 Δ-Y（或 Π -T）的转换条件，即满足式[20]~式[25]，则(a) 所示的三端口 Δ 网络与(b) 所示的三端口 Y 网络相互等效

说明：读者应该可以回忆起第 5 章中曾经使用过这些有用的关系式，但那时并没有给出详细推导。

这些变换在化简无源网络特别是在化简电阻性网络时通常很有用，此举可以避免进行网孔分析或节点分析。

例题 17.6　求图 17.15(a)所示电路的输入电阻。

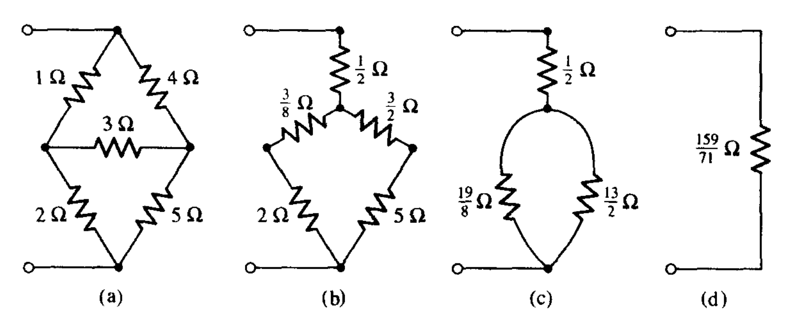


图 17.15　(a) 在第 5 章中曾经讨论过的电阻网络需要求出其输入电阻；(b) 将上端的 Δ 形连接替换为等效的 Y 形连接；(c, d) 将转换后的电路进行串并联连接后，得到等效输入电阻为 $\frac{159}{71}$ Ω

解：首先对图 17.15(a)上端的 Δ 形连接进行 Δ-Y 转换。该 Δ 形连接的 3 个电阻之和为 1+4+3 = 8 Ω，而与顶端节点相连的两个电阻的乘积为 1 × 4 = 4 Ω^2。因此，Y 形连接的上端电阻为 $\frac{4}{8}$ Ω 或 $\frac{1}{2}$ Ω。用同样的方法可以求出另外两个电阻，因此可以得到图 17.15(b)所示的网络。

接下来将得到的串并联电路组合，可以先后得到图 17.15(c)和图 17.15(d)所示的网络。因此，图 17.15(a)所示网络的输入电阻为 $\frac{159}{71}$ Ω 或 2.24 Ω。

下面来看一个如图 17.16 所示的略微复杂的例子。注意，该电路含有一个受控源，因此，Y-Δ 转换不再适用。

例题 17.7　图 17.16 所示电路是晶体管放大电路的近似线性等效电路，其中发射极对应于图中下端的节点，基极对应于输入端上端的节点，而集电极对应于输出端上端的节点。在某些特殊的应用场合下，会在集电极和基极之间连接一个 2000 Ω 的电阻，这将使该电路的分析变得更加困难。确定这个电路的 y 参数。

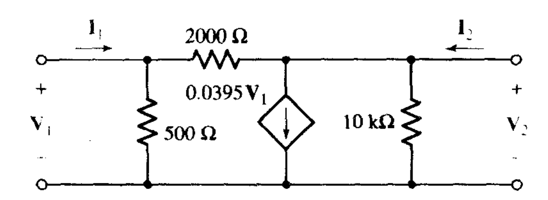


图 17.16 晶体管共发射极电路的线性等效电路，其中集电极和基极之间连接了一个反馈电阻

解： ▶**明确题目要求**

避开具体的电路术语，可以将该网络看成是一个二端口网络，题目要求我们求出其 y 参数。

▶**收集已知信息**

图 17.16 已经标出该了二端口网络的 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$，并且给出了每个元件的值。

▶**设计方案**

我们可以想出好几种方法来分析这个电路。如果我们能够看出它的形式与图17.13(a)所示等效电路的形式相同，那么就可以立即得到它的y参数。如果不能立刻看出这一点，那么可以通过式[10]~式[13]来求得该二端口网络的 y 参数。当然，我们也可以不使用二端口网络的分析方法，而是直接列出方程组。比较而言，在这 3 种方法中，第一种方法要更好一些。

▶**建立一组合适的方程**

通过观察，我们可以发现 $-\mathbf{y}_{21}$ 对应于 2 kΩ 电阻的导纳，$\mathbf{y}_{11}+\mathbf{y}_{12}$ 对应于 500 Ω 电阻的导纳，$\mathbf{y}_{21}-\mathbf{y}_{12}$ 对应于受控电流源的增益，$\mathbf{y}_{22}+\mathbf{y}_{12}$ 对应于 10 kΩ 电阻的导纳，因此可以得到

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2000}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \mathbf{y}_{12}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \mathbf{y}_{12}$$

▶**确定是否还需要其他信息**

从上面列出的方程组可以看出，只要求出了 $\mathbf{y}_{12}$ 的值，就可以求出剩下的 y 参数的值。

▶**尝试求解**

将这些数字输入计算器中，可以得到

$$\mathbf{y}_{12} = -\tfrac{1}{2000} = -0.5\ \text{mS}$$

$$\mathbf{y}_{11} = \tfrac{1}{500} - \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 2.5\ \text{mS}$$

$$\mathbf{y}_{22} = \tfrac{1}{10\,000} - \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 0.6\ \text{mS}$$

和

$$\mathbf{y}_{21} = 0.0395 + \left(-\tfrac{1}{2000}\right) = 39\ \text{mS}$$

最后应用下面的方程组：

$$\mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad [26]$$

$$\mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2 \qquad [27]$$

上述方程中使用的单位是mA，V，mS和kΩ。

▶ 验证结果是否合理或是否与预计相符

直接由电路写出两个节点方程：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2} + \frac{\mathbf{V}_1}{0.5} \quad 或 \quad \mathbf{I}_1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2$$

和

$$-39.5\mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{2} + \frac{\mathbf{V}_2}{10} \quad 或 \quad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

以上两式与直接根据y参数列出的式[26]和式[27]一致。

下面运用式[26]和式[27]来分析在几种不同的工作情况下图17.16所示二端口网络的特性。首先在输入端接上 $1\underline{/0^\circ}$ mA 的电流源，输出端接上 0.5 kΩ（2 mS）的负载，因此两个端口所连接的网络均为单端口网络，且 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1$ 以及 $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{V}_2$ 之间的关系可以由下式得到：

$$\mathbf{I}_1 = 1（对任何\mathbf{V}_1） \qquad \mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$$

现在我们共得到了4个方程，它们分别对应于4个未知数 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$。将两个单端口网络的方程代入式[26]和式[27]，可以得到关于 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的方程组：

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 2.6\mathbf{V}_2$$

求解可得

$$\mathbf{V}_1 = 0.1 \text{ V} \quad \mathbf{V}_2 = -1.5 \text{ V}$$
$$\mathbf{I}_1 = 1 \text{ mA} \quad \mathbf{I}_2 = 3 \text{ mA}$$

这4个值是在指定该二端口网络的输入电流（$\mathbf{I}_1 = 1$ mA）和特定负载（$R_L = 0.5$ kΩ）的情况下得到的。

放大器的性能通常可以用一些具体数值来描述。下面来计算这个反映放大器性能的二端口网络中的4个参数及其含义，我们将在下面定义并计算电压增益、电流增益、功率增益和输入阻抗。

电压增益 $\mathbf{G}_V$ 定义为

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}$$

对于上面的例子，不难计算出 $\mathbf{G}_V = -15$。

电流增益 $\mathbf{G}_I$ 定义为

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}$$

从而可得

$$\mathbf{G}_I = 3$$

下面定义并计算在正弦激励下的功率增益 G_P：

$$G_P = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\text{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 45$$

因为上述这几个增益均大于1，因此这个设备可以称为电压放大器，也可以称为电流放大器或者功率放大器。如果将2 kΩ电阻去掉，功率增益将增大至354。

当放大器与其他设备级联时，为了从前级获得最大的输入功率或者给后级输出最大的功率，通常需要计算其输入阻抗和输出阻抗。输入阻抗 $\mathbf{Z}_{in}$ 定义为输入电压与输入电流的比值：

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 0.1\ \text{k}\Omega$$

这是当输出端接上500 Ω负载后网络提供给电流源的阻抗（当输出端短路时，输入阻抗为 $1/\mathbf{y}_{11}$，即400 Ω）。

需要注意的是，不能同时将每个电源都通过用其内阻抗替换，然后合并电阻或者电导来求出输入电阻。对于上面给出的电路，如果用这样的方法求解，将得到输入阻抗为416 Ω，这个错误显然是将受控源当做独立源看待造成的。如果我们认为输入阻抗在数值上等于当输入电流为1 A时输入端的电压值，那么这个1 A的电流源将使得输入电压为 $\mathbf{V}_1$，而受控源0.0395 $\mathbf{V}_1$ 的作用不可能为零。读者应该还记得，在计算含有一个受控源以及一个或多个独立源的戴维南等效阻抗时，必须令独立源短路或者开路，但是不能用同样的方法对待受控源。当然，如果受控源的控制电压或者控制电流为零，那么受控源本身就不起作用了。出现这种情况有时可以简化电路。

除了 $\mathbf{G}_V$，$\mathbf{G}_I$，$\mathbf{G}_P$ 和 $\mathbf{Z}_{in}$ 以外，还有另一个非常有用的性能参数，这就是输出阻抗 $\mathbf{Z}_{out}$，但需要采用不同的电路结构来求解该参数。

输出阻抗是戴维南等效阻抗的另一种形式，它是指从负载看进去的电路的戴维南等效阻抗。在前面讨论的电路中，假设它受到一个 $1\underline{/0^\circ}$ mA 电流源的驱动，现在将这个独立电流源开路并保留受控源，然后求出从输出端向左看进去的输入阻抗（移去负载）。因此，我们定义：

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{V}_2|_{\mathbf{I}_2 = 1\text{ A}}$$

于是，移去负载电阻并在输出端接上 $1\underline{/0^\circ}$ mA 的电流源（这里使用的单位是V，mA 和kΩ），然后求解 $\mathbf{V}_2$。将这些条件代入式[26]和式[27]，可得

$$0 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 1 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

求解可得

$$\mathbf{V}_2 = 0.1190\ \text{V}$$

即

$$\mathbf{Z}_{out} = 0.1190\ \text{k}\Omega$$

另一种求解输出阻抗的方法是分别求出开路输出电压和短路输出电流，即戴维南阻抗就是输出阻抗：

$$\mathbf{Z}_{out} = \mathbf{Z}_{th} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}}$$

采用这种方法，首先再次使用 $\mathbf{I}_1 = 1$ mA 的独立源，然后将负载断开，即 $\mathbf{I}_2 = 0$，从而得到

$$1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0.5\mathbf{V}_2 \qquad 0 = 39\mathbf{V}_1 + 0.6\mathbf{V}_2$$

因此，

$$\mathbf{V}_{2oc} = -1.857\ \text{V}$$

接下来应用短路条件，令 $\mathbf{V}_2 = 0$ 以及 $\mathbf{I}_1 = 1$ mA，得到

$$\mathbf{I}_1 = 1 = 2.5\mathbf{V}_1 - 0 \qquad \mathbf{I}_2 = 39\mathbf{V}_1 + 0$$

因此，

$$\mathbf{I}_{2sc} = 15.6\ \text{mA}$$

由假设的 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的参考方向，可以得到戴维南阻抗或者输出阻抗为

$$\mathbf{Z}_{\text{out}} = -\frac{\mathbf{V}_{2oc}}{\mathbf{I}_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190\ \text{k}\Omega$$

这个结果与前面求得的结果一致。

现在我们已经有足够的信息来画出如图 17.16 所示电路在 $1\underline{/0^\circ}$ mA 电流源驱动下并连接 500 Ω 负载时二端口网络的戴维南等效电路或者诺顿等效电路了。此时，从负载看进去的诺顿等效电路必然包含一个大小等于短路电流 $\mathbf{I}_{2sc}$ 的电流源，它与输出阻抗并联，如图 17.17(a)所示。同样，从 $1\underline{/0^\circ}$ mA 电流源看进去的戴维南等效电路必须包含一个单独的输入阻抗，如图 17.17(b)所示。

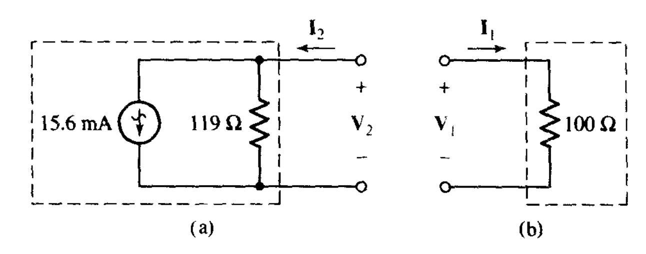


图 17.17　(a) 图 17.16 网络中从输出端向左边看过去的诺顿等效电路，$\mathbf{I}_1 = 1\underline{/0^\circ}$ mA；(b) 当 $\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{V}_2$ mA 时，图 17.16 网络中从输入端向右边看进去的戴维南等效电路

在结束 y 参数的讨论之前，我们应该知道 y 参数在描述如图 17.18 所示二端口网络并联连接时的作用。当我们在 17.1 节中定义一个端口时，曾经强调过流入和流出一个端口的两个端子的电流必须相等，并且不能够在外部将两个端口连接起来。显然，图 17.18 所示的并联连接并不满足这个条件，但是，如果每个二端口网络的输出端口和输入端口都有公共参考节点，并且如果它们在并联后仍有公共参考节点，则并联后所有的端口仍然是端口。这时，对于网络 A：

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{y}_A \mathbf{V}_A$$

其中，

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{A1} \\ \mathbf{I}_{A2} \end{bmatrix} \qquad \text{和} \qquad \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A1} \\ \mathbf{V}_{A2} \end{bmatrix}$$

对于网络 B：

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{y}_B \mathbf{V}_B$$

但是，

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{V} \qquad \text{和} \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B$$

则

$$\mathbf{I} = (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B)\mathbf{V}$$

可以看到，该并联网络的每个 y 参数等于各个子网络相应的 y 参数之和，即

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B \qquad [28]$$

可以将该关系式推广到任意多个二端口网络并联的情况。

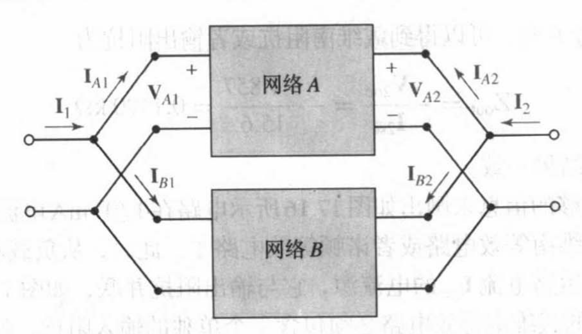


图 17.18　两个并联的二端口网络。如果输入端和输出端具有公共参考节点，则导纳矩阵为 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_A + \mathbf{y}_B$

练习

17.6　求图 17.19 所示二端口网络的 **y** 参数和输出阻抗 $\mathbf{Z}_{out}$。

17.7　运用Δ-Y和Y-Δ变换，分别求出下列电路的 R_{in} 值：(a) 图 17.20(a)所示电路；(b) 图 17.20(b)所示电路。

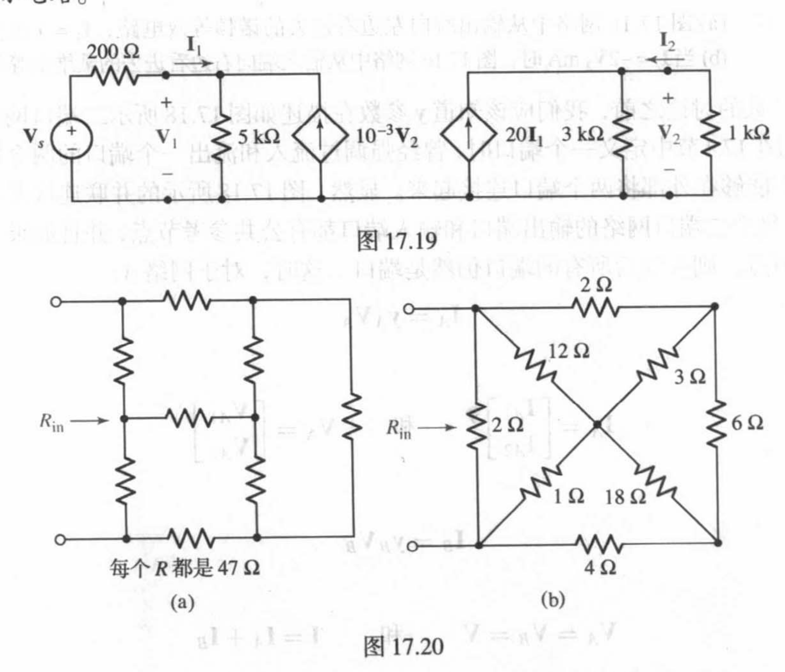


图 17.20

答案：17.6：$\begin{bmatrix} 2\times10^{-4} & -10^{-3} \\ -4\times10^{-3} & 20.3\times10^{-3} \end{bmatrix}$(S)；51.1 Ω。17.7：53.71 Ω，1.311 Ω。

17.4　阻抗参数

前面已经用短路导纳参数的形式介绍了二端口网络参数的概念。然而，还存在其他一些二端口网络参数，每种参数都与某种特定网络类型相关且可以使该类网络的求解最为简便。下面将考虑另外3种参数，它们分别是本节要讨论的开路阻抗参数以及后面两节要讨论的混合参数和传输参数。

首先对一个不包含任何独立源的线性二端口网络进行分析，电流和电压同前所述，如图17.8所示。现在将电压 $\mathbf{V}_1$ 看做是由两个电流源 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 共同产生的响应，因此，可以将 $\mathbf{V}_1$ 写为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \tag{29}$$

同样，对于 $\mathbf{V}_2$：

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{30}$$

以上两式可以写成

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{zI} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

当然，在使用这两个方程时，并没有要求 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 一定是电流源，也没有要求 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 一定是电压源。通常，我们可以在二端口网络的两端连接任何网络。根据上面的公式，我们也可以认为 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 是给定的量或者说是自变量，而 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 是未知量，或者说是因变量，然而实际情况并不是这样。

用两个方程将这4个量关联起来的方法一共有6种，其中每一种都定义了不同的系统参数，这里只讨论这6种参数中最常用的4种。

最能体现 $\mathbf{z}$ 参数含义的是式[29]和式[30]。分别令各个电流等于零，可以得到：

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{32}$$

$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{33}$$

$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \tag{34}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \tag{35}$$

因为电流为零相当于端口开路，因此 $\mathbf{z}$ 参数又被称为开路阻抗参数。通过求解式[29]和式[30]中的 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$，可以很轻松地得到开路阻抗参数与短路导纳参数之间的关系：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{vmatrix}}$$

即

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}\mathbf{z}_{22} - \mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}\right)\mathbf{V}_2$$

采用行列式记号，并且注意下标为小写字母 $\mathbf{z}$，同时假设 $\Delta_\mathbf{z} \neq 0$，可得

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

通过求解 $\mathbf{I}_2$，可以得到

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_\mathbf{z}} = -\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_\mathbf{z}} \qquad \mathbf{y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_\mathbf{z}}$$

采用类似的方法，$\mathbf{z}$ 参数也可以用导纳参数来表示。任意两种参数之间均可以相互转换，而且这样的转换公式有许多。作为参考，表 17.1 给出了 $\mathbf{y}$ 参数和 $\mathbf{z}$ 参数（以及后面将要讨论的 $\mathbf{h}$ 参数和 $\mathbf{t}$ 参数）之间的变换公式。

表 17.1　y，z，h 和 t 参数之间的转换关系表

	y		z		h		t	
y	y_{11}	y_{12}	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$\frac{-z_{12}}{\Delta_z}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{t_{22}}{t_{12}}$	$\frac{-\Delta_t}{t_{12}}$
	y_{21}	y_{22}	$\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$\frac{-1}{t_{12}}$	$\frac{t_{11}}{t_{12}}$
z	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$\frac{-y_{12}}{\Delta_y}$	z_{11}	z_{12}	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{21}}$
	$\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	z_{21}	z_{22}	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{t_{21}}$	$\frac{t_{22}}{t_{21}}$
h	$\frac{1}{y_{11}}$	$\frac{-y_{12}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{t_{12}}{t_{22}}$	$\frac{\Delta_t}{t_{22}}$
	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	$\frac{-z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	h_{21}	h_{22}	$\frac{-1}{t_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{22}}$
t	$\frac{-y_{22}}{y_{21}}$	$\frac{-1}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$\frac{-\Delta_h}{h_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	t_{11}	t_{12}
	$\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$	$\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	t_{21}	t_{22}

对所有的参数集：$\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$。

如果二端口网络为双向网络，则它同时具有互易性，此时不难证明 z_{12} 等于 z_{21}。

通过观察式[29]和式[30]，同样可以得到其等效电路，只需要在式[30]中加上和减去 $z_{12}I_1$ 或在式[29]中加上和减去 $z_{21}I_2$ 即可以。两种等效电路都含有一个受控电压源。

这里不去推导这个等效关系，而是考虑一个更加一般的例子。我们能不能构造一个从二端口网络输出端看进去的通用戴维南等效电路呢？首先必须假定一个特定的输入电路，且为输入电路选择一个独立电压源 V_s（上端为正）并与其内阻抗 Z_g 相串联，这时，

$$V_s = V_1 + I_1 Z_g$$

将该结果与式[29]和式[30]联立，消去 V_1 和 I_1 后得到

$$V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_s + \left(z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_g} \right) I_2$$

戴维南等效电路可以直接由上式得到，如图 17.21 所示。将输出阻抗用 z 参数表示为

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$

如果信号源阻抗为零，则上式可以简化为

$$Z_{out} = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{y_{22}} \qquad (Z_g = 0)$$

对于这个特定的例子，输出导纳等于 y_{22}，因此满足式[13]的基本关系式。

$$\frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}+\mathbf{Z}_g}\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{z}_{22}-\frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}+\mathbf{Z}_g} \qquad \mathbf{I}_2 \qquad \mathbf{V}_2$$

图 17.21 从输出端看进去的二端口网络的戴维南等效电路，用开路阻抗参数表示

例题 17.8 给定下列阻抗参数：

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}10^3 & 10\\ -10^6 & 10^4\end{bmatrix} \quad (\text{单位都是}\ \Omega)$$

解： 该阻抗参数表示三极管共发射极连接时的参数，可以确定电压增益、电流增益、功率增益以及输入和输出阻抗。可以认为这个二端口网络由理想正弦电压源$\mathbf{V}_s$与500 Ω电阻的串联所激励，且该二端口网络连接的负载为一个10 kΩ的电阻。

描述二端口网络的两个方程为

$$\mathbf{V}_1 = 10^3\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \qquad [36]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^6\mathbf{I}_1 + 10^4\mathbf{I}_2 \qquad [37]$$

而描述输入和输出网络的方程分别为

$$\mathbf{V}_s = 500\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 \qquad [38]$$

$$\mathbf{V}_2 = -10^4\mathbf{I}_2 \qquad [39]$$

根据以上4个方程，可以很容易地得到$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$和$\mathbf{I}_2$用$\mathbf{V}_s$表示的表达式：

$$\mathbf{V}_1 = 0.75\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{2000}$$

$$\mathbf{V}_2 = -250\mathbf{V}_s \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_s}{40}$$

根据以上结果，可以容易地求出电压增益为

$$\mathbf{G}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -333$$

电流增益为

$$\mathbf{G}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = 50$$

功率增益为

$$G_P = \frac{\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_2^*\right]}{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*\right]} = 16\,670$$

输入阻抗为

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{in}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 1500\ \Omega$$

参见图17.21所示的电路，可以得到输出阻抗：

$$\mathbf{Z}_{\text{out}} = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12}\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11} + \mathbf{Z}_g} = 16.67\ \text{k}\Omega$$

由最大功率传输理论可以预见：当 $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{\text{out}}^* = 16.67\ \text{k}\Omega$ 时获得最大的功率增益，此时的最大功率增益为 17 045。

当二端口网络并联时，使用 $\mathbf{y}$ 参数进行分析十分有效；当网络串联时，使用 $\mathbf{z}$ 参数可以简化问题，如图 17.22 所示。需要注意的是，串联连接与后面讨论传输参数时将要提到的级联不同。如果每个网络的输入端和输出端具有公共参考节点，并且这些参考节点如图 17.22 所示被连接在一起，那么 $\mathbf{I}_1$ 将流过这两个串联网络的输入端口，$\mathbf{I}_2$ 与之类似。可见，连接以后端口还是端口，因此 $\mathbf{I} = \mathbf{I}_A = \mathbf{I}_B$，并且

$$\begin{aligned}\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B &= \mathbf{z}_A\mathbf{I}_A + \mathbf{z}_B\mathbf{I}_B \\ &= (\mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B)\mathbf{I} = \mathbf{z}\mathbf{I}\end{aligned}$$

其中，

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$$

因此 $\mathbf{z}_{11} = \mathbf{z}_{11A} + \mathbf{z}_{11B}$，其余类推。

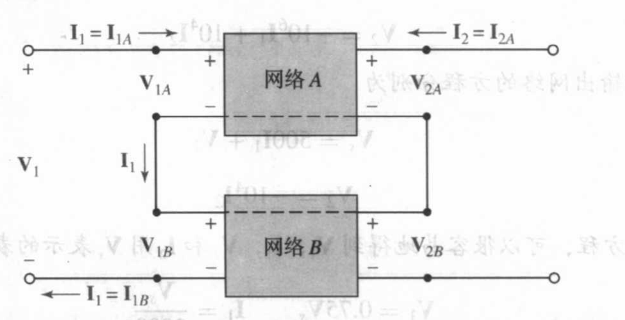


图 17.22 通过将两个二端口网络的 4 个公共参考节点连接起来，可以得到这两个二端口网络的串联连接，其阻抗参数为 $\mathbf{z} = \mathbf{z}_A + \mathbf{z}_B$

练习

17.8 求下列电路图所示的二端口网络的 $\mathbf{z}$ 参数：(a) 图 17.23(a)；(b) 图 17.23(b)。

17.9 求图 17.23(c)所示的二端口网络的 $\mathbf{z}$ 参数。

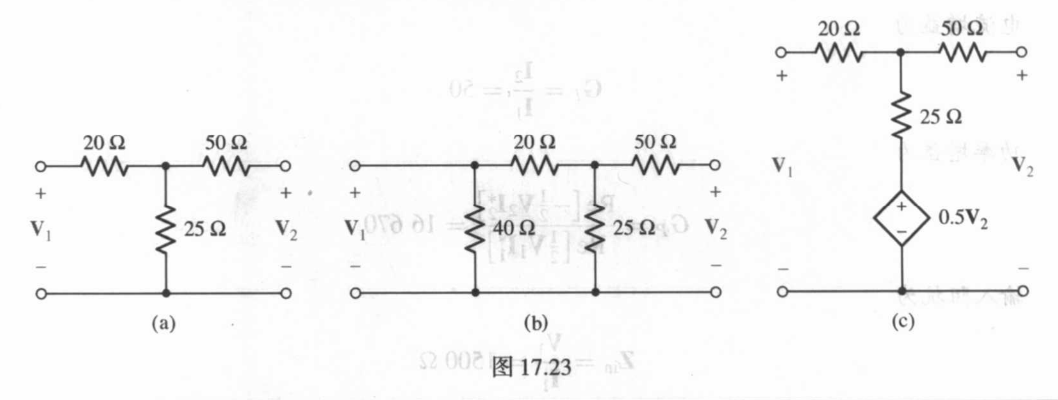


图 17.23

答案：17.8：$\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix}$ (Ω)；$\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix}$ (Ω)；17.9：$\begin{bmatrix} 70 & 100 \\ 50 & 150 \end{bmatrix}$ (Ω)。

实际应用——晶体管的特性

我们通常用h参数来描述双极型晶体管的参数。晶体管是一种非线性的半导体器件，它是由贝尔实验室的研究人员在20世纪40年代后期发明的（见图17.24），可以说晶体管几乎是所有放大器和数字逻辑电路的基础。

晶体管的3个端子分别是基极（b）、集电极（c）和发射极（e），如图17.25所示，这些名称是根据端子对器件中载流子传输所起的作用来命名的。通常采用发射极接地（也叫做共发射极接法）来测量双极型晶体管的h参数，此时将基极作为输入，集电极作为输出。正如前面所述，由于晶体管是非线性器件，因此不可能定义满足所有电压和电流的h参数。通常，h参数是在特定集电极电流I_C和集电极电压V_{CE}的条件下给出的。器件的非线性导致的另一个结果是其交流h参数和直流h参数通常在数值上相差甚远。

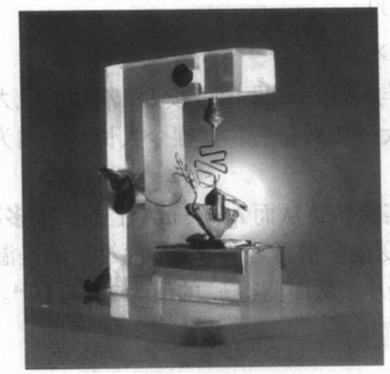


图 17.24　第一次被演示的双极型晶体管

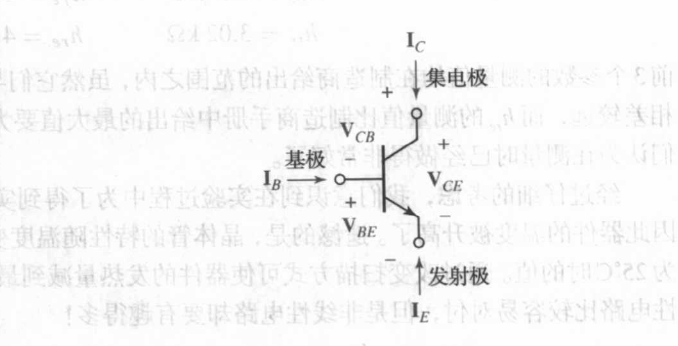


图 17.25　按照IEEE惯例定义的双极型晶体管的电流和电压示意图

有许多可以用来测量晶体管h参数的仪表，其中的一个例子就是半导体参数分析仪，如图17.26所示。这种仪器可以画出特定电压（用横坐标表示）下的电流值（用纵坐标表示），通过步进地改变基极电流（第3个参数）可以画出一簇曲线。

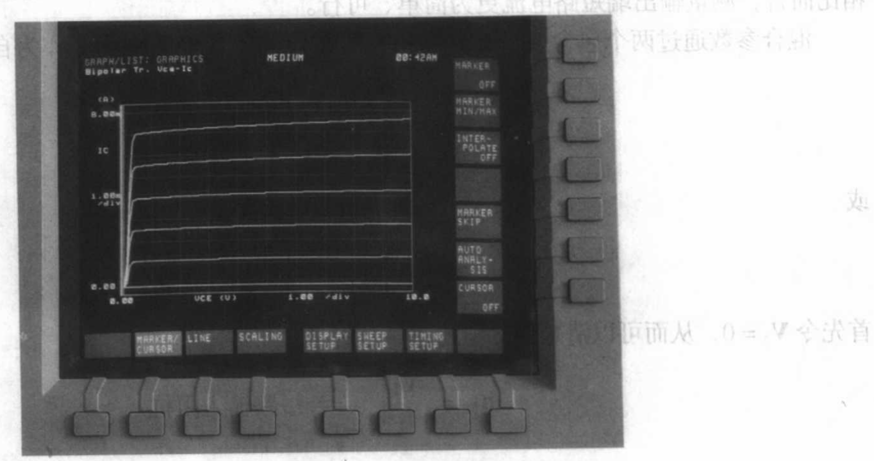


图 17.26　用HP 4155A半导体参数分析仪绘制出的2N3904双极型晶体管特性曲线，可以由这些曲线测量其h参数

下面来看一个例子，硅晶体管2N3904 NPN的制造商给出了表17.2所示的**h**参数，可以注意到，工程师们在表中使用了下标（h_{ie}，h_{re}，等等）。表中所示**h**参数的测量条件为$I_C = 1.0$ mA，$V_{CE} = 10$ V（直流）和$f = 1.0$ kHz。

表 17.2　晶体管 2N3904 交流参数的总结

参数	名称	数值范围	单位
h_{ie} (h_{11})	输入阻抗	1.0~10	kΩ
h_{re} (h_{12})	电压反馈系数	0.5×10^{-4}~8.0×10^{-4}	-
h_{fe} (h_{21})	小信号电流增益	100~400	-
h_{oe} (h_{22})	输出导纳	1.0~40	μΩ

出于好奇，本书的作者之一和他的一个朋友决定亲自测量一下这些参数。他们使用了图17.26所示的并不十分昂贵的仪器对这种器件进行测量，测得的结果为

$$h_{oe} = 3.3\ \mu\Omega \qquad h_{fe} = 109$$

$$h_{ie} = 3.02\ \text{k}\Omega \qquad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

前3个参数的测量值均在制造商给出的范围之内，虽然它们与给出的最小值很接近，然而与最大值相差较远，而h_{re}的测量值比制造商手册中给出的最大值要大一个数量级！这很令人惊讶，因为我们认为在测量时已经做得非常好了。

经过仔细的考虑，我们意识到在实验过程中为了得到实验轨迹从而$I_C = 1$ mA上下扫描多次，因此器件的温度被升高了。遗憾的是，晶体管的特性随温度变化非常显著，而制造商给出的是温度为25°C时的值。通过改变扫描方式可使器件的发热量减到最小，从而测得h_{re}的值为2.0×10^{-4}。线性电路比较容易对付，但是非线性电路却要有趣得多！

17.5　混合参数

在测量二端口网络的某些参数时可能会遇到困难，例如开路阻抗参数$\mathbf{z}_{21}$的测量。对于晶体管电路而言，虽然在输入端接入正弦电流源很容易，但是因为晶体管电路的输出阻抗非常大，所以在测量输出端的正弦输出电压时，很难做到在提供必要的直流偏置电压的情况下同时使输出端开路。相比而言，测量输出端短路电流更为简单、可行。

混合参数通过两个包含$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_1$，$\mathbf{V}_2$和$\mathbf{I}_2$的方程定义，其中$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{I}_2$作为自变量：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \qquad [40]$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \qquad [41]$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \qquad [42]$$

首先令$\mathbf{V}_2 = 0$，从而可以清楚地知道这些参数的意义：

$$\mathbf{h}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{短路输入阻抗}$$

$$\mathbf{h}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} = \text{短路正向电流增益}$$

再令 $\mathbf{I}_1 = 0$，可以得到

$$\mathbf{h}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{开路反向电压增益}$$

$$\mathbf{h}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} = \text{开路输出导纳}$$

因为这些参数分别表示阻抗、导纳、电压增益和电流增益，所以称它们为“混合”参数。

将混合参数应用到晶体管上时，它们的下标可以用简单的符号表示。即 $\mathbf{h}_{11}$、$\mathbf{h}_{12}$、$\mathbf{h}_{21}$ 和 $\mathbf{h}_{22}$ 分别表示为 $\mathbf{h}_i$、$\mathbf{h}_r$、$\mathbf{h}_f$ 和 $\mathbf{h}_o$，其中的下标分别表示输入（input）、反向（reverse）、正向（forward）和输出（output）。

例题 17.9 求图 17.27 所示双向电阻性电路的 $\mathbf{h}$ 参数。

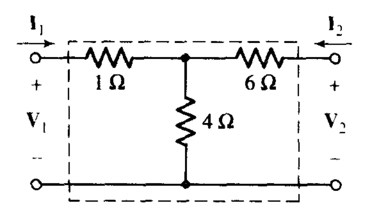


图 17.27 该双向网络的 $\mathbf{h}$ 参数存在 $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$

解： 令输出端短路（$\mathbf{V}_2 = 0$），在输入端接入 1 A 的电流源（$\mathbf{I}_1 = 1$ A）时，产生的输入电压为 3.4 V（$\mathbf{V}_1 = 3.4$ V），因此，$\mathbf{h}_{11} = 3.4\ \Omega$。在同样条件下，根据分流定理，可以很容易地求出输出电流 $\mathbf{I}_2 = -0.4$ A，因此 $\mathbf{h}_{21} = -0.4$。

通过将输入端开路（$\mathbf{I}_1 = 0$）可以求得剩下的两个参数。在输出端接入一个 1 V 的电压源（$\mathbf{V}_2 = 1$ V），则输入端的响应电压为 0.4 V（$\mathbf{V}_1 = 0.4$ V），因此 $\mathbf{h}_{12} = 0.4$。此时电源在输出端产生的电流为 0.1 A（$\mathbf{I}_2 = 0.1$ A），因此 $\mathbf{h}_{22} = 0.1$ S。

于是我们得到了 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 3.4\ \Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1\ \text{S} \end{bmatrix}$，而 $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$ 是双向网络互易性的结果。

练习

17.10 求下列电路图所示二端口网络的 $\mathbf{h}$ 参数：(a) 图 17.28(a)；(b) 图 17.28(b)。

17.11 如果 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 5\ \Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1\ \text{S} \end{bmatrix}$，试求：(a) $\mathbf{y}$ 参数；(b) $\mathbf{z}$ 参数。

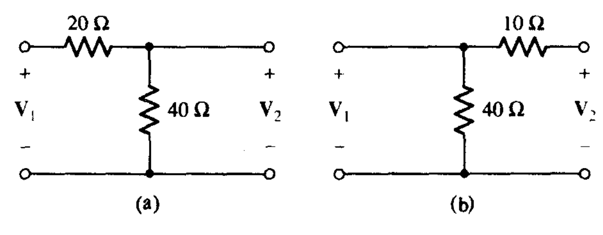


图 17.28

答案： 17.10: $\begin{bmatrix} 20\ \Omega & 1 \\ -1 & 25\ \text{ms} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8\ \Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20\ \text{ms} \end{bmatrix}$；17.11: $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ (S), $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$ (Ω)。

图 17.29 所示电路是根据 h 参数的两个定义式（即式[40]和式[41]）直接画出的。其中，第一个公式表示输入回路的 KVL 方程，第二个公式表示输出端上端节点的 KCL 方程。这个电路也是通用的晶体管的等效电路。我们可以合理地假设这个共发射极连接的电路 h 参数为：$\mathbf{h}_{11} = 1200\ \Omega$，$\mathbf{h}_{12} = 2 \times 10^{-4}$，$\mathbf{h}_{21} = 50$，$\mathbf{h}_{22} = 50 \times 10^{-6}$ S，电压源 $1\underline{/0^\circ}$ mV 与 800 Ω 电阻串联，负载电阻为 5 kΩ。此时，对于输入端：

$$10^{-3} = (1200 + 800)\mathbf{I}_1 + 2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2$$

对于输出端：

$$\mathbf{I}_2 = -2 \times 10^{-4}\mathbf{V}_2 = 50\mathbf{I}_1 + 50 \times 10^{-6}\mathbf{V}_2$$

求解得到

$$\mathbf{I}_1 = 0.510\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_1 = 0.592\ \text{mV}$$
$$\mathbf{I}_2 = 20.4\ \mu\text{A} \qquad \mathbf{V}_2 = -102\ \text{mV}$$

该晶体管的电流增益为 40，电压增益为 -172，功率增益为 6880，输入阻抗为 1160 Ω，而通过进一步计算可以求出输出阻抗为 22.2 kΩ。

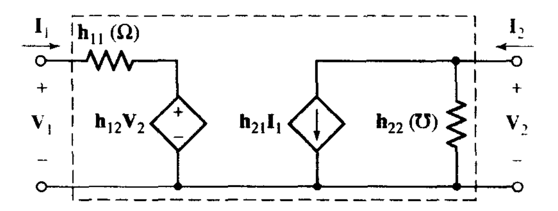


图 17.29 用来表示二端口网络的 4 个 h 参数，相应的方程组为 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$

当二端口网络的输入端串联而输出端并联时，其混合参数可以直接相加，这种连接方式称为串－并连接，但使用得比较少。

17.6 传输参数

最后要介绍的二端口网络参数称为 t 参数、ABCD 参数或者简称为传输参数。它们被定义为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \tag{43}$$

以及

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2 \tag{44}$$

即

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_1\end{bmatrix} = \mathbf{t}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2\\ -\mathbf{I}_2\end{bmatrix} \tag{45}$$

其中，$\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的定义与以前一样（见图 17.8）。式[43]和式[44]中的负号应该与输出电流看成是一个整体，即看成（$-\mathbf{I}_2$）。于是，$\mathbf{I}_1$ 和 $-\mathbf{I}_2$ 的方向均指向右边，即与能量或者信号的传输方向一致。

另一种广泛应用的传输参量的记法为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{t}_{11} & \mathbf{t}_{12}\\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{t}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix} \tag{46}$$

注意，上面的 **t** 矩阵或 **ABCD** 矩阵中没有负号。

重新来看式[43]~式[45]，公式左边的变量（即输入电压 $\mathbf{V}_1$ 和输入电流 $\mathbf{I}_1$）通常被认为是已知量或者是自变量，而因变量为输出量 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{I}_2$。因此，传输参数给出了输入和输出之间的直接关系，所以传输参数主要用于传输线分析和级联网络中。

下面我们来求图 17.30(a)所示双向电阻性二端口网络的 **t** 参数。为了说明如何求得 **t** 参数中的某个参数，假设

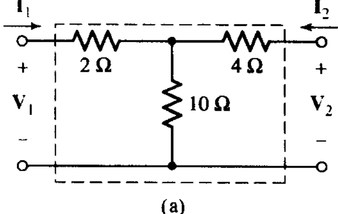
$$\mathbf{t}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{-\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

因此，我们将输出短路（$\mathbf{V}_2 = 0$）并且令 $\mathbf{V}_1 = 1$ V，如图 17.30(b)所示。注意，不能通过在输出端放置一个 1 A 的电流源而使上式分母为 1，因为我们已经将其短路了。从 1 V 电压源看进去的等效阻抗为 $R_{eq} = 2 + (4\|10)$ Ω，根据分流定理可得

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2+(4\|10)} \times \frac{10}{10+4} = \frac{5}{34}\ \text{A}$$

因此，

$$\mathbf{t}_{12} = \frac{1}{-\mathbf{I}_2} = \frac{34}{5} = 6.8\ \Omega$$



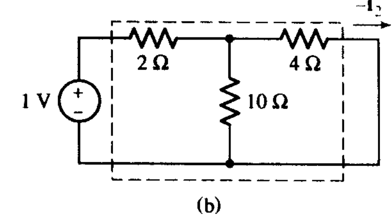


图 17.30　(a) 一个电阻性二端口网络，需要确定 **t** 参数；(b) 为求 $\mathbf{t}_{12}$，令 $\mathbf{V}_1 = 1$ V 以及 $\mathbf{V}_2 = 0$，从而得到 $\mathbf{t}_{12} = 1/(-\mathbf{I}_2) = 6.8$ Ω

如果需要得到所有 4 个 **t** 参数，可以通过写出任意包含 4 个端点变量 $\mathbf{V}_1$，$\mathbf{V}_2$，$\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的方程组来得到。参见图 17.30(a)所示的网络，可以列出两个网孔方程：

$$\mathbf{V}_1 = 12\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \qquad [47]$$

$$\mathbf{V}_2 = 10\mathbf{I}_1 + 14\mathbf{I}_2 \qquad [48]$$

求解式[48]可以得到 $\mathbf{I}_1$：

$$\mathbf{I}_1 = 0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2$$

因此 $\mathbf{t}_{21} = 0.1$ S 且 $\mathbf{t}_{22} = 1.4$。将上述 $\mathbf{I}_1$ 的表达式代入式[47]，得到

$$\mathbf{V}_1 = 12(0.1\mathbf{V}_2 - 1.4\mathbf{I}_2) + 10\mathbf{I}_2 = 1.2\mathbf{V}_2 - 6.8\mathbf{I}_2$$

同样，可以得到 $\mathbf{t}_{11} = 1.2$ 且 $\mathbf{t}_{12} = 6.8$ Ω（这与前面求得的结果一致）。

对于互易网络，**t** 矩阵行列式的值为 1：

$$\Delta_{\mathbf{t}} = \mathbf{t}_{11}\mathbf{t}_{22} - \mathbf{t}_{12}\mathbf{t}_{21} = 1$$

在图 17.30 所示的电阻性二端口网络中，$\Delta_{\mathbf{t}} = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$，可见满足上面的结论！

在结束关于二端口网络的讨论之前，我们将考虑两个二端口网络级联的情况，如图17.31所示，图中已经标出了每个二端口网络的端口电压和电流。网络 A 对应的 $\mathbf{t}$ 参数为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_1\end{bmatrix}=\mathbf{t}_A\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2\\ -\mathbf{I}_2\end{bmatrix}=\mathbf{t}_A\begin{bmatrix}\mathbf{V}_3\\ \mathbf{I}_3\end{bmatrix}$$

网络 B 对应的 $\mathbf{t}$ 参数为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_3\\ \mathbf{I}_3\end{bmatrix}=\mathbf{t}_B\begin{bmatrix}\mathbf{V}_4\\ -\mathbf{I}_4\end{bmatrix}$$

将上面的结果合并，得到

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_1\end{bmatrix}=\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B\begin{bmatrix}\mathbf{V}_4\\ -\mathbf{I}_4\end{bmatrix}$$

因此，级联网络的 $\mathbf{t}$ 参数等于两个矩阵的乘积：

$$\mathbf{t}=\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$$

注意，这里的乘积并不是简单地将矩阵中相应的元素相乘。如果需要，可以参见附录2中有关矩阵乘法的介绍。

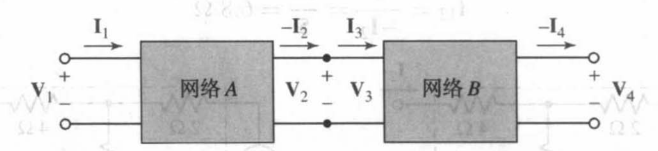


图 17.31 当两个二端口网络 A 和 B 级联时，级联网络的 $\mathbf{t}$ 参数矩阵由各矩阵的乘积确定，即 $\mathbf{t}=\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$

例题 17.10 求图 17.32 所示级联网络的 $\mathbf{t}$ 参数。

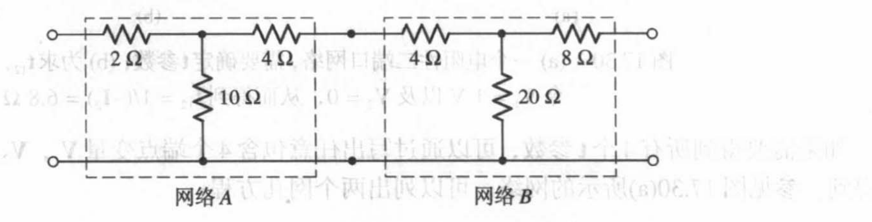


图 17.32 级联连接

解： 网络 A 为图 17.32 所示的二端口网络，因此，

$$\mathbf{t}_A=\begin{bmatrix}1.2 & 6.8\ \Omega\\ 0.1\ \text{S} & 1.4\end{bmatrix}$$

网络 B 中所有电阻的阻值均为网络 A 中对应电阻阻值的两倍，因此，

$$\mathbf{t}_B=\begin{bmatrix}1.2 & 13.6\ \Omega\\ 0.05\ \text{S} & 1.4\end{bmatrix}$$

对于级联网络：

$$\mathbf{t}=\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B=\begin{bmatrix}1.2 & 6.8\\ 0.1 & 1.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.2 & 13.6\\ 0.05 & 1.4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.2\times1.2+6.8\times0.05 & 1.2\times13.6+6.8\times1.4\\ 0.1\times1.2+1.4\times0.05 & 0.1\times13.6+1.4\times1.4\end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84\ \Omega \\ 0.19\ \text{S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

练习

17.12　已知 $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 3.2 & 8\ \Omega \\ 0.2\ \text{S} & 4 \end{bmatrix}$，求：(a) $\mathbf{z}$ 参数；(b) 两个相同网络级联后的 $\mathbf{t}$ 参数；(c) 两个相同网络级联后的 $\mathbf{z}$ 参数。

答案： $\begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}(\Omega)$；$\begin{bmatrix} 11.84 & 57.6\ \Omega \\ 1.44\ \text{S} & 17.6 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix}(\Omega)$。

计算机辅助分析

对于二端口网络的级联问题，使用t参数来描述二端口网络的特性可以大大简化分析难度。例如由本节中的例子可以看到：

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8\ \Omega \\ 0.1\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

以及

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6\ \Omega \\ 0.05\ \text{S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

可见，只要将 $\mathbf{t}_A$ 和 $\mathbf{t}_B$ 相乘就可以得到该级联网络的 $\mathbf{t}$ 参数：

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_A \cdot \mathbf{t}_B$$

使用科学计算器或者类似MATLAB 的软件包可以轻松地完成矩阵运算。例如，MATLAB 的语句如下：

```
EDU» tA = [1.2 6.8; 0.1 1.4];
EDU» tB = [1.2 13.6; 0.05 1.4];
EDU» t = tA*tB

t =

    1.7800    25.8700
    0.1900    3.3200
```

这与例题 17.10 中得到的结果一致。

MATLAB 中的矩阵名称对大小写敏感（例如本例中的tA，tB 和t）。在MATLAB 中，矩阵元素是按行输入的，以第一行为起始行，行与行之间通过分号隔开。需要再次提醒读者，必须时刻注意矩阵运算的顺序，例如，tB*tA 的结果与我们想象的结果大相径庭：

$$\mathbf{t}_B \cdot \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

对于与本例类似的简单矩阵相乘来说，如果没有其他工具，使用手边的科学计算器即可算出结果。但是，对于更大的级联网络，使用计算机计算更为简便，因为这时可以非常方便地在屏幕上同时看到所有的矩阵。

总结和复习

- 在使用本章介绍的各种分析方法时必须记住，每个端口只能连到一个单端口网络或者一个多端口网络中的一个端口上。
- 二端口网络导纳（$\mathbf{y}$）参数的定义式为

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \quad 和 \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

其中，

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

和

$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0} \qquad \mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

- 二端口网络阻抗（$\mathbf{z}$）参数的定义式为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \quad 和 \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

- 二端口网络混合（$\mathbf{h}$）参数的定义式为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad 和 \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

- 二端口网络的传输（$\mathbf{t}$）参数（也称**ABCD**参数）的定义式为

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{t}_{11}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{12}\mathbf{I}_2 \quad 和 \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{t}_{21}\mathbf{V}_2 - \mathbf{t}_{22}\mathbf{I}_2$$

- 根据电路分析的需要，可以在$\mathbf{h}$，$\mathbf{z}$，$\mathbf{t}$和$\mathbf{y}$参数之间互相转换，表17.1总结了它们之间的转换公式。

深入阅读

有关电路分析中矩阵方法的详细介绍可参考下列书籍：

R. A. DeCarlo和P. M. lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001。

采用网络参数对晶体管电路进行分析可参考下列书籍：

W. H. Hayt, Jr.和G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995。

习题

17.1 单端口网络

1. 已知下列方程组：

$$4\mathbf{I}_1 - 8\mathbf{I}_2 + 9\mathbf{I}_3 = 12$$
$$5\mathbf{I}_1 \qquad - 7\mathbf{I}_3 = 4$$
$$7\mathbf{I}_1 + 3\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0$$

(a) 将方程组写成矩阵形式；(b) 求$\Delta_\mathbf{Z}$；(c) 求Δ_{11}；(d) 计算$\mathbf{I}_1$；(e) 计算$\mathbf{I}_3$。

2. 求图 17.33 所示网络的 Δ_Z，并根据所得结果分别求出将 100 V 的直流电压源插入图中下列网孔的外围支路时电源输出的功率：(a) 网孔①；(b) 网孔②；(c) 网孔③。
3. 求图 17.34 所示网络的 Δ_Y，并根据所得的结果分别求出将 10 A 的直流电流源插入图中参考节点与下列节点之间时电源输出的功率：(a) 节点①；(b) 节点②；(c) 节点③。

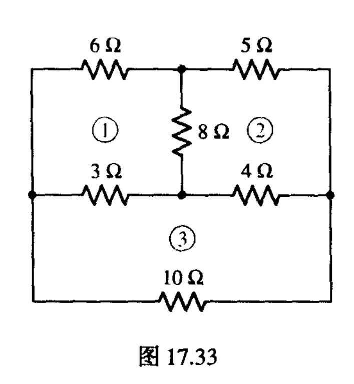


图 17.33

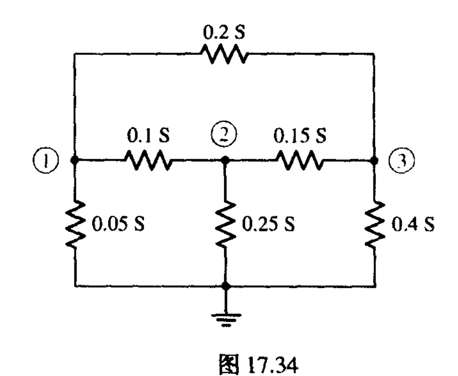
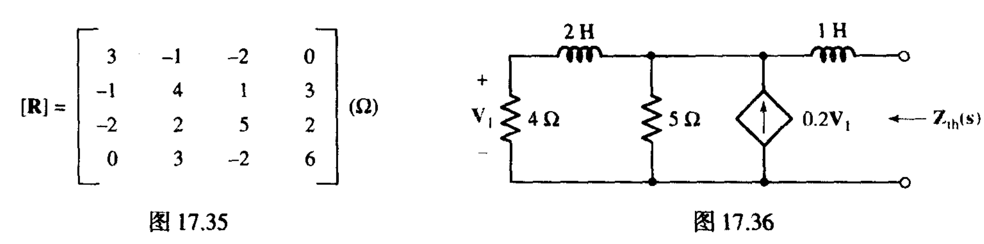


图 17.34

4. 图 17.35 所示是某单端口网络的阻抗矩阵，求将电源置于网孔 1 时的 R_{in}。
5. 求图 17.36 所示单端口网络的戴维南等效阻抗 $\mathbf{Z}_{th}(\mathbf{s})$。



$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} (\Omega)$$

图 17.35　　图 17.36

6. 按照下列要求，求图 17.37 所示单端口网络的 $\mathbf{Z}_{in}$：(a) 求 Δ_Z；(b) 先求 Δ_Y 和 $\mathbf{Y}_{in}$，然后求 $\mathbf{Z}_{in}$。
7. 网络如图 17.38 所示，求作为 s 函数的输出阻抗表达式。

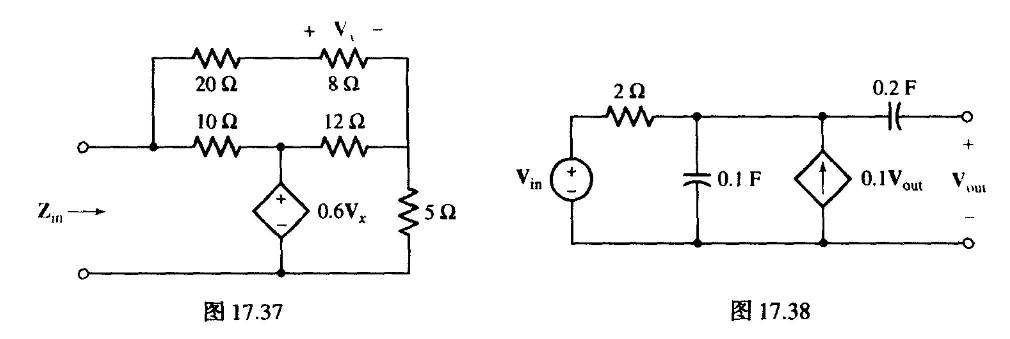


图 17.37　　图 17.38

8. 假设图 17.39 所示的运放为理想运放（$R_i = \infty$，$R_o = 0$，$A = \infty$），求 R_{in}。
9. (a) 假设图 17.40 所示的两个运放均为理想运放（$R_i = \infty$，$R_o = 0$，$A = \infty$），求 $\mathbf{Z}_{in}$；(b) $R_1 = 4\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_3 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_4 = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 200\ \text{pF}$，证明 $\mathbf{Z}_{in} = j\omega L_{in}$，其中 $L_{in} = 0.8\ \text{mH}$。

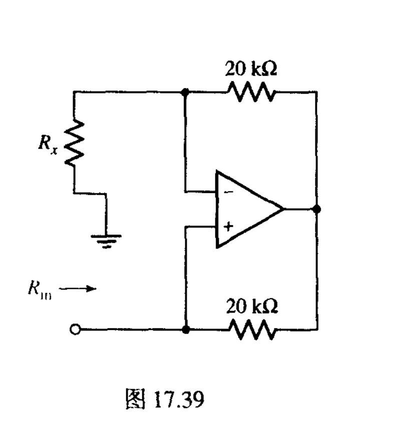


图 17.39

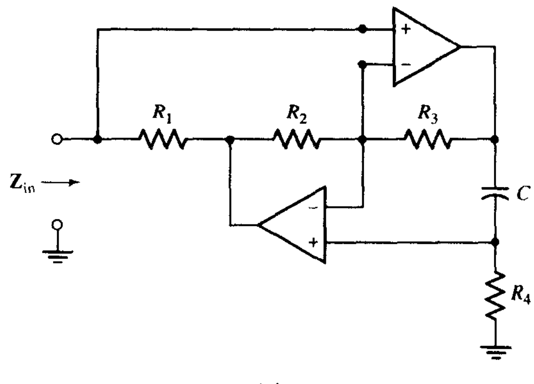


图 17.40

17.2 导纳参数

10. 对于图 17.8 所示的线性网络，求：(a) $\mathbf{I}_2$，假设已知 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0.01 & 0.3\\ 0.3 & -0.02\end{bmatrix}$(S)和 $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}9\\ -3.5\end{bmatrix}$(V)；(b) $\mathbf{V}_1$，假设已知 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0.15\\ 0.15 & 0.8\end{bmatrix}$(S)和 $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0.001\\ 0.02\end{bmatrix}$(A)。

11. 求图 17.41 所示二端口网络的 $\mathbf{y}_{11}$ 和 $\mathbf{y}_{12}$。

12. 设图 17.42 所示二端口网络的 y 参数为 $\mathbf{y}_{11}=10$，$\mathbf{y}_{12}=-5$，$\mathbf{y}_{21}=50$，$\mathbf{y}_{22}=20$，所有单位均为 ms，当 $\mathbf{V}_s=100$ V，$R_s=25\ \Omega$，$R_L=100\ \Omega$ 时，求 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的值。

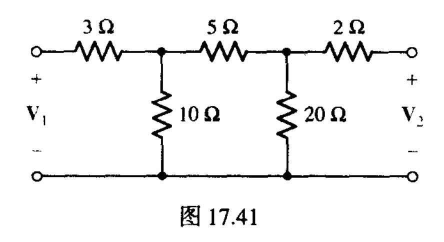


图 17.41

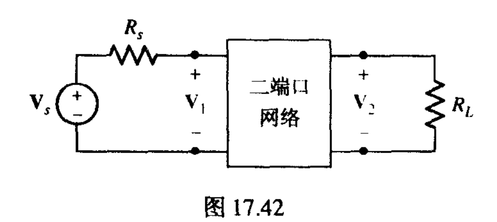


图 17.42

13. 求图 17.43 所示网络的 4 个 y 参数。

14. 求图 17.44 所示二端口网络的 y 参数。

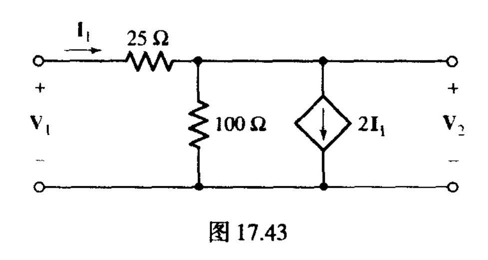


图 17.43

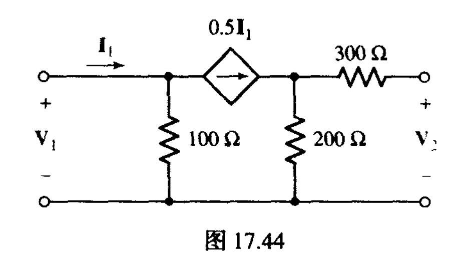
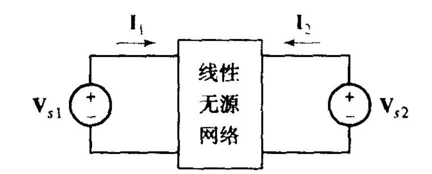


图 17.44

15. 设图 17.45 所示二端口网络的 y 参数为 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0.1 & -0.0025\\ -8 & 0.05\end{bmatrix}$(S)。(a) 求下列比值：$\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$，$\mathbf{I}_2/\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$；(b) 移去 5 Ω 的电阻并将 1 V 的电源置零，然后求 $\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2$。

16. 某二端口网络的导纳参数为 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -20 & 2\end{bmatrix}$(mS)。将一个 100 Ω 的电阻分别采用下面的方式连接到该网络中，求连接后网络的新导纳参数 y：(a)串联连接到输入端的一个端子；(b) 串联连接到输出端的一个端子。

17. 根据图 17.46 将表格完成，并求出 **y** 参数。



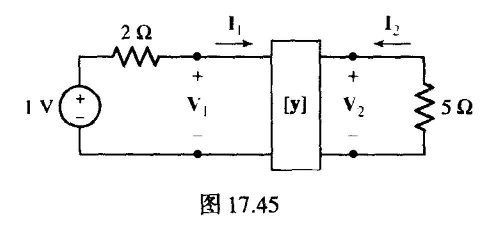


图 17.45

	V_{s1} (V)	V_{s2} (V)	I_1 (A)	I_2 (A)
Exp't #1	100	50	5	−32.5
Exp't #2	50	100	−20	−5
Exp't #3	20	0		
Exp't #4			5	0
Exp't #5			5	15

图 17.46

18. 对于图 17.8 所示的一般线性网络，求：(a) $\mathbf{I}_2$，假设已知 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10^{-3} & j0.01 \\ j0.01 & -j0.005 \end{bmatrix}$(S)和 $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 12\angle 43^\circ \\ 2\angle 0^\circ \end{bmatrix}$(V)；(b) $\mathbf{V}_2$，假设已知 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -j5 & 10 \\ 4 & j10 \end{bmatrix}$(S)和 $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 120\angle 30^\circ \\ 88\angle 45^\circ \end{bmatrix}$(A)。

19. 金属氧化物半导体场效应晶体管（MOSFET）是一个非线性三端子元件，它具有很多电子上的应用，常用 **y** 参数来描述。其交流参数很大程度上取决于测量条件，通常用 y_{is}，y_{rs}，y_{fs} 和 y_{os} 表示：

$$I_g = y_{is} V_{gs} + y_{rs} V_{ds} \qquad [49]$$

$$I_d = y_{fs} V_{gs} + y_{os} V_{ds} \qquad [50]$$

其中，I_g 为晶体管的栅极电流，I_d 为晶体管的漏极电流，而第 3 个端子（源极）通常在测量时接在输入和输出之间。因此，V_{gs} 是栅极和源极之间的电压，V_{ds} 是漏极和源极之间的电压。典型的 MOSFET 高频信号模型如图 17.47 所示。(a) 对于上述结构，哪个端子作为输入，哪个端子作为输出？(b) 用图 17.47 中的模型参数 C_{gs}，C_{gd}，g_m，r_d 和 C_{ds} 推导由式[49]和式[50]定义的参数 y_{is}，y_{rs}，y_{fs} 和 y_{os} 的表达式；(c) 如果 $g_m = 4.7$ mS，$C_{gs} = 3.4$ pF，$C_{gd} = 1.4$ pF，$C_{ds} = 0.4$ pF 和 $r_d = 10$ kΩ，计算 y_{is}，y_{rs}，y_{fs} 和 y_{os} 的值。

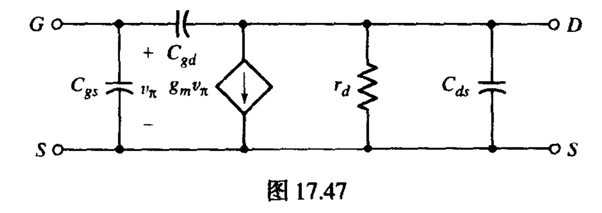


图 17.47

17.3　一些等效网络

20. 将图 17.48 所示的 Δ 形网络转换为 Y 形网络。

21. 将图 17.49 所示的 Y 形网络转换为 Δ 形网络。

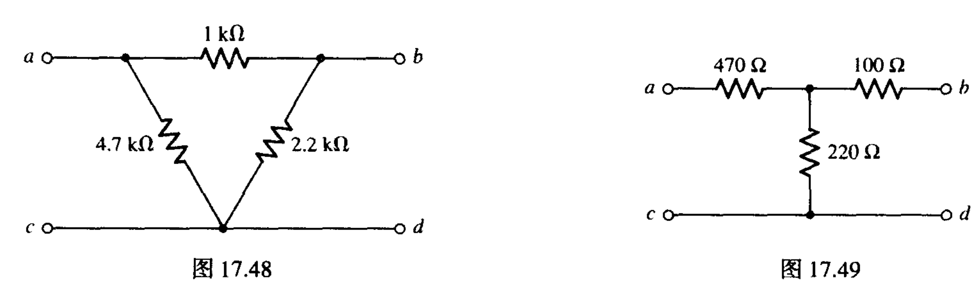


图 17.48　　　　图 17.49

22. 采用合适的 Y-Δ 或 Δ-Y 转换求图 17.50 所示单端口网络的 R_{in}。

23. 采用合适的 Y-Δ 或 Δ-Y 转换求图 17.51 所示单端口网络的输入电阻。

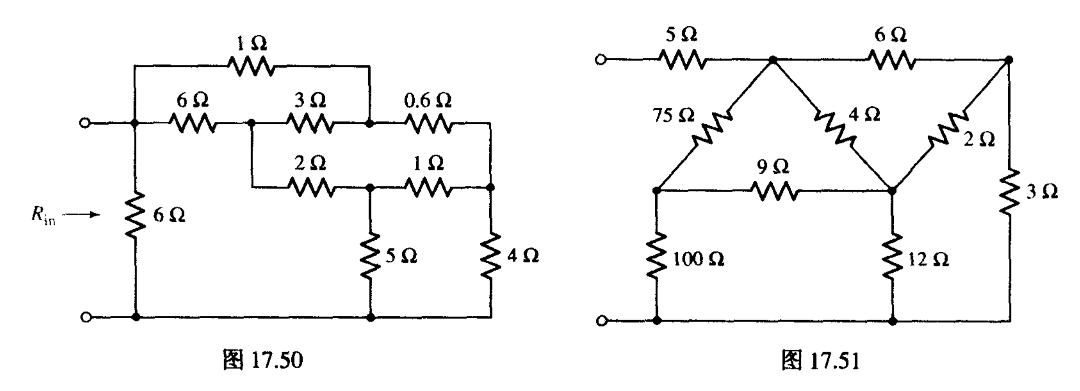


图 17.50　　　　图 17.51

24. 求图 17.52 所示网络的 $\mathbf{Z}_{in}$。

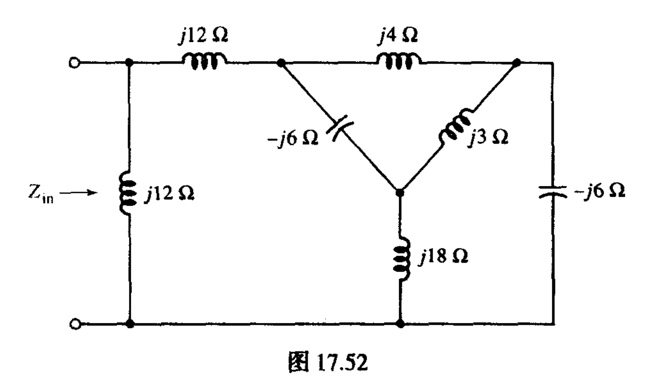


图 17.52

25. 设图 17.53 所示二端口网络的 y 参数为 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0.4 & -0.002\\ -5 & 0.04\end{bmatrix}$(S)，求：(a) $\mathbf{G}_V$; (b) $\mathbf{G}_I$; (c) $\mathbf{G}_P$; (d) $\mathbf{Z}_{in}$; (e) $\mathbf{Z}_{out}$。

26. 设图 17.54 所示二端口网络的 y 参数为 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0.1 & -0.05\\ -0.5 & 0.2\end{bmatrix}$(S)，求：(a) $\mathbf{G}_V$; (b) $\mathbf{G}_I$; (c) $\mathbf{G}_P$; (d) $\mathbf{Z}_{in}$; (e) $\mathbf{Z}_{out}$; (f) 令 $\mathbf{V}_s=0$ 并移去负载 R_L，这时 $\mathbf{V}_1/\mathbf{V}_2$ 的比值称为反向电压增益 $\mathbf{G}_{V,rev}$，计算 $\mathbf{G}_{V,rev}$; (g) 插入功率增益 G_{ins} 定义为接入二端口网络时电阻吸收的功率 $P_{5\Omega}$ 与去掉二端口网络并用跳线将输入口的两个端子分别与相应的输出口两端子短接后电阻吸收的功率$P_{5\Omega}$的比值，计算 G_{ins}。

图 17.53

图 17.54

27. (a) 按照图 17.13(b)所示的形式，画出参数 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1.5 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$(mS)的等效电路；(b) 如果将两个这样的二端口网络并联起来，画出并联后的等效电路并证明新的y参数是原来的两倍，即$\mathbf{y}_{new}=2\mathbf{y}$。

28. (a) 求图 17.55(a)所示二端口网络的$\mathbf{y}_a$参数；(b) 求图 17.55(b)所示二端口网络的$\mathbf{y}_b$参数；(c) 画出这两个二端口网络并联后的电路图，并证明新的 y 参数等于 $\mathbf{y}_a+\mathbf{y}_b$。

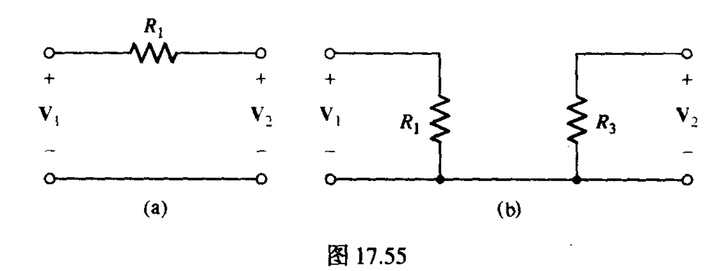


图 17.55

17.4　阻抗参数

29. 对于图 17.8 所示的线性网络：(a) 求 $\mathbf{V}_1$，假设已知 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}4.7 & 2.2\\ 2.2 & 3.3\end{bmatrix}$(kΩ)和 $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1.5\\ -2.5\end{bmatrix}$(mA)；(b) 求 $\mathbf{I}_2$，假设已知 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-10 & 15\\ 15 & 6\end{bmatrix}$(kΩ)和 $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$(V)。

30. 对于图 17.8 所示的线性网络，计算：(a) $\mathbf{V}_2$，假设已知 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}5 & j\\ j & -j2\end{bmatrix}$(Ω)和 $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2\angle 20^\circ\\ 2\angle 0^\circ\end{bmatrix}$(A)；(b) $\mathbf{I}_1$，假设已知 $\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-j & 2\\ 4 & j4\end{bmatrix}$(Ω)和 $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}137\angle 30^\circ\\ 105\angle 45^\circ\end{bmatrix}$(V)。

31. 求图 17.56 所示二端口网络的 z 参数。

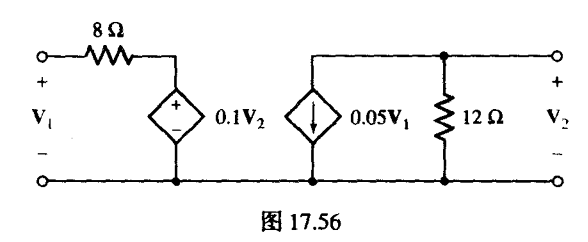


图 17.56

32. (a) 求图 17.57 所示二端口网络的 z 参数；(b) 如果 $\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2=1$ A，求电压增益 $\mathbf{G}_V$。

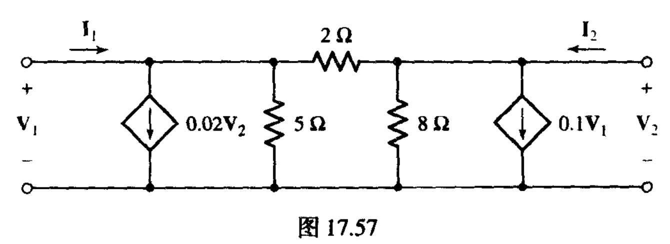


图 17.57

33. 某二端口网络的 **z** 参数为 $\begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}(\Omega)$。输入端包含电源 $\mathbf{V}_s$ 与 5 Ω 电阻的串联组合，输出端接负载 $R_L = 2\ \Omega$，求：(a) $\mathbf{G}_I$; (b) $\mathbf{G}_V$; (c) $\mathbf{G}_P$; (d) $\mathbf{Z}_{in}$; (e) $\mathbf{Z}_{out}$。

34. 设图 17.58 所示二端口网络的 **z** 参数为 $\begin{bmatrix} 1000 & 100 \\ -2000 & 400 \end{bmatrix}(\Omega)$，求传输给下列各元件的平均功率：(a) 200 Ω 的电阻；(b) 500 Ω 的电阻；(c)二端口网络。

35. 对于图 17.59 所示的晶体管高频等效电路，求 $\omega = 10^8$ rad/s 时的 4 个 **z** 参数。

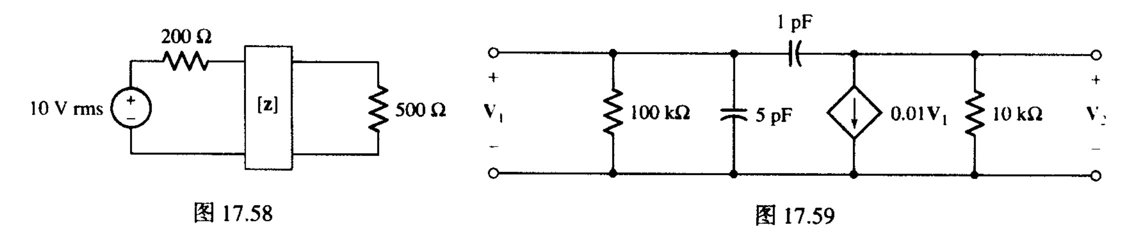


图 17.58　　　　图 17.59

36. 一个 **z** 参数为 $\begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}(\Omega)$的二端口网络由电源 $\mathbf{V}_s = 100\underline{/0^\circ}$ V 和 5 Ω 电阻的串联组合驱动，其输出端接有 25 Ω 的电阻。求从 25 Ω 电阻看进去的戴维南等效电路。

17.5 混合参数

37. 一个二端口网络的 **h** 参数为 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 9\ \Omega & -2 \\ 20 & 0.2\ \mathrm{S} \end{bmatrix}$。求将一个 1 Ω 电阻分别串联到下列位置后的新 **h** 值：(a) 输入端；(b) 输出端。

38. 某二端口网络的 **h** 参数为 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 100\ \Omega & 0.01 \\ 20 & 1\ \mathrm{mS} \end{bmatrix}$，激励源的内阻 $R_s = 100\ \Omega$，负载 $R_L = 500\ \Omega$，求该二端口网络的 $\mathbf{Z}_{in}$ 和 $\mathbf{Z}_{out}$。

39. 二端口网络如图 17.60 所示，求：(a) $\mathbf{h}_{12}$; (b) $\mathbf{z}_{12}$; (c) $\mathbf{y}_{12}$。

40. 二端口网络如图 17.61 所示，设 $\mathbf{h}_{11} = 1\ \mathrm{k}\Omega$，$\mathbf{h}_{12} = -1$，$\mathbf{h}_{21} = 4$，$\mathbf{h}_{22} = 500\ \mu\mathrm{S}$。求传输给下列各元件的平均功率：(a) $R_s = 200\ \Omega$; (b) $R_L = 1\ \mathrm{k}\Omega$; (c) 整个二端口网络。

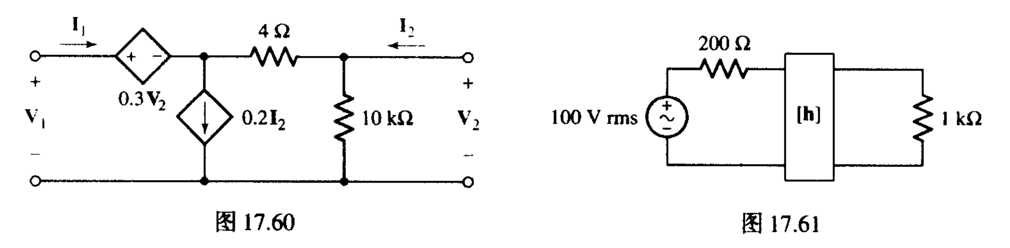


图 17.60　　　　图 17.61

41. (a) 求图 17.62 所示二端口网络的 **h** 参数；(b) 如果输入端接有电源 $\mathbf{V}_s$ 与串联的电阻 $R_s = 200\ \Omega$，求 $\mathbf{Z}_{out}$。

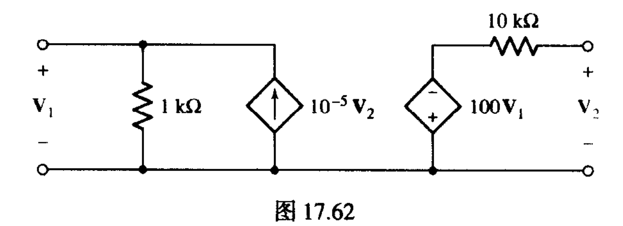


图 17.62

42. 求图 17.63 所示两个二端口网络的 **y**，**z** 和 **h** 参数。如果某个参数的值为无穷大，则跳过该参数集。

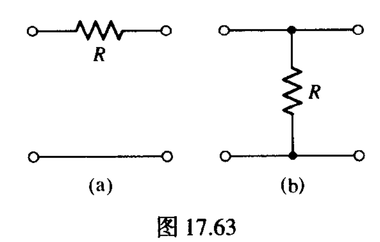


图 17.63

43. 图17.64所示是通常在高频下使用的双极型晶体管的模型，该模型在交流小信号情况下有效。如果发射极（E极）是输入和输出的公共端，基极（B极）作为输入，推导用 r_x，r_π，C_π，C_μ，g_m 和 r_d 表示的下列参数：(a) h_{oe}；(b) h_{fe}；(c) h_{ie}；(d) h_{re}。

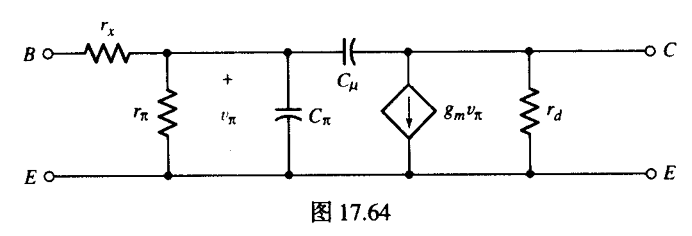


图 17.64

17.6　传输参数

44. 已知 $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4 & 6\\-1 & 5\end{bmatrix}$，$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & -1\\-2 & 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$，$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 0 & 5\\-2 & -3 & 1\\4 & -4 & 2\end{bmatrix}$，计算：(a) $\mathbf{y}\cdot\mathbf{b}$；(b) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}$；(c) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$；(d) $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$；(e) $\mathbf{y}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$。

45. (a) 求图 17.65 所示二端口网络的 **t** 参数；(b) 如果电源内阻 $R_s = 15\ \Omega$，求该二端口网络的 $\mathbf{Z}_{out}$。

46. 求图 17.66 所示二端口网络的 **t** 参数。

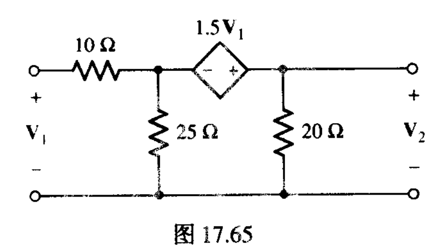


图 17.65

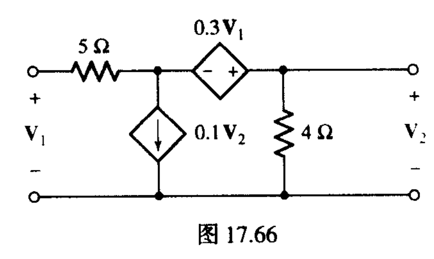


图 17.66

47. (a) 分别求 17.67 所示级联二端口网络的 $\mathbf{t}_A$，$\mathbf{t}_B$ 和 $\mathbf{t}_C$；(b) 求这个六电阻二端口网络的 **t**。

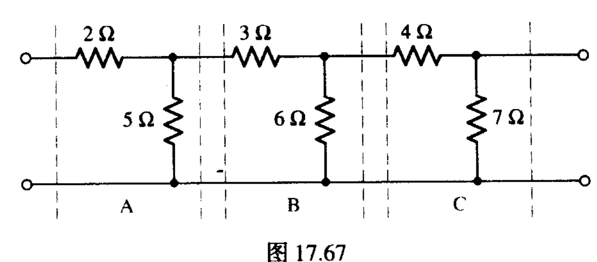


图 17.67



48. (a) 求图 17.68 所示单个 2 Ω 电阻构成的二端口网络的 $\mathbf{t}_A$ 参数；(b) 证明单个 10 Ω 电阻组成的网络，其 $\mathbf{t}$ 参数等于$(\mathbf{t}_A)^5$。

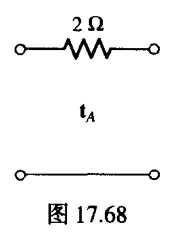


图 17.68

49. (a)分别求图 17.69(a)、图 17.69(b)和图 17.69(c)所示网络对应的 $\mathbf{t}_a$，$\mathbf{t}_b$ 和 $\mathbf{t}_c$；(b)利用二端口网络级联规则，求图 17.69(d)所示网络的 $\mathbf{t}$ 参数。

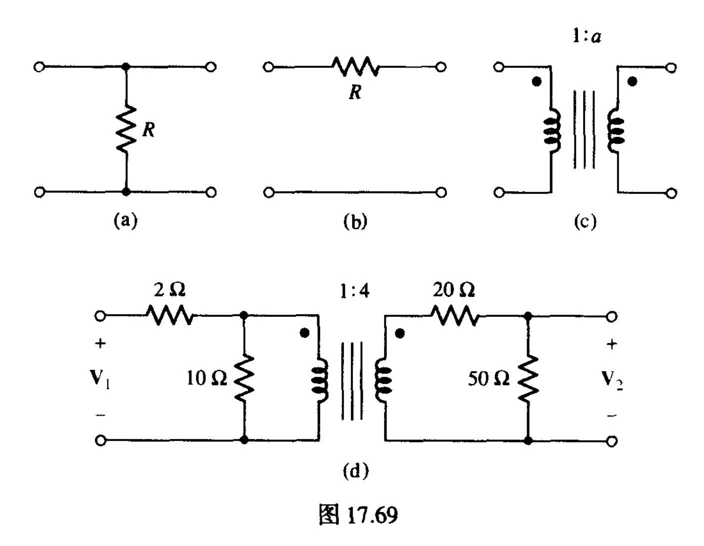


图 17.69

50. (a) 求图 17.70 所示二端口网络的 $\mathbf{t}$ 参数；(b) 在输出端接上 20 Ω 的电阻，利用二端口网络级联的性质求解新网络的 $\mathbf{t}_{\mathrm{new}}$。

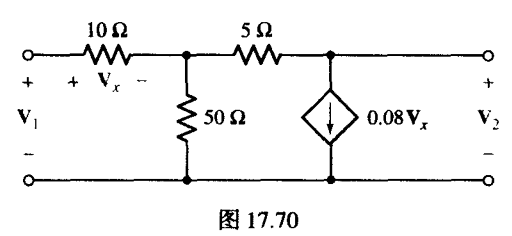


图 17.70

第18章　傅里叶电路分析

主要概念

- 用正弦函数与余弦函数之和表示周期函数
- 谐波频率
- 奇、偶对称性
- 半波对称性
- 复数形式的傅里叶级数
- 离散线谱
- 傅里叶变换
- 应用傅里叶级数和傅里叶变换法进行电路分析
- 频域的系统响应和卷积积分

引言

本章将通过分析时域和频域的周期函数继续介绍电路分析的方法。特别是将考虑周期激励函数，该函数满足一定的数学限制，而这些限制正是实验室中产生的函数具有的特性。这样的函数可以表示成无穷多个正弦和余弦以及它们的谐波函数之和的形式。其中，由于每个正弦分量的受迫响应可以通过正弦稳态分析得到，因此整个线性网络对周期激励函数的受迫响应可以将各频率成分的响应线性叠加起来得到。

傅里叶级数在许多领域都有非常重要的意义，尤其是在通信领域。但是，近几年来，借助傅里叶方法进行电路分析的应用已经越来越少。现在使用脉冲调制方式供能的设备（比如计算机）所消耗的能量占全球总能耗的比例正日益增长，因此对存在于电力系统和电力设备中的谐波的课题研究正迅速成为一个非常严肃且重要的问题，即使是大规模发电厂也同样面临着这样的问题。只有运用傅里叶分析才可能了解这些潜在的问题以及相应的解决办法。

18.1　傅里叶级数的三角函数形式

我们已经知道，线性电路对任意激励函数的完全响应由受迫响应和自由响应两部分组成。我们在时域（第7、8、9章）和频域（第14、15章）中都讨论过自由响应，也从各个方面对受迫响应进行了讨论，包括第10章中介绍的基于相量的分析方法。正如我们讨论过的那样，在某些情况下需要求出一个给定电路的完全响应的两个分量，而在另一些时候我们只需要求得自由响应或者受迫响应中的一个。在本节中，我们将关注正弦性质的激励函数，并且探寻如何将一个一般周期函数写成上述函数之和的形式，从而探讨一套新的电路分析方法。

谐波

为了研究用无穷多个正弦和余弦函数之和来表示一般周期函数的可行性，下面来考虑一个简单的例子。首先来看一个角频率为 ω_0 的余弦函数：

$$v_1(t) = 2\cos\omega_0 t$$

其中，

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

其周期 T 为

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T 表示基频周期，而且通常不带下标 0。该正弦波的谐波频率为 $n\omega_0$，其中 ω_0 为基频，$n = 1, 2, 3, \cdots$，第一个谐波的频率即为基频。

接下来考虑一个三次谐波电压：

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

图 18.1(a)所示是基波 $v_1(t)$、三次谐波 $v_{3a}(t)$以及这两个波形叠加后的 3 条曲线。注意，叠加后的波形也具有周期性，其周期为 $T = 2\pi/\omega_0$。

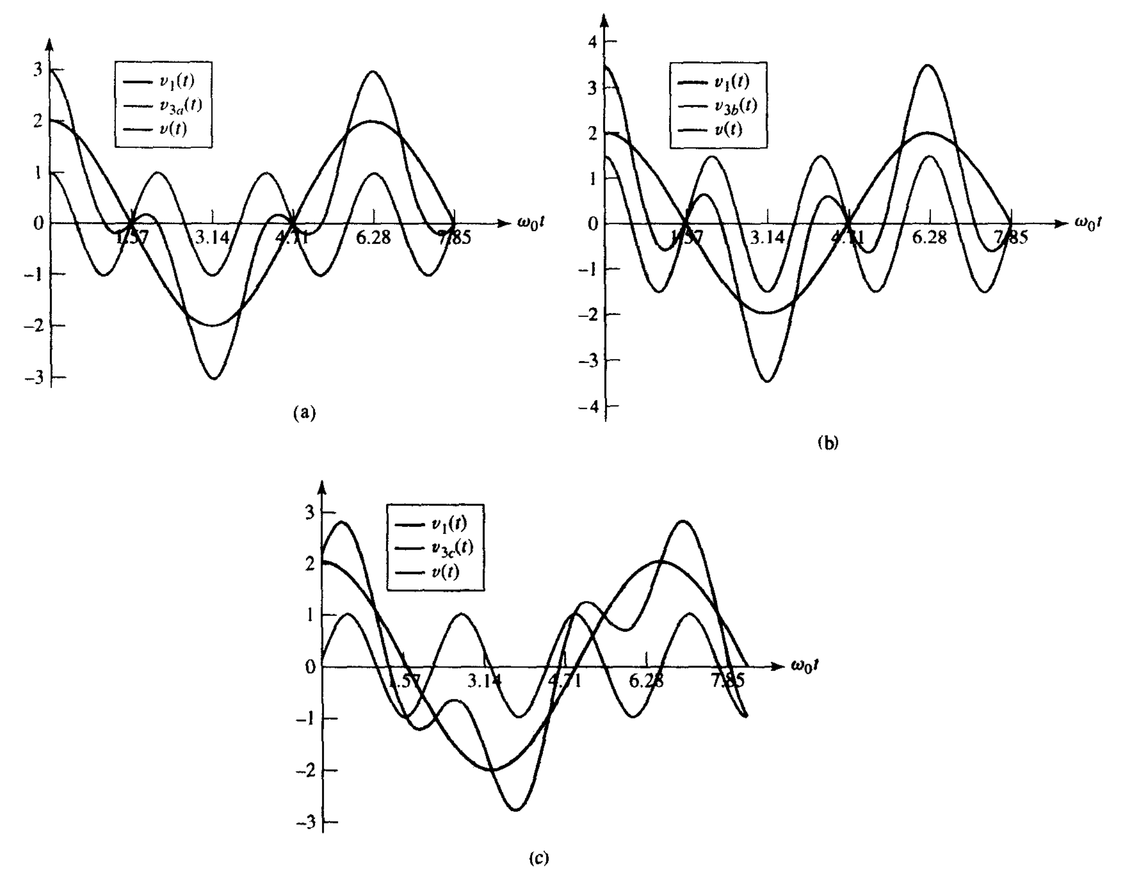


图 18.1　将基波和三次谐波叠加可以得到无限多种不同的波形。这是其中的几个例子，这里基波 $v_1 = 2\cos\omega_0 t$，而三次谐波分别为：(a) $v_{3a} = \cos 3\omega_0 t$；(b) $v_{3b} = 1.5\cos 3\omega_0 t$；(c) $v_{3c} = \sin 3\omega_0 t$

当三次谐波分量的相位和幅度发生变化时，它与基波叠加后得到的周期函数的形式也会相应地发生改变。图 18.1(b)所示是 $v_1(t)$与幅度稍大一些的三次谐波叠加后的结果：

$$v_{3b}(t) = 1.5\cos 3\omega_0 t$$

将三次谐波的相位改变 90°，使之变为

$$v_{3c}(t) = \sin 3\omega_0 t$$

图18.1(c)所示的相应的叠加结果也会发生变化。但上述所有情况下，叠加后波形的周期均等于基波周期，而叠加后波形的特性与每个谐波成分的幅度与相位有关，后面将看到，可以通过正弦函数的适当组合来产生完全不具有正弦特性的波形。

在熟悉了用无穷多个正弦和余弦函数的叠加来表示周期波形之后，下面将用与拉普拉斯变换类似的方法来讨论一般非周期波形的频域表示。

练习

18.1　设一个三次谐波电压和基波电压叠加得到 $v = 2\cos\omega_0 t + V_{m3}3\sin\omega_0 t$，其波形如图 18.1(c) 所示，$V_{m3} = 1$。(a) 求 V_{m3} 的值使得 $v(t)$在 $\omega_0 t = 2\pi/3$ 处的斜率等于零；(b) 计算 $\omega_0 t = 2\pi/3$ 处的 $v(t)$值。

答案：0.577；-1.000。

傅里叶级数

首先考虑周期函数$f(t)$，在 11.2 节曾给出了该函数的定义，函数关系如下：

$$f(t) = f(t+T)$$

其中，T 为周期。接下来进一步假设函数$f(t)$满足下面的条件：

1. $f(t)$在定义域内是单值的，即$f(t)$满足数学上关于函数的定义。
2. 对任意 t_0，积分$\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|dt$ 都存在（即该积分值有限）。
3. 在任一周期内$f(t)$只有有限个不连续点。
4. 在任一周期内$f(t)$只有有限个极大值和极小值。

说明：$f(t)$可以代表电压或者电流波形，真正能够被产生的电压或电流波形都必须满足这 4 个条件。当然需要注意：有些数学函数是存在的，但是可能不满足这些条件。

傅里叶定理指出，对于具有上述特征的周期函数$f(t)$，可以用无穷级数表示：

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots \\ &\quad + b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t) \end{aligned} \qquad [1]$$

其中，基波频率 ω_0 可以用周期 T 来表示：

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

式[1]中的a_0，a_n和b_n为与n和$f(t)$有关的常数。式[1]是$f(t)$的傅里叶级数的三角函数形式，求解系数a_0，a_n和b_n的过程称为傅里叶分析。我们的目标并不是要证明这个定理，而是简单地推导傅里叶分析过程并验证其正确性。

一些有用的三角函数积分

在讨论傅里叶级数的系数求解方法之前，我们先来看一些有用的三角函数积分。令n和k表示整数下标的集合 1，2，3，⋯。在下面的积分中，0 和T作为积分限，但必须知道，取任何一个周期区间进行积分都是相同的。因为在一个周期内正弦函数的平均值为零，所以

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{2}$$

以及

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{3}$$

同样，很容易证明下面 3 个定积分的值也等于零：

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \tag{4}$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad (k \neq n) \tag{5}$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt = 0 \qquad (k \neq n) \tag{6}$$

式[5]和式[6]中的例外情况也很容易求出，故可以得到

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\, dt = \frac{T}{2} \tag{7}$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t\, dt = \frac{T}{2} \tag{8}$$

傅里叶系数的计算

现在我们可以计算傅里叶级数中的待定系数了。首先求a_0，分别将式[1]的两边在一个周期内积分，得到

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_0^T a_0\, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\, dt$$

而和式中的每一项都具有式[2]或式[3]的形式，因此，

$$\int_0^T f(t)\, dt = a_0 T$$

该式也可以表示为

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \tag{9}$$

上式说明常数a_0即为$f(t)$在一个周期内的平均值，因此将其称为$f(t)$的直流成分。

为了计算余弦项的系数，例如$\cos k\omega_0 t$的系数a_k，我们首先将式[1]的两边同时乘以$\cos k\omega_0 t$，然后分别对等式两边在一个周期内进行积分，得到

$$\int_0^T f(t)\cos k\omega_0 t\,dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \sin n\omega_0 t\,dt$$

由式[3]、式[4]和式[6]可知，除了 $k=n$ 时 a_n 这一项不为0外，上式右边的所有项均为0。利用式[8]，可以求出 a_k 或 a_n：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad [10]$$

其值等于 $f(t)\cos n\omega_0 t$ 在一个周期内的平均值的两倍。

用类似的方法，通过乘以 $\sin k\omega_0 t$ 并在一个周期上积分，我们注意到除了一项以外，公式右边的其他所有项均等于0，再由式[7]，可以求出 b_n：

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad [11]$$

其值等于 $f(t)\sin n\omega_0 t$ 在一个周期内的平均值的两倍。

由式[9]到式[11]，可以求出式[1]所示的傅里叶级数中 a_0 及所有的 a_n 和 b_n 的值：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad [1]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad [9]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \quad [10]$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \quad [11]$$

例题 18.1　半波整流电路是一种将正弦电压输入转化为（脉动）直流电压输出的非线性电路，图 18.2 所示的“半正弦”波形表示了半波整流电路输出端的电压响应。求这个波形的傅里叶级数表示。

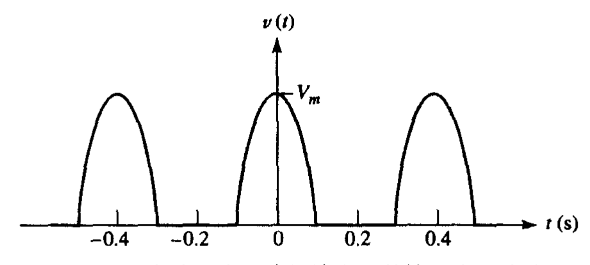


图 18.2　半波整流电路的输出，其输入为正弦波

解：▶明确题目的要求

图中的函数是一个周期函数，它与正弦函数有些相似，但是只有正弦函数的正半部分，需要求其傅里叶级数表示。如果负半部分的电压没有去掉，则波形为一个正弦函数，这是一个非常简单的问题。

▶收集已知信息

为了将此电压波形用傅里叶级数表示，首先必须确定其周期，接着将这个用图形给出的电压波形表示为关于时间的函数形式。从图中可以看出，其周期为

$$T = 0.4\ \text{s}$$

因此，

$$f_0 = 2.5\ \text{Hz}$$

于是，

$$\omega_0 = 5\pi\ \text{rad/s}$$

▶设计方案

求解本题的最直接的方法是应用式[9]~式[11]来计算系数a_0，a_n和b_n。因此，我们需要得到$v(t)$的函数表达式，在$t=0$到$t=0.4$的时间区间中可以定义$v(t)$为

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \leqslant t \leqslant 0.1 \\ 0 & 0.1 \leqslant t \leqslant 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \leqslant t \leqslant 0.4 \end{cases}$$

然而我们发现，如果将时间区间选取为$t=-0.1$至$t=0.3$将会减少分段表示的方程数目，因此积分的个数将会减少：

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \leqslant t \leqslant 0.1 \\ 0 & 0.1 \leqslant t \leqslant 0.3 \end{cases} \qquad [12]$$

尽管两个表达式都可以得到正确的结果，但后面这个表达式显然更好一些。

▶建立一组合适的方程

我们很容易得到零频率的分量：

$$a_0 = \frac{1}{0.4}\int_{-0.1}^{0.3} v(t)\,dt = \frac{1}{0.4}\left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t\,dt + \int_{0.1}^{0.3}(0)\,dt\right]$$

余弦项的幅度为

$$a_n = \frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t\,dt$$

而正弦项的幅度为

$$\frac{2}{0.4}\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \sin 5\pi n t\,dt$$

上式的值恒等于零，因此以后可以不加考虑。

说明： 注意，对于分段定义的函数，在一个周期上的积分必须分为几个子区间进行，而每个子区间上$v(t)$的函数形式是已知的。

▶确定是否还需要其他信息

在求积分时，$n=1$和n为其他值时得到的函数形式不同。如果$n=1$，则

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t\,dt = \frac{V_m}{2} \qquad [13]$$

如果 n 不等于 1，则

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi nt\, dt$$

▶尝试求解

计算上式，可得

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \qquad [14]$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2}[\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t]\, dt$$

或

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi}\frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2} \qquad (n \neq 1) \qquad [15]$$

（采用类似的积分方法可以证明：对任意的 n，均有 $b_n = 0$，即傅里叶级数不包含正弦项。）根据式[1]、式[13]、式[14]和式[15]可以得到傅里叶级数为

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2}\cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi}\cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi}\cos 30\pi t - \cdots \qquad [16]$$

说明：必须指出，对 a_n 的表达式（$n \neq 1$）取 $n \to 1$ 的极限，恰好可以得到 $n = 1$ 时的正确表达式。

▶验证结果是否合理或是否与预计相符

可以通过截取式[16]前面的若干项、忽略此后的各项、然后将数值代入来验证结果的正确性。另一种方法是将函数画出来，图 18.3 所示是截取前 1、2 和 6 项的情况（$n = 1, 2, 6$）。从图中可以看到，截取的项越多，画出的曲线就越接近于图 18.2 所示的原始曲线。

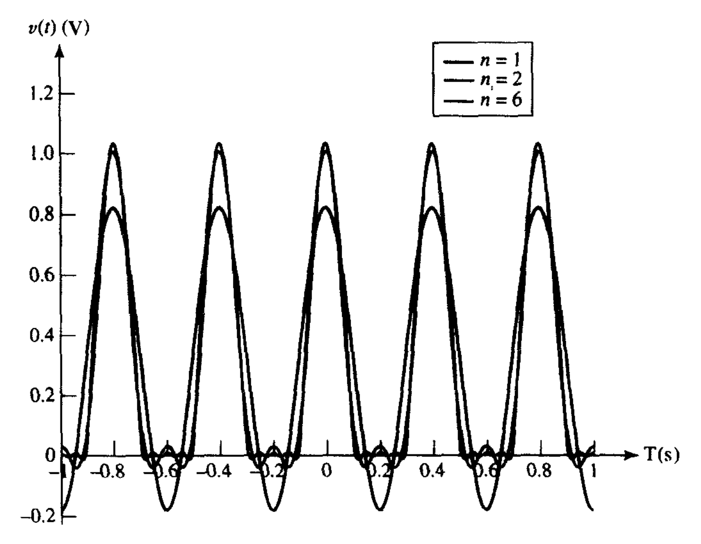


图 18.3　截取式[16]前 n 项（$n = 1$，2 和 6）得到的曲线，表明曲线在向半波正弦波形 $v(t)$ 收敛。为方便起见，选取幅度 $V_m = 1$

练习

18.2 已知一周期波形$f(t)$由下列式子描述：$f(t)=-4$，$0<t<0.3$；$f(t)=6$，$0.3<t<0.4$；$f(t)=0$，$0.4<t<0.5$；$T=0.5$。计算：(a) a_0；(b) a_3；(c) b_1。

18.3 写出如图 18.4 所示 3 个电压波形的傅里叶级数表达式。

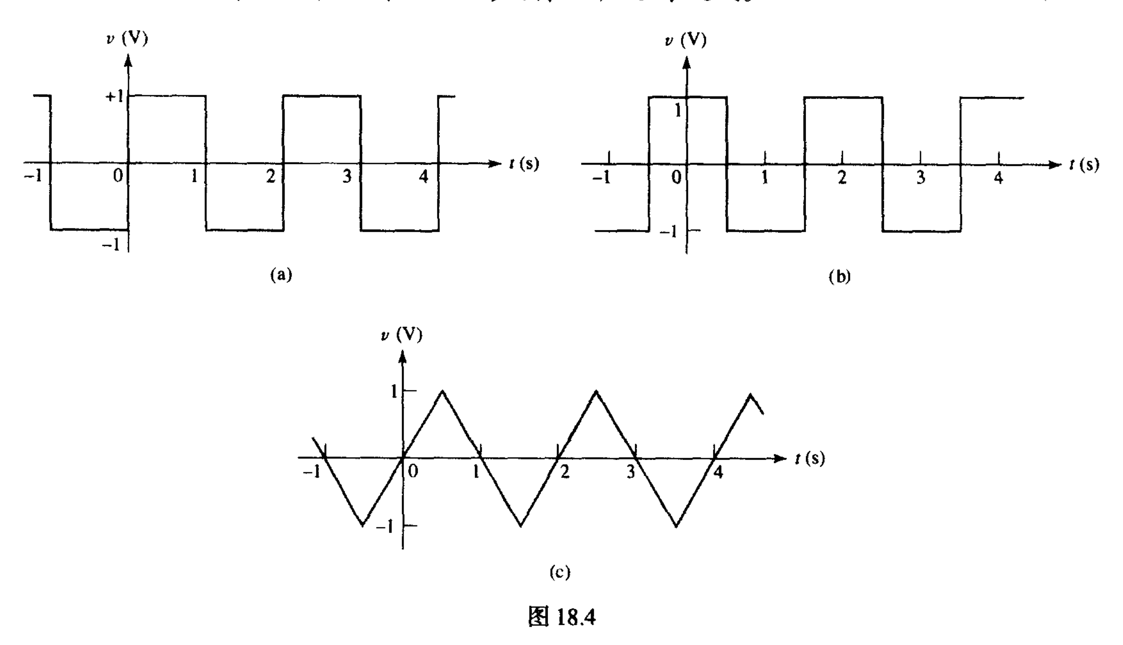


图 18.4

答案：18.2：−1.200；1.383；−4.44。18.3：$(4/\pi)(\sin \pi t+\frac{1}{3}\sin 3\pi t+\frac{1}{5}\sin 5\pi t+\cdots)$V；$(4/\pi)(\cos \pi t-\frac{1}{3}\cos 3\pi t+\frac{1}{5}\cos 5\pi t-\cdots)$ V；$(8/\pi^2)(\sin \pi t-\frac{1}{9}\sin 3\pi t+\frac{1}{25}\sin 5\pi t-\cdots)$。

线谱和相位谱

图 18.2 所示是例题 18.1 中函数$v(t)$的曲线，式[12]给出的是$v(t)$的解析表达式，它们都是时域上的表示形式。式[16]给出的$v(t)$的傅里叶级形式也是时域表示形式，但可以将其转化为频域上的表示形式。例如，图 18.5 所示是用线谱形式画出的$v(t)$各频率成分的幅度。这里，每个频率成分（即$|a_0|$，$|a_1|$等）的幅值大小是由对应频率点处（即f_0，f_1等）的垂直线段长度来表示的。为方便起见，令V_m等于 1。如果给定一个不同的V_m值，只需将y轴的坐标进行相应的尺度缩放即可。

这类图形又称为离散谱，为我们提供了许多有用的信息。特别是可以从图中看出要合理地近似表示原始波形所需的级数的项数。在图 18.5 所示的线谱中，可以看到 8 次谐波和 10 次谐波（相应的频率为 20 Hz 和 25 Hz）只是一个很小的值。因此，截去该级数 6 次谐波以后的各项是一种合理的近似，这一点读者可以自己通过图 18.3 来判断。

这里必须注意，在上例中由于不包含正弦项，因此n次谐波的幅度为$|a_n|$。如果b_n不等于零，那么频率为$n\omega_0$的分量的幅度必然为$\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，这是线谱图中必须标出的量。当我们讨论傅里叶级数的复数形式时，这个幅度将可以更加直接地求得。

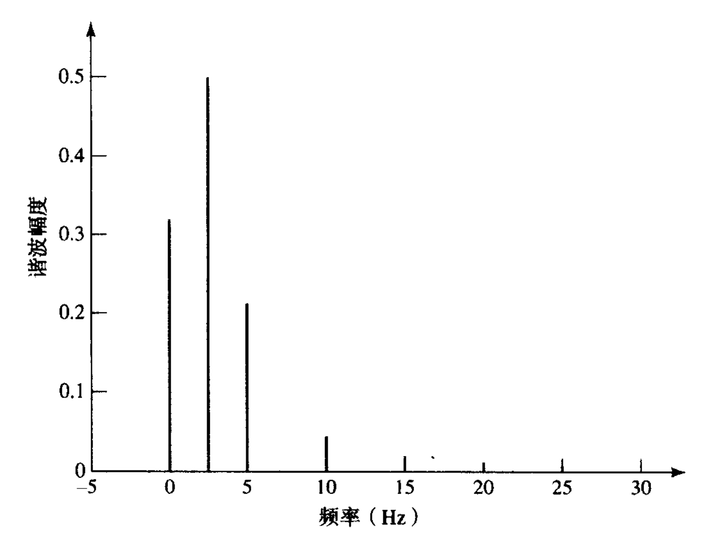


图 18.5 式[16]中 $v(t)$的离散线谱，这里只画出了前 7 个频率分量。为方便起见，选取幅度 $V_m = 1$

除了幅度谱以外，还可以得到离散相位谱。在任意频率 $n\omega_0$处，将余弦项和正弦项合并，可以得到相位角 ϕ_n：

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(n\omega_0 t + \arctan\frac{-b_n}{a_n}\right)$$
$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

或者可以写为

$$\phi_n = \arctan\frac{-b_n}{a_n}$$

在式[16]中，对每个 n 都有 $\phi_n = 0°$ 或 180°。

本例中得到的傅里叶级数不包含正弦项以及余弦项中的奇次谐波项（基波除外）。事实上，通过观察给定时域函数的对称性，在积分之前就可以判断出待求的傅里叶级数缺少哪些项。下一节将研究对称性的应用。

18.2 对称性的应用

偶对称和奇对称

两种很容易理解的对称是偶函数对称和奇函数对称，或者简称为偶对称和奇对称。如果$f(t)$满足：

$$f(t) = f(-t) \qquad [17]$$

则称$f(t)$具有偶对称性。函数 t^2，$\cos 3t$，$\ln(\cos t)$，$\sin^2 7t$ 以及常数 C 等都具有偶对称性。在这样的函数中，将 t 替换为$(-t)$并不会改变函数的值。这种对称性也可以在图形上表现出来，如果$f(t) = f(-t)$，则关于$f(t)$轴存在着镜像对称性。图 18.6(a)所示的函数具有偶对称性，如果将该图形沿$f(t)$轴折叠，则其正时间部分的图像与负时间部分的图像将完全重合，即一个图像位于另一个图像之上。

我们将奇对称性定义为：如果$f(t)$具有奇对称性，则

$$f(t) = -f(-t) \qquad [18]$$

换句话说，如果将 t 替换为$(-t)$，将得到该函数的相反数。例如，函数 t，$\sin t$，$t\cos 70t$，$t\sqrt{1+t^2}$ 以及图 18.6(b)所示的函数均为奇函数，具有奇对称性。从图形上看，奇对称函数的特性可以很明显地得到，如果将 $f(t)$在 $t>0$ 部分的图像绕着正 t 轴旋转，再将所得到的结果沿着 $f(t)$轴对折，那么这两部分曲线（$t>0$ 部分和 $t<0$ 部分）将完全重合。也就是说，不同于偶函数关于 $f(t)$轴的轴对称性，我们现在得到的奇函数的对称性是关于原点的对称性。

了解了偶对称和奇对称的定义之后，可以知道：两个偶函数的乘积或者两个奇函数的乘积具有偶对称性，而一个奇函数和一个偶函数的乘积具有奇对称性。

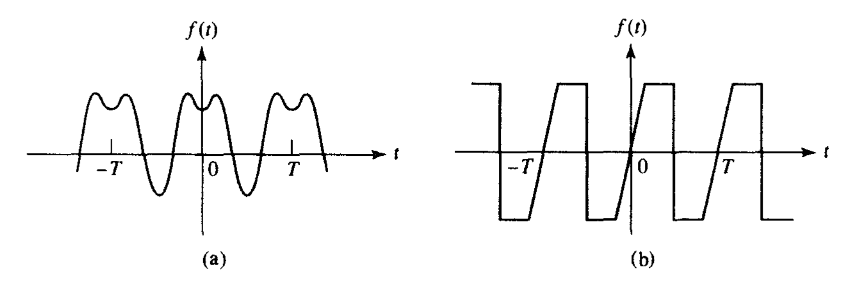


图 18.6 (a) 具有偶对称性的波形；(b) 具有奇对称性的波形

对称性和傅里叶级数项

下面来考察一个具有偶对称性的傅里叶级数的性质。假设一偶函数$f(t)$的表达式等于无穷多个正弦函数与余弦函数的和，显然这些正弦函数与余弦函数的和必须也是偶函数。但是正弦函数是奇函数，除了 0 以外（它既是奇函数也是偶函数），将任意多个正弦函数相加，结果都不可能是偶函数。因此，具有偶对称性的傅里叶级数只包含常数项和余弦项。下面来详细证明 $b_n=0$，已知：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt\right] \end{aligned}$$

在第一个积分中将积分变量 t 替换为 $-\tau$，或者 $\tau=-t$，并利用$f(t)=f(-t)=f(\tau)$，可得

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\sin(-n\omega_0\tau)(-d\tau) + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin\ n\omega_0\tau\, d\tau + \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt\right] \end{aligned}$$

因为积分变量的名称与积分的结果无关，因此，

$$\int_{0}^{T/2} f(\tau)\sin n\omega_0\tau\, d\tau = \int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

于是，

$$b_n = 0 \qquad （偶对称） \qquad [19]$$

即不含正弦项。因此，如果$f(t)$具有偶对称性，那么 $b_n=0$；反之，如果 $b_n=0$，那么$f(t)$一定具有偶对称性。

采用相同的方法，可以将a_n的表达式简化为在半个周期内的积分，即积分限为$t=0$到$t=T/2$：

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad （偶对称） \tag{20}$$

因此，对于偶函数，通过“在半个周期上积分并乘以 2”来求a_n的方法是符合逻辑的。

具有奇对称性的函数的傅里叶展开式中不含常数项和余弦项。下面来证明这个命题。已知：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right] \end{aligned}$$

对第一个积分做替换$t=-\tau$：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\left[\int_{T/2}^{0} f(-\tau)\cos(-n\omega_0\tau)\,(-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos n\omega_0\tau\, d\tau + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right] \end{aligned}$$

由于$f(-\tau)=-f(\tau)$，因此，

$$a_n = 0 \quad （奇对称） \tag{21}$$

同样可以证明：

$$a_n = 0 \quad （奇对称）$$

因此，若函数具有奇对称性，那么$a_n=0$且$a_0=0$；反之，如果$a_n=0$且$a_0=0$，则函数具有奇对称性。

同样，在半个周期上进行积分就可以得到b_n：

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad （奇对称） \tag{22}$$

本节前面的练习 18.3 给出了偶对称性和奇对称性的例子。在该练习的(a)和(b)中所给的方波的幅度和周期均相同，只是为了使得(a)的方波具有奇对称性，而(b)的方波具有偶对称性，因此选择了不同的时间原点，所得的结果分别只含有正弦项和余弦项。需要注意的是，可以将$t=0$处的点取在其他位置，使得函数既不具有偶对称性，也不具有奇对称性，这样得到的傅里叶级数项的系数个数至少是原来的两倍。

半波对称性

两种方波的傅里叶级数均具有另外一个有趣的特性，即它们都不包含偶次谐波①。亦即级数中的频率成分只包含基频的奇数倍；当n为偶数时，a_n和b_n均等于零。该特性是由另一种对称性引起的，称为半波对称。如果

$$f(t) = -f\left(t-\tfrac{1}{2}T\right)$$

或者

① 必须时常保持警惕，避免在偶函数和偶次谐波以及奇函数和奇次谐波之间产生混淆。例如，b_{10}是偶次谐波的系数，当$f(t)$是偶函数时，它等于零。

$$f(t) = -f\left(t + \tfrac{1}{2}T\right)$$

则称$f(t)$具有半波对称性。除了符号改变以外，每个半周期与相邻的半周期完全一样。半波对称性与偶对称性和奇对称性不一样，它不是由时间原点$t=0$所取的位置不同而导致的。因此，可以证明方波（见图 18.4(a)或图 18.4(b)）具有半波对称性。图 18.6 所示的波形均不具有半波对称性，但与它们有些类似的图 18.7 中的波形却具有半波对称性。

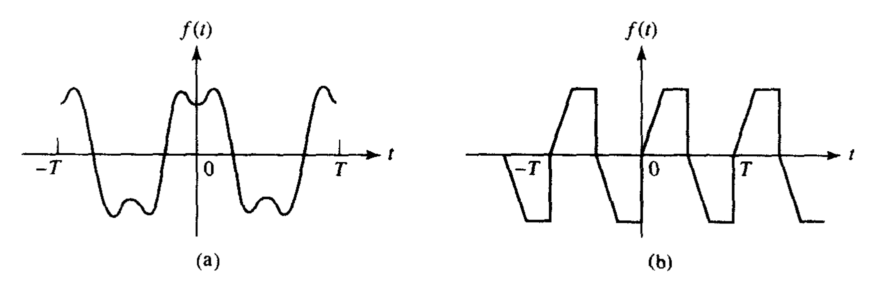


图 18.7 (a) 与图 18.6(a)所示波形类似的波形，但却具有半波对称性；(b) 与图 18.6(b)所示波形类似的波形，但却具有半波对称性

可以证明，任何具有半波对称性的函数的傅里叶级数仅包含奇次谐波。下面来考虑系数a_n：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right] \end{aligned}$$

可以将上式写成

$$a_n = \frac{2}{T}(I_1 + I_2)$$

然后在积分项I_1中做变量替换$\tau = t + 1/2T$，得到

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)\cos n\omega_0\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)d\tau \\ &= \int_0^{T/2} -f(\tau)\left(\cos n\omega_0\tau\cos\frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0\tau\sin\frac{n\omega_0 T}{2}\right)d\tau \end{aligned}$$

而$\omega_0 T$等于2π，于是，

$$\sin\frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

因此，

$$I_1 = -\cos n\pi\int_0^{T/2} f(\tau)\cos n\omega_0\tau\,d\tau$$

注意，I_2具有与I_1相同的形式，于是可得

$$a_n = \frac{2}{T}(1 - \cos n\pi)\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

因子（$1 - \cos n\pi$）表明当n为偶数时a_n等于零，因此，

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}\quad(\text{半波对称})\tag{23}$$

采用类似的分析可以证明，当 n 为偶数时 b_n 也等于零，于是，

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}\quad(\text{半波对称})\tag{24}$$

需要注意的是，具有半波对称性的波形也可以具有偶对称性或奇对称性。例如，图 18.7(a)所示的波形既具有偶对称性，又具有半波对称性。当波形同时具有半波对称性以及偶对称性或奇对称性中的一种时，可以根据其 1/4 周期的波形来重构整个波形。a_n 和 b_n 的值也可以通过在任意 1/4 周期上进行积分而求得，即

$$\left.\begin{aligned}&a_n=\frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt && n\text{ 为奇数}\\&a_n=0 && n\text{ 为偶数}\\&b_n=0 && \text{对于所有 }n\end{aligned}\right\}(\text{半波对称和偶对称})\tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_n=0 && \text{对于所有 }n\\&b_n=\frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin \omega_0 t\,dt && n\text{ 为奇数}\\&b_n=0 && n\text{ 为偶数}\end{aligned}\right\}(\text{半波对称和奇对称})\tag{26}$$

说明：在计算给定函数的傅里叶级数时，花一些时间来考虑其对称性是值得的。

表 18.1 提供了各种讨论过的对称性简化的总结。

表 18.1　基于对称性的傅里叶级数简化的总结

对称性类型	特征	简化
偶对称	$f(t)=-f(t)$	$b_n=0$
奇对称	$f(t)=-f(-t)$	$a_n=0$
半波对称	$f(t)=-f\left(t-\frac{T}{2}\right)$ 或 $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$	$a_n=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ $b_n=\begin{cases}\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$
偶对称、半波对称	$f(t)=-f\left(t-\frac{T}{2}\right)$ 和 $f(t)=-f(t)$ 或 $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$ 和 $f(t)=-f(t)$	$a_n=\begin{cases}\frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ $b_n=0$　对于所有 n
奇对称、半波对称	$f(t)=-f\left(t-\frac{T}{2}\right)$ 和 $f(t)=-f(-t)$ 或 $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$ 和 $f(t)=-f(-t)$	$a_n=0$　对于所有 n $b_n=\begin{cases}\frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

练习

18.4 画出下列函数的波形，判断该函数是否具有偶对称性、奇对称性以及半波对称性，然后计算周期：(a) $v=0$，$-2<t<0$和$2<t<4$；$v=5$，$0<t<2$；$v=-5$，$4<t<6$；重复；(b) $v=10$，$1<t<3$；$v=0$，$3<t<7$；$v=-10$，$7<t<9$；重复；(c) $v=8t$，$-1<t<1$；$v=0$，$1<t<3$；重复。

18.5 求练习 18.4 中(a)和(b)的傅里叶级数。

答案：18.4：否，否，是，8；否，否，否，8；否，是，否，4。

18.5：$\sum_{n=1(\text{奇})}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{4}+\sin\frac{n\pi t}{4}\right)$；

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left[\left(\sin\frac{3n\pi}{4}-3\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi t}{4}+\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{3n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi t}{4}\right]$。

18.3 周期激励函数的完全响应

使用傅里叶级数可以将任何周期性激励函数表示为无穷多个正弦激励函数之和的形式。通过常规的稳态分析，可以求出每个正弦函数的受迫响应，而网络传递函数的极点决定了自由响应。根据网络的初始条件（包括受迫响应的初始值），可以求出自由响应的幅度，从而将受迫响应和自由响应相加得到完全响应。

例题 18.2 将图 18.8(b)所示的方波信号（包括其直流成分）作用于图 18.8(a)所示的串联 RL 电路，求该电路的周期性电流响应。激励函数在 $t=0$ 时接入电路，电路的初始值为零。

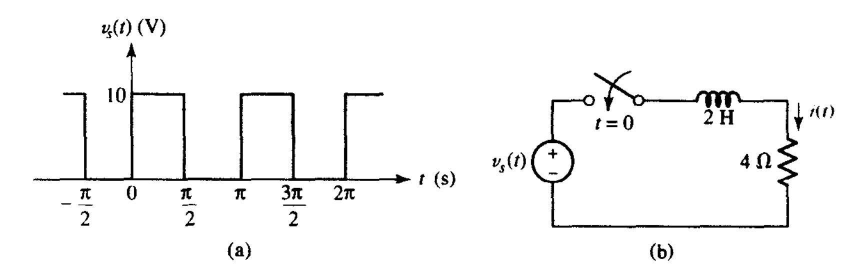


图 18.8 (a)方波电压激励函数；(b) 在 $t=0$ 时将(a) 所示的激励函数作用于串联 RL 电路中，需求解 $i(t)$的完全响应

解：该激励函数的基频为 $\omega_0=2$ rad/s，通过与如图 18.4(a)所示的练习 18.3 中解得的波形进行比较，可以写出本题的激励函数的傅里叶级数为

$$v_s(t)=5+\frac{20}{\pi}\sum_{n=1(\text{奇})}^{\infty}\frac{\sin 2nt}{n}$$

在频域中，可以求出第 n 次谐波的受迫响应为

$$v_{sn}(t)=\frac{20}{n\pi}\sin 2nt$$

即

$$\mathbf{V}_{sn}=\frac{20}{n\pi}\underline{/-90^\circ}=-j\frac{20}{n\pi}$$

RL 电路在这个频率上的阻抗为

$$\mathbf{Z}_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

因此，在这个频率上的受迫响应为

$$\mathbf{I}_{fn} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{\mathbf{Z}_n} = \frac{-j5}{n\pi(1+jn)}$$

说明：$V_m \sin \omega t$ 是 $V_m \cos(\omega t - 90°)$，$V_m \underline{/-90°} = -jV_m$。

变换到时域中，可以得到

$$\begin{aligned} i_{fn} &= \frac{5}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\cos(2nt - 90° - \arctan n) \\ &= \frac{5}{\pi(1+n^2)}\left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt\right) \end{aligned}$$

因为直流成分产生的响应为 5 V/4 Ω = 1.25 A，因此，总的受迫响应可以表示为下面的和式：

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{奇})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right]$$

这样一个简单电路的自由响应是熟悉的单个指数项（由传输函数 $\mathbf{I}_f/\mathbf{V}_s = 1/(4+2\mathrm{s})$ 只有一个极点决定）：

$$i_n(t) = A\mathrm{e}^{-2t}$$

因此，完全响应等于如下的和式：

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

当 $t = 0$ 时，由 $i(0) = 0$，可以得到

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{奇})}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

虽然该式完全正确，但是计算出这个和式的数值并用它来表示更方便一些。$\sum 1/(1+n^2)$ 前 5 项的和为 0.671，前 10 项的和为 0.695，前 20 项的和为 0.708，精确的和为 0.720（保留 3 位有效数字）。因此，

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi}(0.720) = -0.104$$

于是，

$$\begin{aligned} i(t) = &-0.104\mathrm{e}^{-2t} + 1.25 \\ &+ \frac{5}{\pi}\sum_{n=1(\text{奇})}^{\infty}\left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2}\right] \quad \text{(A)} \end{aligned}$$

在求解这个问题的过程中，必须用到本章和前面 17 章中介绍的许多基本概念。因为这个具体问题比较简单，因此没有用到一些其他概念，但是它们对于一般分析的作用是可以肯定的。从这个意义上说，可以把对本问题的解答看成是电路分析导论课程学习中的一个重大成就。尽管很有成就感，但是必须指出，例题18.2所求出的解析形式的完全响应其实并没有太大意义，因为它没有描绘出响应的本质。而实际上，我们想要得到的是时间函数 $i(t)$ 的曲线。这可以通过对足够多的项进行

烦琐的计算而得到，因此台式计算机或者可编程计算器在这里可以给我们提供很大帮助。当然，该曲线也可以通过将自由响应、直流项和前几个谐波项叠加起来近似得到，不过这个工作不值得去做。

综上所述，解决这类问题最有效的方法是采用反复的瞬态分析方法。也就是说，可以通过如下方法求得相应的形式：先算出时间区间 $t = 0$ 到 $t = \pi/2$ 内的曲线，这是一个最大值为 2.5 A 的指数函数。在求出该时间区域末端时刻的函数值之后，相当于知道了下一个 $\pi/2$ 秒时间段的初始值。这样反复进行下去，直到响应曲线具有周期性为止。这种方法非常适合于本例，因为相邻区间 $\pi/2 < t < 3\pi/2$ 和 $3\pi/2 < t < 5\pi/2$ 的电流波形的差异几乎可以忽略。图 18.9 所示是电流的完全响应曲线。

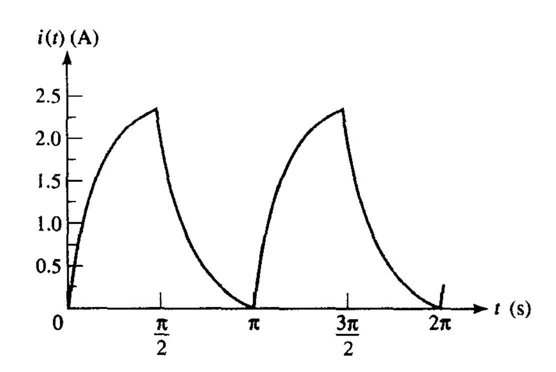


图 18.9　在图 18.8(a)的激励函数作用下图 18.8(b)所示电路的完全响应的初始波形

练习

18.6　采用第 8 章中给出的方法确定图 18.9 所示的电流值，其中 t 的取值为：(a) $\pi/2$；(b) π；(c) $3\pi/2$。

答案：2.392 A；0.1034 A；2.396 A。

18.4　傅里叶级数的复数形式

在求频谱的过程中，我们已经看到每一个频率成分的幅度与 a_n 和 b_n 均有关，也就是说，正弦项和余弦项均对幅度有影响，幅度的确切表达式为 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$。也可以通过将傅里叶级数的每一项表示成余弦函数及相角的形式直接得到用 $f(t)$ 和 n 表示的幅度和相角。

如果将正弦项和余弦项均表示为复指数函数乘以常数因子的形式，则可以得到一种更为方便和简洁的傅里叶级数的表示形式。

首先写出傅里叶级数的三角函数形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

然后将其中的正弦项和余弦项用指数形式替代，整理可得

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t}\frac{a_n + jb_n}{2}\right)$$

说明：读者应该可以回忆起如下的等式：$\sin\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{j2}$ 和 $\cos\alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$。

定义复常数 $\mathbf{c}_n$:

$$\mathbf{c}_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{27}$$

a_n，b_n 和 $\mathbf{c}_n$ 的值均与 n 和 $f(t)$ 有关。如果将 n 替换为（$-n$），那么这些常数将如何变化呢？系数 a_n 和 b_n 的定义参见式[10]和式[11]，显然可以发现：

$$a_{-n} = a_n$$

但是，

$$b_{-n} = -b_n$$

由式[27]得到

$$\mathbf{c}_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{28}$$

因此，

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}^*_{-n}$$

另外，令：

$$\mathbf{c}_0 = a_0$$

因此，$f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

或

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

最后，我们不需要对上式的第二项级数从 1 到 ∞ 进行求和，而是将其变成从 -1 到 -∞ 进行求和，得到

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{29}$$

按照约定，从 -∞ 到 ∞ 的求和包含了 $n = 0$ 的情况。

式[29]是函数 $f(t)$ 的傅里叶级数的复数形式，简洁性是使用它的最重要原因。为了求出复系数 $\mathbf{c}_n$ 的表达式，将式[10]和式[11]代入式[27]中，得到

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt - j\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

然后，使用正弦和余弦函数的指数表达式将其化简为

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{30}$$

因此，傅里叶级数的三角函数形式中的两个公式就可以用一个简洁的公式来代替了。现在只需要做一次积分就可以求得傅里叶系数，而不需要再像以前那样做两次积分，而且这个积分的计算几乎总是更为简单。但需要注意的是，式[30]中积分的乘积因子为 $1/T$，而求解 a_n 和 b_n 的积分公式中的因子均为 $2/T$。

将指数形式的傅里叶级数的两个基本关系式写在一起，可得

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{29}$$

$$\mathbf{c}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{30}$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$，可见与以前一样。

在各频率点 $\omega=n\omega_0$ 处（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$），指数形式的傅里叶级数的幅度为 $|\mathbf{c}_n|$。可以画出 $|\mathbf{c}_n|$ 关于 $n\omega_0$ n 或 nf_0 的离散频谱（横坐标由正轴和负轴组成），将得到关于原点对称的图像，因为根据式[27]和式[28]可知 $|\mathbf{c}_n|=|\mathbf{c}_{-n}|$。

由式[29]和式[30]，我们还可以看到在各频率 $\omega=n\omega_0$ 处（$n=1,2,3,\cdots$）的正弦分量的幅度为 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}=2|\mathbf{c}_n|=2|\mathbf{c}_{-n}|=|\mathbf{c}_n|+|\mathbf{c}_{-n}|$。对于直流成分，$a_0=\mathbf{c}_0$。

式[30]给出的指数形式的傅里叶系数也受到 $f(t)$ 对称性的影响，下面给出了各种对称性情况下 $\mathbf{c}_n$ 的表达式：

$$\mathbf{c}_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \qquad \text{（偶对称）} \tag{31}$$

$$\mathbf{c}_n=\frac{-j2}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \qquad \text{（奇对称）} \tag{32}$$

$$\mathbf{c}_n=\begin{cases}\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt & \text{（}n\text{为奇数，半波对称）} \quad [33a]\\ 0 & \text{（}n\text{为偶数，半波对称）} \quad [33b]\end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n=\begin{cases}\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4}f(t)\cos n\omega_0 t\,dt & \text{（}n\text{为奇数，半波对称和偶对称）} \quad [34a]\\ 0 & \text{（}n\text{为偶数，半波对称和偶对称）} \quad [34b]\end{cases}$$

$$\mathbf{c}_n=\begin{cases}\dfrac{-j4}{T}\displaystyle\int_0^{T/4}f(t)\sin n\omega_0 t\,dt & \text{（}n\text{为奇数，半波对称和奇对称）} \quad [35a]\\ 0 & \text{（}n\text{为偶数，半波对称和奇对称）} \quad [35b]\end{cases}$$

例题 18.3 求图 18.10 所示方波的傅里叶系数 $\mathbf{c}_n$。

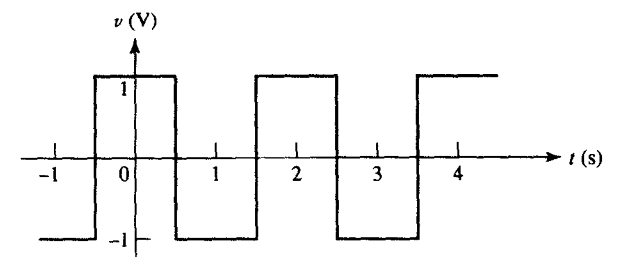


图 18.10 同时具有偶对称性和半波对称性的方波函数

解： 这个方波既具有偶对称性，又具有半波对称性。如果忽略这些对称性而使用一般的式[30]来求，则有 $T=2$，$\omega_0=2\pi/2=\pi$，从而可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-0.5} -\mathrm{e}^{-jn\pi t}\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} \mathrm{e}^{-jn\pi t}\,dt - \int_{0.5}^{1} \mathrm{e}^{-jn\pi t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-jn\pi}(\mathrm{e}^{-jn\pi t})_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{-jn\pi}(\mathrm{e}^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi}(\mathrm{e}^{-jn\pi t})_{0.5}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{j2n\pi}(\mathrm{e}^{jn\pi/2} - \mathrm{e}^{jn\pi} - \mathrm{e}^{-jn\pi/2} + \mathrm{e}^{jn\pi/2} + \mathrm{e}^{-jn\pi} - \mathrm{e}^{-jn\pi/2}) \\
&= \frac{1}{j2n\pi}(2\mathrm{e}^{jn\pi/2} - 2\mathrm{e}^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

于是可以得到 $\mathbf{c}_0=0$，$\mathbf{c}_1=2/\pi$，$\mathbf{c}_2=0$，$\mathbf{c}_3=-2/3\pi$，$\mathbf{c}_4=0$，$\mathbf{c}_5=2/5\pi$，等等。不过，如果我们还记得当 $b_n=0$ 时，$a_n=2\mathbf{c}_n$，则可以看到，这里求出的结果与练习 18.3 所得结果显示在图 18.4(b) 中的波形是一致的。

利用波形的对称性（偶对称和半波对称），应用式[34a]和式[34b]则可以简化问题：

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\
&= \frac{4}{2}\int_0^{0.5}\cos n\pi t\,dt = \frac{2}{n\pi}(\sin n\pi t)\Big|_0^{0.5} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} & (n\text{ 为奇数}) \\ 0 & (n\text{ 为偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

这与不利用对称性所求得的结果一致。

接下来看一个更复杂也更有趣的例子。

例题 18.4　如图 18.11 所示，函数 $f(t)$ 是一串幅度为 V_0，宽度为 τ 的矩形脉冲序列，周期为 T，求 $f(t)$ 的指数型傅里叶级数展开式。

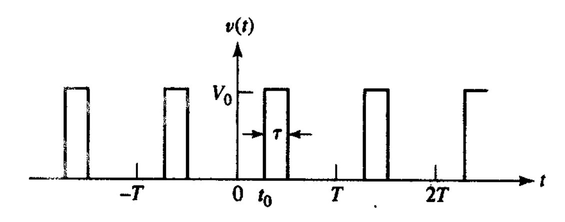


图 18.11　周期性矩形脉冲序列

解： 可以看到，基频为 $f_0=1/T$，因为没有任何对称性，因此必须利用式[30]来计算一般形式的复系数的值：



$$\begin{aligned}\mathbf{c}_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{V_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+\tau}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T}(\mathrm{e}^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - \mathrm{e}^{-jn\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{2V_0}{n\omega_0 T}\mathrm{e}^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right) \\ &= \frac{V_0\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\mathrm{e}^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)}\end{aligned}$$

因此可以求出$\mathbf{c}_n$的幅度为

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0\tau\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau}\right| \qquad [36]$$

$\mathbf{c}_n$的相角为

$$\text{ang}\,\mathbf{c}_n = -n\omega_0\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right) \quad \text{（可能需要加上 }180^\circ\text{）} \qquad [37]$$

式[36]和式[37]即为要求的指数形式的傅里叶级数。

采样函数

在现代通信理论中，经常用到式[36]中绝对值符号内的三角函数因子并称其为采样函数。“采样”是源于图 18.11 所示的时间函数，并且采样函数也是由此产生的。将该脉冲序列与任何其他函数$f(t)$相乘，如果τ足够小并且$V_0=1$，将得到$f(t)$的样本，其中采样间隔为T秒，定义为

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

为了求出$f(t)$中各种频率成分的幅度，我们有必要分析这个函数的一些重要性质。首先，我们注意到当x为π的整数倍时，Sa(x)的值为 0，即

$$\text{Sa}(n\pi) = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

当$x=0$时，该函数的值不确定，但容易证明其值为 1：

$$\text{Sa}(0) = 1$$

因此，Sa(x)的幅度在$x=0$到$x=\pi$的区间内，由单位值 1 一直递减至零。当x从π增加到2π时，|Sa(x)| 的幅度从零增加到一个小于 1 的极大值，然后又一次减小至零。当x继续增加时，接下来的各极大值将继续减小，因为 Sa(x)的分子不可能大于 1 而分母却持续增大。另外，Sa(x)呈现出偶对称性。

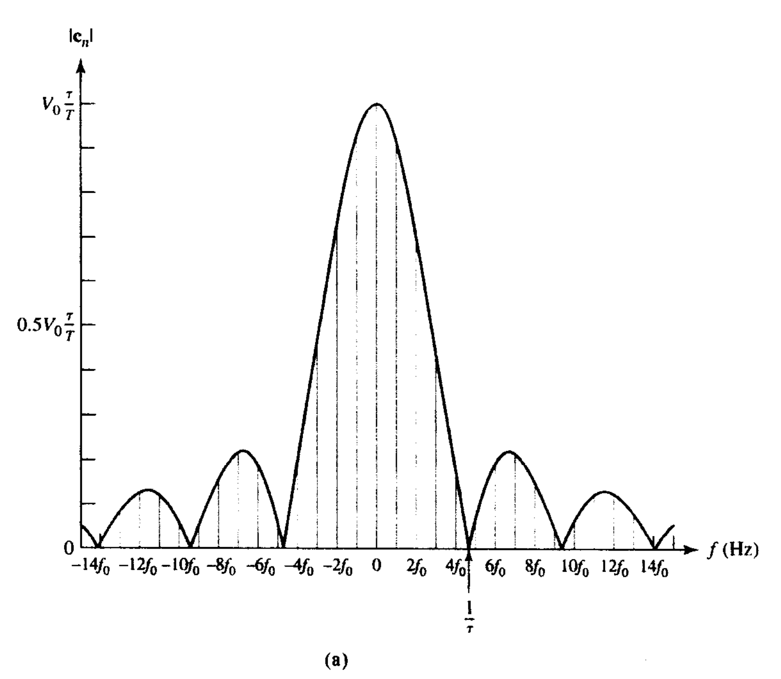
我们现在来计算其线谱。首先考虑$|\mathbf{c}_n|$，用基频f_0作为频率变量，从而将式[36]改写为

$$|\mathbf{c}_n| = \frac{V_0\tau}{T}\left|\frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau}\right| \qquad [38]$$

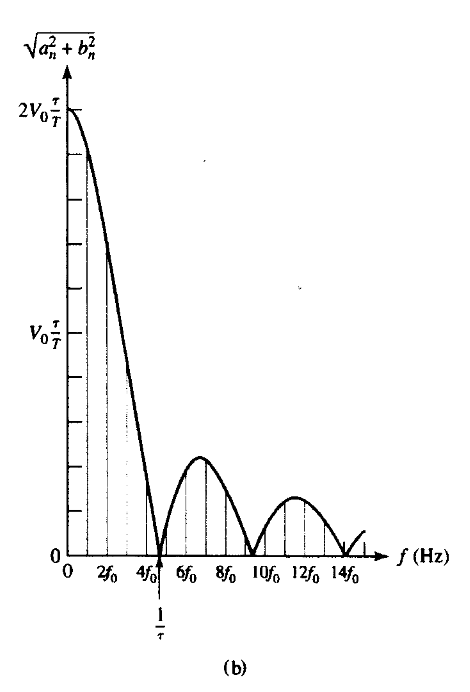
将已知值τ和$T=1/f_0$代入，并通过选取不同的n值（$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$）可以由式[38]求出任意$\mathbf{c}_n$的幅度。这里通过将频率nf_0看成连续的变量画出$|\mathbf{c}_n|$的包络，而不是用式[38]求解这些离散频点处的值。也就是说，虽然频率f（即nf_0）实际上只能取为离散的谐波频率 0，$\pm f_0$，$\pm 2f_0$，$\pm 3f_0$，等等，但这时可以将n当做一个连续变量来处理。当$f=0$时，$|\mathbf{c}_n|$显然等于$V_0\tau/T$，而当f增加到$1/\tau$时，$|\mathbf{c}_n|$等于零。图 18.12(a)所示就是所求的包络。在每个谐波频率上画一条垂直线就可以得到其线谱，而

垂直线的高度即为 $\mathbf{c}_n$ 的幅度。该图画出的是 $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$ 的曲线。在本例中，不存在包络值为 0 的谐波频率，不过，若取另外的 τ 或 T 值，则可以产生这样的情况。

图 18.12(b)画出了正弦成分的幅度随频率变化的曲线，并且应再次注意 $a_0 = \mathbf{c}_0$ 以及 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\mathbf{c}_n| + |\mathbf{c}_{-n}|$。



(a)



(b)

图 18.12 (a) 对应于图 18.11 所示的脉冲串，在 $f = nf_0$ 处（$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$）对应 $|\mathbf{c}_n|$ 的离散线谱；(b) 对应相同的脉冲串，在 $f = nf_0$ 处（$n = 0, 1, 2, \cdots$）$\sqrt{a^2 + b^2}$ 的线谱

观察图18.12(b)所示周期性方波序列的线谱可以得到几个结论。显然，离散线谱的包络"宽度"与τ有关，而与T无关。事实上，该包络的形状不是T的函数。进一步可以得到，可让这种周期性方波通过的滤波器的带宽是脉冲宽度τ的函数，而不是脉冲周期T的函数。从图18.12(b)可以看出，所需的带宽大约为$1/\tau$ Hz。如果脉冲的周期T增大（即脉冲的重复频率f_0减小），带宽$1/\tau$不变，则在频率为0到频率为$1/\tau$ Hz之间的谱线数目增加了，并且还是离散的，但每条线谱的幅度与T成反比。最后，时间原点位置的改变不会改变线谱，即$|\mathbf{c}_n|$不是t_0的函数。但是频率成分的相对相位会随着t_0的改变而改变。

练习

18.7 对于如图18.4(a)和图18.4(c)所示波形，求其复数形式的傅里叶级数的系数$\mathbf{c}_n$。

答案：$-j2/(n\pi)$，其中n为奇数，0，其中n为偶数；$-j[4/(n^2\pi^2)]\sin n\pi/2$，对于所有的$n$。

18.5 傅里叶变换的定义

在熟悉了关于周期性函数的傅里叶级数表示的基本概念之后，接下来我们定义傅里叶变换。首先回忆一下18.4节中得到的周期性矩形脉冲序列的频谱。该频谱是一个离散的线谱，并且所有周期性的时域函数都将得到这种形式的频谱。因为该频谱对于频率不是平滑的（或者说不是连续的），所以被称为离散谱，也就是说，它只在某些特定的频率点处有非零值。

但是，也有许多重要的激励函数并不是周期性的时域函数，例如单个矩形脉冲、阶跃函数、斜坡函数，以及第14章中定义的比较特殊的冲激函数等。我们可以求出这种非周期函数的频谱，但它们是连续的，也就是说，通常在任何非零的频率区间内（不管这个区间有多小）总是存在一定的能量。

为了引入傅里叶变换这个概念，下面首先从周期函数开始、然后令周期趋于无穷大来进行分析。根据前面分析周期矩形脉冲得到的经验，可以知道随着周期的增大，频谱包络的幅度将减小，但不改变形状，并且在任何给定的频率区间内将会出现更多的频率成分。可以预计到在极限情况下，即当周期变为无穷大时，包络的幅度将几乎为0，频率的成分将会变成无穷多个，频率之间的间隔将变得趋于零。例如，频率值为0~100 Hz的频率成分变为无穷多，但每个成分的幅度却趋于零。我们首先可能会产生疑问，因为幅度为0的频谱的概念非常难以理解。而我们知道，周期激励函数的线谱表示每个频率成分的幅度，但是非周期激励函数的零幅度的线谱又表示什么含义呢？这个问题将在下一节中介绍，现在我们继续讨论刚才的极限情况。

从指数形式的傅里叶级数开始：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

其中，

$$\mathbf{c}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \qquad [40]$$

和

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad [41]$$

现在令：

$$T \to \infty$$

由式[41]可知，这时 ω_0 将变成无穷小。用微分来表示这个极限：

$$\omega_0 \to d\omega$$

因此，

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \to \frac{d\omega}{2\pi} \qquad [42]$$

最后，任意"谐波"频率 $n\omega_0$ 应该与描述连续频谱的一般频率变量相对应。换句话说，当 ω_0 趋于0时，n 必须趋于无穷大，这样它们的乘积才是有限值：

$$n\omega_0 \to \omega \qquad [43]$$

正如我们前面所预期的那样，将这4个极限代入式[40]，可以发现 $\mathbf{c}_n$ 必然趋于0。如果将式[40]的两边同时乘以周期 T，然后取极限，则可以得到一个有意义的结果：

$$\mathbf{c}_n T \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt$$

该式的右边为 ω（而不是 t）的函数，可以用 $\mathbf{F}(j\omega)$ 来表示：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt \qquad [44]$$

下面来看式[39]的极限。将和式同时乘以 T 并除以 T，得到

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n T\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}$$

接下来将 $\mathbf{c}_n T$ 用一个新的量 $\mathbf{F}(j\omega)$ 替代并利用式[42]和式[43]。在取极限之后，求和运算变成了积分运算，于是得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega \qquad [45]$$

式[44]和式[45]一起称为傅里叶变换对。函数 $\mathbf{F}(j\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶变换，$f(t)$ 称为 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的傅里叶反变换。

说明： 读者可能已经注意到，傅里叶变换和拉普拉斯变换之间存在一些相似性。两者之间关键的不同在于：电路分析中采用傅里叶变换不容易将初始存储的能量包含进来，而采用拉普拉斯变换则很容易。另外，某些时域函数（比如指数增长函数）并不存在傅里叶变换。但是，如果我们关心的主要是频率信息而不是瞬态响应，则使用傅里叶变换更合适。

这一变换对的关系非常重要！读者必须要牢记，并且给予其充分的重视。为了强调其重要性，我们重新在下面将其列出：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\omega t}f(t)\,dt \qquad [46a]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega \qquad [46b]$$

在这两个公式中，指数项的指数部分符号相反，为了帮助记忆，可以认为在$f(t)$的表达式中取正号，这与式[39]中复数形式的傅里叶级数相一致。

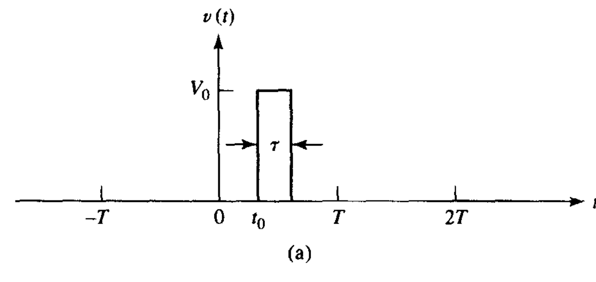
这时需要提出一个问题：通过式[46]所示的傅里叶变换对，我们能否得到任意函数$f(t)$的傅里叶变换？事实上，几乎对于所有实际可以产生的电压和电流来说，答案是肯定的。$\mathbf{F}(j\omega)$存在的一个充分条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

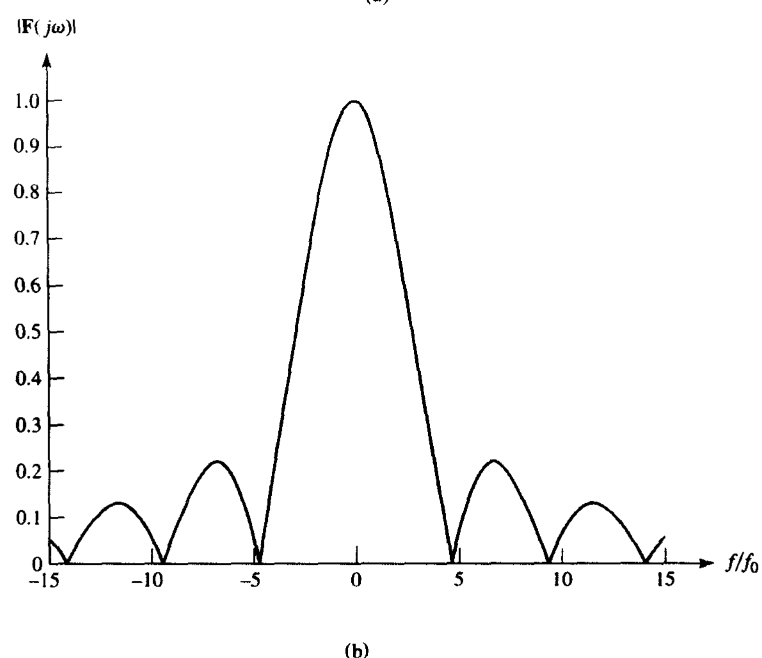
不过这不是必要条件，因为有些函数虽然不满足这一条件，却仍然存在傅里叶变换，阶跃函数就是其中的一个例子。而且，在后面我们将讲到，存在傅里叶变换的$f(t)$并不一定是非周期的，周期时间函数的傅里叶级数表示只是更为一般的傅里叶变换表示法的一个特例。

正如前面已经指出的那样，傅里叶变换对是唯一的。即对于给定的函数$f(t)$，只存在一个与之对应的$\mathbf{F}(j\omega)$；同样，对于给定的$\mathbf{F}(j\omega)$，也只存在一个$f(t)$与之对应。

例题 18.5 用傅里叶变换求图 18.13(a)所示的单个矩形脉冲的连续谱。



(a)



(b)

图 18.13 (a) 与图 18.11 所示序列相同的单个矩形脉冲；(b) 与该脉冲对应的$|\mathbf{F}(j\omega)|$的曲线，其中 $V_0 = 1$，$\tau = 1$，$t_0 = 0$。注意，频率轴被$f_0 = 1/1.5\pi$进行了归一化，以便与图 18.12(a)进行比较，而f_0本身与$\mathbf{F}(j\omega)$没有关系

解： 可以将题图中的脉冲看成图 18.11 所示波形的一部分，因此本题的脉冲可以表示为

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ 且 } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

根据式[46a]可以得到$f(t)$的傅里叶变换：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

容易求出这个积分并将其化简为

$$\mathbf{F}(j\omega) = V_0\tau \frac{\sin \frac{1}{2}\omega\tau}{\frac{1}{2}\omega\tau} e^{-j\omega(t_0+\tau/2)}$$

$\mathbf{F}(j\omega)$的幅度表示连续频谱，而且可以很明显地看出它具有采样函数的形式。其中，$\mathbf{F}(0)$的值为 $V_0\tau$。频谱的形状与图 18.12(b)所示的包络一致。我们将 $|\mathbf{F}(j\omega)|$ 随 ω 变化的曲线画出来，但它并不表示在任何给定频率下的电压幅度。那么它表示什么呢？分析式[45]可以发现，如果$f(t)$是电压波形，则$\mathbf{F}(j\omega)$的量纲为“伏特每单位频率”，在 15.1 节中曾介绍过这个概念。

练习

18.8　若$f(t) = -10$ V，-0.2 s $< t < -0.1$ s；$f(t) = 10$ V，0.1 s $< t < 0.2$ s；$f(t) = 0$，对于其他的 t，计算当 ω 取下列值时 $\mathbf{F}(j\omega)$的值：(a) 0；(b) 10π rad/s；(c) −10π rad/s；(d) 15π rad/s；(e) −20π rad/s。

18.9　若$\mathbf{F}(j\omega) = -10$ V/(rad/s)，-4 rad/s $< \omega < -2$ rad/s；$\mathbf{F}(j\omega) = +10$ V/(rad/s)，2 rad/s $< \omega < 4$ rad/s；$\mathbf{F}(j\omega) = 0$，对于所有其他的 ω，求$f(t)$在 t 取如下值时的数值解：(a) 10^{-4} s；(b) 10^{-2} s；(c) π/4 s；(d) π/2 s；(e) π s。

答案： 18.8：0；$j1.273$ V/(rad/s)；$-j1.273$ V/(rad/s)；$-j0.424$ V/(rad/s)；0。18.9：$j1.9099 \times 10^{-3}$ V；$j0.1910$ V；$j4.05$ V；$-j4.05$ V；0。

18.6　傅里叶变换的性质

本节的目标是建立傅里叶变换的若干数学性质，但更加重要的是理解它们的物理含义。首先应用欧拉公式替换式[46a]中的$e^{-j\omega t}$，可得

$$\mathbf{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \quad [47]$$

因为$f(t)$，$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 均为时域上的实函数，所以式[47]中的两个积分也为 ω 的实函数。因此，令：

$$\mathbf{F}(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} \quad [48]$$

可以得到

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \quad [49]$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt \quad [50]$$

$$|\mathbf{F}(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \qquad [51]$$

以及

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \qquad [52]$$

用 $-\omega$ 替换 ω 可以发现 $A(\omega)$ 和 $|\mathbf{F}(j\omega)|$ 均为 ω 的偶函数，而 $B(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 均为 ω 的奇函数。

接下来，如果 $f(t)$ 是 t 的偶函数，则式[50]中的被积函数为 t 的奇函数，并且积分区间的对称性要求 $B(\omega)=0$。因此，如果 $f(t)$ 为偶函数，则其傅里叶变换 $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 偶对称的实函数，此时对所有的 ω，相位函数 $\phi(\omega)$ 都为 0 或 π。而如果 $f(t)$ 为 t 的奇函数，则 $A(\omega)=0$，并且 $\mathbf{F}(j\omega)$ 为关于 ω 奇对称的纯虚函数，$\phi(\omega)=\pm\pi/2$。一般情况下，$\mathbf{F}(j\omega)$ 是 ω 的复函数。

最后，我们注意到在式[47]中把 ω 替换为 $-\omega$ 后将得到 $\mathbf{F}(j\omega)$ 的共轭，即

$$\mathbf{F}(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = \mathbf{F}^*(j\omega)$$

因此，

$$\mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega) = \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |\mathbf{F}(j\omega)|^2$$

傅里叶变换的物理意义

知道了傅里叶变换的数学性质后，现在来考虑其物理意义。假设 $f(t)$ 为 1 Ω 电阻上的电压或者流过该电阻的电流，因此 $f(t)$ 在这 1 Ω 的电阻上提供的瞬时功率为 $f^2(t)$。将此功率对所有时间进行积分，可以求得 $f(t)$ 提供给 1 Ω 电阻的总能量：

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \qquad [53]$$

下面采用一点技巧对这个积分进行变换。考虑到式[53]中的被积函数为 $f(t)$ 乘以其自身，因此将其中一个 $f(t)$ 用式[46b]进行替换，可得

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)\,d\omega\right]dt$$

因为 $f(t)$ 不是积分变量 ω 的函数，因此，我们可以将其放到括号内的积分里面，然后改变积分次序：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)e^{j\omega t}f(t)\,dt\right]d\omega$$

再将 $\mathbf{F}(j\omega)$ 移出内层积分，内层积分变为 $\mathbf{F}(-j\omega)$：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(j\omega)\mathbf{F}(-j\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega$$

综合上述结果，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}(j\omega)|^2\,d\omega \qquad [54]$$

式[54]非常有用，被称为帕斯瓦尔（Parseval's）定理。该定理连同式[53]告诉我们，在时域中对整个时间范围积分求得的与 $f(t)$ 相关的能量等同于在频域中对整个频率范围积分然后乘以 $1/(2\pi)$ 求得的能量。

说明： 帕斯瓦尔（Marc Antoine Parseval-Deschenes）是一位法国数学家、地理学家，而且还是一位诗人，他在 1805 年（比傅里叶发表的理论还要早 17 年）发表了他的这些理论。

帕斯瓦尔（Parseval's）定理还能够使我们对傅里叶变换的意义有更加深刻的理解和解释。考虑电压 $v(t)$ 及其傅里叶变换 $\mathbf{F}_v(j\omega)$，该电压在 1 Ω 电阻上产生的能量 $W_{1\Omega}$ 为

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega$$

上式最右边的等号成立是因为 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 是关于 ω 的偶对称函数。又因为 $\omega = 2\pi f$，因此可以将上式写成

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df = 2\int_{0}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, df \qquad [55]$$

图 18.14 所示是 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 随着 ω 和 f 变化的一条典型曲线。如果我们将频率轴用非常小的增量 df 进行分割，则由式[55]可知，$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 曲线下方宽度为 df 的一个小块的面积为 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\,df$，如图中阴影部分所示。所有这些面积的和（亦即 f 的范围）是从负无穷到正无穷，也就是 $v(t)$ 提供给 1 Ω 电阻的总能量。因此，$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 被称为（1 Ω）电阻的能量密度或者 $v(t)$ 的单位带宽能量（J/Hz），并且这个能量密度函数总是关于 ω 偶对称的非负的实函数。我们可以通过在相应的频率区间内对 $|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 进行积分计算出该频率区间的能量。注意，该能量密度与 $\mathbf{F}_v(j\omega)$ 的相位无关，因此有无穷多个时域函数以及傅里叶变换具有相同的能量密度函数。

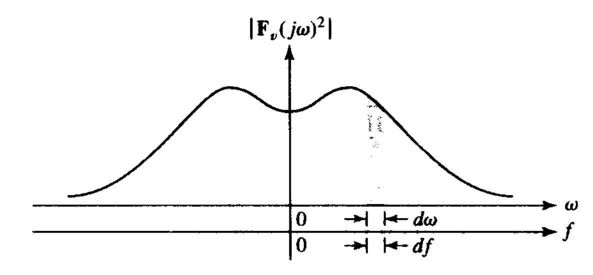


图 18.14　$|\mathbf{F}_v(j\omega)|^2$ 下方的条形区域的面积表示 $v(t)$ 在带宽 df 中的 1 Ω 电阻能量

例题 18.6　将单边（即 $v(t) = 0$，$t < 0$）指数脉冲

$$v(t) = 4e^{-3t}\,u(t)\ \text{V}$$

作为一个理想带通滤波器的输入，如果该滤波器的通带为 $1 < |f| < 2$ Hz，计算该滤波器输出的总能量。

解： 令滤波器的输出电压为 $v_o(t)$，则 $v_o(t)$ 的能量等于 $v(t)$ 在频率区间 $1 < f < 2$ 和 $-2 < f < -1$ 上的能量。计算 $v(t)$ 的傅里叶变换，可得

$$\mathbf{F}_v(j\omega) = 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t)\, dt$$

$$= 4\int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

然后可以用两种方法来计算输入信号的 1 Ω 电阻能量：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_v(j\omega)|^2\, d\omega$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{8}{3}\ \text{J}$$

或

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)\,dt = 16\int_{0}^{\infty} e^{-6t}\,dt = \frac{8}{3}\text{ J}$$

$v_o(t)$的总能量要比这个值稍微小一些：

$$W_{o1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16\,d\omega}{9+\omega^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16\,d\omega}{9+\omega^2}$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_{2}^{4\pi} \frac{d\omega}{9+\omega^2} = \frac{16}{3\pi}\left(\arctan\frac{4\pi}{3} - \arctan\frac{2\pi}{3}\right) = 358\text{ mJ}$$

一般来说，理想带通滤波器可以滤除某些频率区间的能量而保留另外一些频率区间的能量。虽然在后面的章节中我们可以根据需要利用傅里叶变换求出 $v_o(t)$的表达式，但是也可以在不真正求出 $v_o(t)$的情况下利用傅里叶变换定量地描述滤波的效果。

练习

18.10 设 $i(t) = 10e^{20t}[u(t+0.1) - u(t-0.1)]$ A，求：(a) $\mathbf{F}_i(j0)$；(b) $\mathbf{F}_i(j10)$；(c) $A_i(10)$；(d) $B_i(10)$；(e) $\phi_i(10)$。

18.11 求电流 $i(t) = 20e^{-10t}u(t)$在以下时间间隔内提供的 1 Ω 电阻能量：(a) $-0.1\text{ s} < t < 0.1\text{ s}$；(b) $-10\text{ rad/s} < \omega < 10\text{ rad/s}$；(c) $10\text{ rad/s} < \omega < \infty\text{ rad/s}$。

答案：18.10：3.63 A/(rad/s)；$3.33\angle -31.7^\circ$ A/(rad/s)；2.83 A/(rad/s)；−1.749 A/(rad/s)；−31.7°。
18.11：17.29 J；10 J；5 J。

18.7 一些简单时间函数的傅里叶变换对

单位冲激函数

14.4 节已经介绍过冲激函数，下面计算单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$的傅里叶变换。也就是说，我们对这个奇异函数的频谱特性或者说频域描述感兴趣。使用符号$\mathcal{F}\{\ \}$来表示“{ }的傅里叶变换”，则

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t-t_0)\,dt$$

前面已经讨论过这种类型的积分，因此，

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos\omega t_0 - j\sin\omega t_0$$

由这个关于 ω 的复函数可以得到 1 Ω 电阻能量密度函数为

$$|\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\}|^2 = \cos^2\omega t_0 + \sin^2\omega t_0 = 1$$

这一结果说明，在所有频率上，单位冲激函数在单位带宽中的（1 Ω）电阻能量为 1，而单位冲激函数的总能量为无穷大。不过我们不应对上面的结论感到奇怪，因为这样的单位冲激是不符合实际的，它不能在实验室中产生。而且，即使存在一个这样的单位冲激，由于任何实际的实验仪器的带宽都是有限的，因此也会发生变形。

因为时域函数与其傅里叶变换之间存在着一一对应的关系，因此 $e^{-j\omega t_0}$ 的傅里叶反变换就是 $\delta(t-t_0)$。用符号$\mathcal{F}^{-1}\{\ \}$表示傅里叶反变换：

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$$

现在可知：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t - t_0)$$

而直接计算这种奇异积分是无法得到结果的。我们可以将上式表示为

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \qquad [56]$$

其中，$\Leftrightarrow$ 表示这两个函数构成一个傅里叶变换对。

继续考虑单位冲激函数，考虑如下形式的傅里叶变换：

$$\mathbf{F}(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

这是一个在频率 $\omega = \omega_0$ 处的频域单位冲激。相应的 $f(t)$ 必定是

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\delta(\omega - \omega_0)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

在上式中用到了单位冲激函数的筛选性质。因此，可以写成

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

或

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0) \qquad [57]$$

同样，通过简单地改变一下符号，可以得到

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega + \omega_0) \qquad [58]$$

很显然，式[57]和式[58]中的时域函数均为复函数，而且在现实世界中是不存在的。像 $\cos\omega_0 t$ 这样的时域函数可以通过实验仪器产生，但却不能产生 $e^{-j\omega_0 t}$ 这样的函数。

然而，我们已知：

$$\cos\omega_0 t = \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

由傅里叶变换的定义很容易看出：

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \qquad [59]$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} &= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right\}\\ &= \pi\,\delta(\omega - \omega_0) + \pi\,\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}$$

上式说明 $\cos\omega_0 t$ 的频域描述是一对位于 $\omega = \pm\omega_0$ 处的冲激函数。不过我们不应该对此感到惊讶，因为在第 14 章中讨论复频率时，我们已经讲过正弦时域函数总是用一对位于 $\mathbf{s} = \pm j\omega_0$ 处的虚部频率来表示的，因此，

$$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \qquad [60]$$

常数激励函数

前几章讲到激励函数首选的一般都是直流电压或者直流电流。为了求出时域常函数$f(t)=K$的傅里叶变换，首先想到的是将该常数代入傅里叶变换的定义式中，然后求解这个积分。然而，如果这么做将会得到一个不确定的表达式。幸运的是，我们实际上已经解决了这个问题，根据式[58]：

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

如果令$\omega_0=0$，则所求的傅里叶变换对为

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega) \tag{61}$$

由上式可以得到

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\,\delta(\omega) \tag{62}$$

至此问题得到了解决。我们得出了早已知道的一个结论：时域上常数函数的频谱只包含一个$\omega=0$处的频率成分。

符号函数

再举一个例子，求一个奇异函数sgn(t)的傅里叶变换，该函数被称为符号函数，由下式定义：

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{63}$$

或

$$\operatorname{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

同上面一样，如果将这个时域函数代入傅里叶变换的定义式中，在进行积分限代入时，我们可能也会得到一个不确定的表达式。这种问题在我们求解$|t|$趋于无穷而函数值却不趋于零的时域函数时总会发生。然而幸运的是，我们可以使用拉普拉斯变换来避免这个问题，因为拉普拉斯变换本身含有一个收敛因子，从而使得一些不方便计算的傅里叶变换变得方便、可行。

上述符号函数可以表示为

$$\operatorname{sgn}(t)=\lim_{a\to 0}[e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)]$$

注意，中括号中的表达式在$|t|$趋于无穷时其值趋于零。运用傅里叶变换的定义，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} &= \lim_{a\to 0}\left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}e^{-at}dt-\int_{-\infty}^{0} e^{-j\omega t}e^{at}dt\right]\\ &= \lim_{a\to 0}\frac{-j2\omega}{\omega^2+a^2}=\frac{2}{j\omega}\end{aligned}$$

其实部为零，因为sgn(t)是关于t的奇函数，因此，

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{64}$$

单位阶跃函数

我们将已经熟悉的单位阶跃函数$u(t)$作为本节的最后一个例子。利用前面得到的符号函数的结果，将单位阶跃函数表示为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

然后得到傅里叶变换对：

$$u(t) \Leftrightarrow \left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \qquad [65]$$

表18.2列出了本节中讨论过的一些例子的结论，其中也包括这里没有详细讨论的其他一些变换对。

表 18.2　一些常用的傅里叶变换对

$f(t)$	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$	$\lvert\mathbf{F}(j\omega)\rvert$
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
复数形式	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\mathrm{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_d t]u(t)$	$\dfrac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$	
	$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$T\dfrac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	

例题 18.7 利用表 18.2 求时域函数 $3e^{-t}\cos 4t\, u(t)$的傅里叶变换。

解：根据表中的倒数第二行的表项：

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$$

然后令 $\alpha = 1$，$\omega_d = 4$，得到

$$\mathbf{F}(j\omega) = (3)\frac{1 + j\omega}{(1 + j\omega)^2 + 16}$$

练习

18.12 求以下时域函数的傅里叶变换在 $\omega = 12$ 时的值：(a) $4u(t) - 10\delta(t)$；(b) $5e^{-8t}u(t)$；(c) $4\cos 8t\, u(t)$；(d) $-4\,\mathrm{sgn}(t)$。

18.13 若$\mathbf{F}(j\omega)$为如下形式，求$t = 2$时的$f(t)$：(a) $5e^{-j3\omega} - j(4/\omega)$；(b) $8[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$；(c) $(8/\omega)\sin 5\omega$。

答案：18.12：$10.01\angle -178.1°$；$0.347\angle -56.3°$；$-j0.6$；$j0.667$。18.13：2.00；2.45；4.00。

18.8 一般周期时间函数的傅里叶变换

我们在 18.5 节中曾经指出，与非周期函数一样，周期函数也具有傅里叶变换。下面我们严格地推导这个结论。考虑周期为 T 的时域周期函数$f(t)$及其傅里叶级数展开式，这可以由式[39]、式[40]和式[41]得到，这里为了方便起见再次列出以上 3 个公式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \qquad [39]$$

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad [40]$$

以及

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad [41]$$

考虑到和的傅里叶变换等于傅里叶变换的和，并且 $\mathbf{c}_n$ 不是时间的函数，因此可以写成

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

在根据式[57]得到 $e^{jn\omega_0 t}$ 的傅里叶变换对之后：

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) \qquad [66]$$

这说明$f(t)$的频谱是一个离散谱，该离散谱由位于 ω 轴上离散频率点 $\omega = n\omega_0$，$n = \cdots, -2, -1, 0, 1, \cdots$处的冲激串组成，其中每个冲激的强度等于$f(t)$复数形式的傅里叶级数展开式中相应的系数乘以 2π。

为了检验上述结果，我们考察式[66]右边的表达式的傅里叶反变换是否等于$f(t)$。该傅里叶反变换可以写为

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)\right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

因为指数项不包含求和的下标n，因此，可以交换积分和求和的顺序，可得

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{j\omega t}\delta(\omega - n\omega_0)\, d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

因为$\mathbf{c}_n$与积分变量无关，因此可将其看做常数。于是，根据冲激函数的筛选特性，可以得到

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{F}(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

这与式[39]中$f(t)$的复数形式的傅里叶级数展开式完全一致。因此，现在可以将上式中的问号去掉并证明了周期时域函数存在傅里叶变换。不过，我们不应该对此感到惊讶，其实在上一节中已经计算出余弦函数的傅里叶变换，而余弦函数显然具有周期性，虽然那时我们没有直接指出其周期性。不过应该指出，前面在计算余弦函数的傅里叶变换时采用的是间接办法，而现在我们有了直接求解傅里叶变换的数学工具。为了说明这个过程，再次考虑$f(t) = \cos \omega_0 t$，首先计算其傅里叶系数$\mathbf{c}_n$：

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_0 t\, e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & （其他） \end{cases}$$

于是，

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

上式右边的表达式只有在$n = \pm 1$时才有非零值，因此将整个求和式化简后，得到

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

这与前面得到的结果完全一致。对此我们应该感到欣慰！

练习

18.14　求：(a) $\mathcal{F}\{5\sin^2 3t\}$；(b) $\mathcal{F}\{A\sin\omega_0 t\}$；(c) $\mathcal{F}\{6\cos(8t + 0.1\pi)\}$。

答案：$2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 6) - \delta(\omega - 6)]$；$j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$；$[18.85\angle 18^\circ]\delta(\omega - 8) + [18.85\angle -18^\circ]\delta(\omega + 8)$。

18.9　频域的系统函数和响应

15.5节讲到，给定一个物理系统的输入和冲激响应后可以通过时域卷积积分求解该物理系统的输出，其中输入、输出以及冲激响应均为时域函数。学习了拉普拉斯变换后，我们发现通常在频域中求解这类问题会更加方便一些，因为两个函数卷积的拉普拉斯变换等于这两个函数的拉普拉斯变换的乘积，对于傅里叶变换也有类似的结果。

为了证明这一点，可以考察系统输出的傅里叶变换。假定输入和输出均为电压，根据傅里叶变换的定义，输出可以表示为卷积积分的形式：

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = \mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t - z)h(z)\, dz\right] dt$$

这里仍假设没有存储初始能量。这个式子乍看起来非常复杂，不过，可以将其化简为一种极为简单的形式。首先，因为指数项不含积分变量 z，所以将它移到积分内部，然后交换积分次序，得到

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z) h(z)\, dt \right] dz$$

因为 $h(z)$ 不是时间 t 的函数，因此可以将其从内层积分中移出，然后进行变量替换 $t - z = x$ 以简化内层积分：

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x)\, dx \right] dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x)\, dx \right] dz$$

现在我们看到了曙光，因为里面的那个积分恰好是 $v_i(t)$ 的傅里叶变换，而且不含 z，因此对 z 进行任意的积分时可以将它看做常量。于是，可以将变换 $\mathbf{F}_i(j\omega)$ 移到所有积分符号的外面：

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z)\, dz$$

最后剩下的积分又是我们非常熟悉的，它也是一个傅里叶变换！这是系统冲激响应的傅里叶变换，可以用符号 $\mathbf{H}(j\omega)$ 来表示。因此可以得到下面的简单结果：

$$\mathbf{F}_0(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{F}_i(j\omega)\mathcal{F}\{h(t)\}$$

这又是一个重要的结果：它将系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$ 定义为响应函数的傅里叶变换与激励函数的傅里叶变换之比。而且，系统函数又与冲激响应构成一个傅里叶变换对：

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(j\omega) \tag{67}$$

上面的推导同时也证明了一个一般的命题，即两个时域函数卷积的傅里叶变换等于其各自傅里叶变换的乘积：

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{F}_f(j\omega)\mathbf{F}_g(j\omega) \tag{68}$$

前面的说明可能又会让我们感到疑惑，既然在频域中计算要容易一些，为什么还要在时域中求解呢？必须时刻记住，不要做没有意义的事情。一位诗人曾经说过："我们最真诚的笑声中充满了痛楚。"这里的"痛楚"是求响应函数的傅里叶反变换时的困难，这是由数学上的复杂性造成的。另一方面，用简单的台式计算机可以很快地计算出两个时域函数的卷积。同样，也可以用计算机来快速地计算 FFT（快速傅里叶变换）。所以将时域上求解和频域上求解进行比较，发现并没有明显的优劣之分。因此，当我们面对一个新的问题时，必须根据已知信息以及所拥有的计算设备做出选择。

说明： 重述一下，如果已知激励函数和冲激响应的傅里叶变换，那么系统响应函数的傅里叶变换等于它们的乘积。这个结果是响应函数的频域描述，而响应函数的时域描述可以简单地通过求解傅里叶反变换得到。因此，时域卷积的过程等效于相对简单的频域的乘法运算。

考虑下面形式的激励函数：

$$v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

以及单位冲激响应：

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

首先求出它们对应的傅里叶变换。可以将激励函数看成两个单位阶跃函数的差，这里的两个阶跃函数除了其中一个比另一个有 1 s 的延时外，其他完全一致。因此，首先计算 $u(t)$产生的响应，然后可以用同样的方法求出 $u(t-1)$产生的响应，只不过要注意它有 1 s 的延时。对这两个部分响应求差将得到 $v_i(t)$产生的总响应。

在 18.7 节中已经求出了 $u(t)$的傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

对 $h(t)$求傅里叶变换可以得到系统函数，表 18.2 列出了其傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

将以上两个函数相乘并求解傅里叶反变换，得到 $v_o(t)$中由 $u(t)$产生的部分：

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

由单位冲激函数的筛选性质可知第一项的反变换为常数 1，因此，

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

第二项的分母中包含了两个形如（$\alpha + j\omega$）的因子的乘积，使用14.5节中介绍的部分分式法可以很容易地求出其反变换。这里我们采用部分分式展开的方法，虽然在许多情况下还有更好的方法，不过这种方法有一个最大的好处，即它总能求出解来。将每个分式的分子设为待定常量，这里一共有两个分式：

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

然后将 $j\omega$ 用一个简单的数值替代。令 $j\omega = 1$，得到

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

再令 $j\omega = -2$，得到

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

从而解出 $A = 2$，$B = -2$。于是，

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}\right\} = \mathrm{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t)$$

因此得到

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 1 + \mathrm{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

采用类似的方法可以得到 $v_o(t)$中由 $u(t-1)$产生的响应分量为

$$v_{o2}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

因此，总的响应为

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{o1}(t) - v_{o2}(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) - 2(1 - e^{-t+1})u(t-1) \end{aligned}$$

由于上式在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 处的不连续性，该函数被分成 3 个时间区间：

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

练习

18.15　一个线性网络的冲激响应为 $h(t) = 6e^{-20t}u(t)$，输入信号为 $3e^{-6t}u(t)$ V，求：(a) $\mathbf{H}(j\omega)$；(b) $\mathbf{V}_i(j\omega)$；(c) $V_o(j\omega)$；(d) $v_o(0.1)$；(e) $v_o(0.3)$；(f) $v_{o,\max}$。

答案：$6/(20 + j\omega)$；$3/(6 + j\omega)$；$18/[(20 + j\omega)(6 + j\omega)]$；0.532 V；0.209 V；0.5372。

计算机辅助分析

本章所提供的资料可以为许多更高级专业技术的学习奠定基础，例如信号处理、通信和控制领域等。在本书中，我们只能在一些基本电路的背景下介绍一些最基础的概念，即便如此，仍然可以看到傅里叶分析的巨大作用。作为第一个例子，考虑如图 18.15 所示的运放电路，该电路在 PSpice 中用一个运算放大器 μA741 构成。

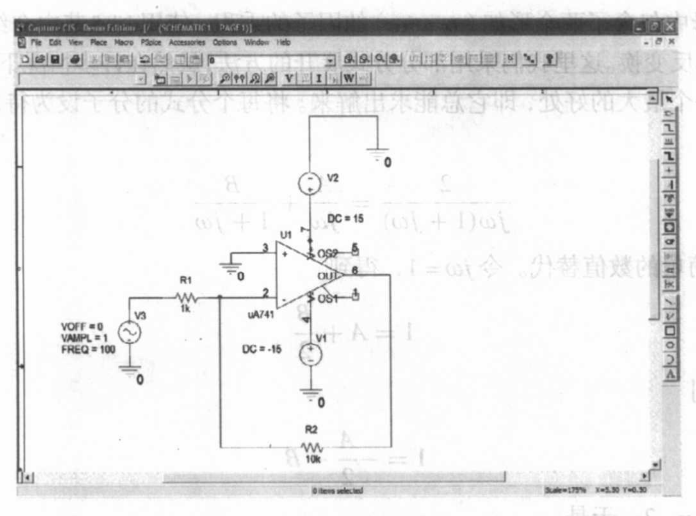


图 18.15　一个电压增益为 −10 的反相运放电路，输入为 100 Hz 的正弦波

电路的电压增益为 −10，而输入正弦波的幅度为 1 V，因此可以预计输出的正弦信号幅度为 10 V。对该电路进行瞬态分析的确可以得到这个结果，如图 18.16 所示。

PSpice 运用快速傅里叶变换（FFT）技术，使得我们可以求出输出电压的频谱，FFT 是对信号的傅里叶变换的离散时间近似。在 Probe 中，选择 Trace 菜单下的 Fourier 选项，则得到如图 18.17 所示的结果。可以看到该运放电路输出电压的线谱由 100 Hz 频率处的谱线组成，这与我们预计的结果一致。

随着输入峰值电压的增加，输出电压的峰值将逐渐达到饱和，该饱和电压由运放的正负直流电源决定（例如 ±15 V）。比如，当输入电压的幅度为 1.8 V 时，将得到一个顶部被“截平”的输出电

压波形，如图 18.18 所示。由图可知，这个输出电压的波形不再是标准的正弦波，因此可以想象，该函数的频谱在谐波频率上具有非零值，结果确实如图 18.19 所示。当运放电路达到饱和以后，输出信号将会失真，如果它与一个扬声器连接，听到的不再是一个清晰的100 Hz的声音，而是100 Hz的基波与明显的 300 Hz、500 Hz 谐波的叠加。更进一步的失真将导致谐波分量的能量增加，从而使得高频的谐波分量变得更加显著。以上对失真波形的讨论在图18.20(a)和图18.20(b)中可以明显看出，其中图 18.20(a)对应于时域波形，图 18.20(b)对应于频域波形。

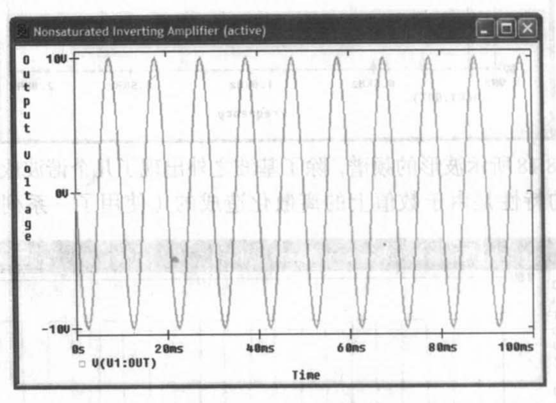


图 18.16　图 18.15 所示运放电路的输出电压仿真结果

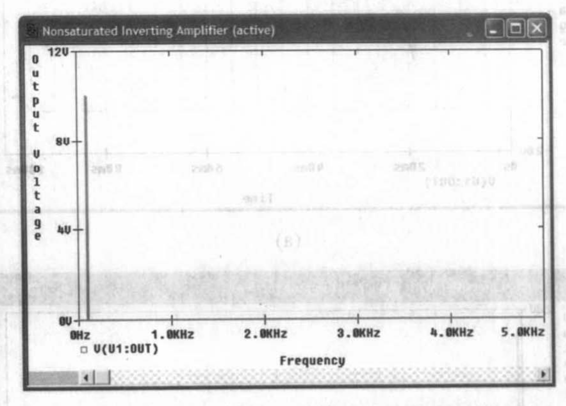


图 18.17　图 18.16 所示波形傅里叶变换的离散近似

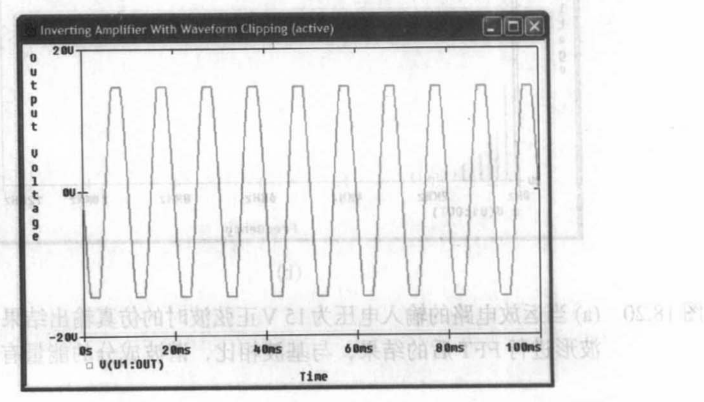


图 18.18　当运放电路的输入电压幅度增大到1.8 V时的输出仿真结果，此时输出波形已经饱和，波形顶部被截平

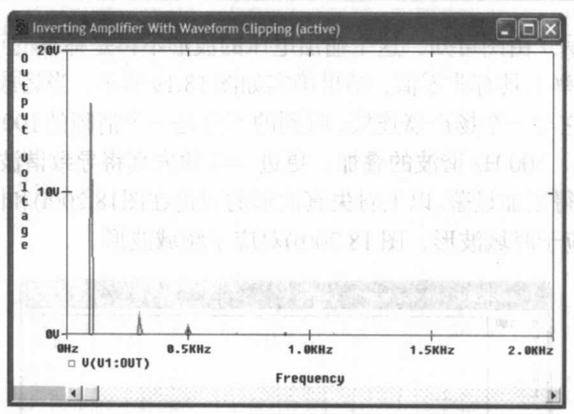
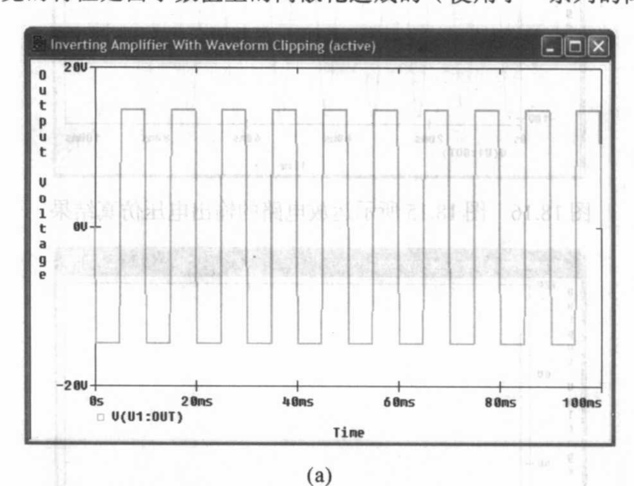
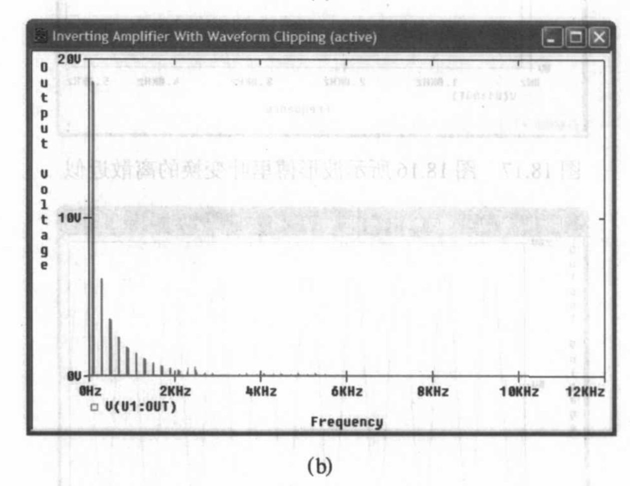


图 18.19 图 18.18 所示波形的频谱，除了基波之外出现了几个谐波成分。图中有限带宽的特性是由于数值上的离散化造成的（使用了一系列的离散时间值）



(a)



(b)

图 18.20 (a) 当运放电路的输入电压为 15 V 正弦波时的仿真输出结果; (b) 对(a)中波形进行 FFT 后的结果，与基波相比，谐波成分的能量有明显的增加

18.10 系统函数的物理意义

本节将试图把傅里叶变换的特点与前面几章节介绍的知识联系起来。

如图 18.21 所示，给定一个初始储能为零的一般线性二端口网络 N，任意选择正弦激励函数和响应函数为电压。设输入电压为 $A\cos(\omega_x t+\theta)$，因此输出可以表示为 $v_o(t)=B\cos(\omega_x t+\phi)$的形式，其中幅度 B 和相角 ϕ 是 ω_x 的函数。若采用相量形式，可以将激励函数和响应函数分别表示为 $\mathbf{V}_i=Ae^{j\theta}$ 和 $\mathbf{V}_o=Be^{j\phi}$。而相量形式的响应函数和激励函数的比值为 ω_x 的函数：

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i}=\mathbf{G}(\omega_x)=\frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

其中，B/A 和 $\phi-\theta$分别为 $\mathbf{G}$ 的幅度和相位。传输函数 $\mathbf{G}(\omega_x)$可以在实验室中用下面方法得到，即在一个很大的范围内改变 ω_x，然后对每个 ω_x 测量幅度 B/A 和相位 $\phi-\theta$，最后将这两个参数随频率变化的曲线画出来。当点数足够多时，得到的两条曲线可以完整地描述传输函数。

+ +
$v_i(t)=A\cos(\omega_x t+\theta)$ N $v_o(t)=B\cos(\omega_x t+\phi)$
− −

图 18.21 可以用正弦分析来确定传输函数 $\mathbf{H}(j\omega_x)=(B/A)e^{j(\phi-\theta)}$，其中 B 和 ϕ 都是 ω_x 的函数

暂时将上面的讨论搁置下来，我们从另一个方面来考虑这个问题。

如图 18.21 所示，若电路的输入和输出均为正弦函数，则系统函数是什么呢？为了回答这个问题，首先定义 $\mathbf{H}(j\omega)$为输出的傅里叶变换与输入的傅里叶变换之比。这两个时域函数均具有 $\cos(\omega_x t+\beta)$的形式，虽然我们现在还没有求出其傅里叶变换，但已经求出了 $\cos\omega_x t$ 的变换，这里要求的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t+\beta)\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\cos(\omega_x t+\beta)\,dt$$

如果以 $\omega_x t+\beta=\omega_x\tau$ 做替换，则可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t+\beta)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau+j\omega\beta/\omega_x}\cos\omega_x\tau\,d\tau\\&=e^{j\omega\beta/\omega_x}\mathcal{F}\{\cos\omega_x t\}\\&=\pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]\end{aligned}$$

这是一个新的傅里叶变换对：

$$\cos(\omega_x t+\beta)\Leftrightarrow\pi e^{j\omega\beta/\omega_x}[\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)] \qquad [69]$$

现在即可用它来求所需的系统函数了：

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(j\omega)&=\frac{\mathcal{F}\{B\cos(\omega_x t+\phi)\}}{\mathcal{F}\{A\cos(\omega_x t+\theta)\}}\\&=\frac{\pi Be^{j\omega\phi/\omega_x}[\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]}{\pi Ae^{j\omega\theta/\omega_x}[\delta(\omega-\omega_x)+\delta(\omega+\omega_x)]}\\&=\frac{B}{A}e^{j\omega(\phi-\theta)/\omega_x}\end{aligned}$$



再来看 $\mathbf{G}(\omega_x)$的表达式：

$$\mathbf{G}(\omega_x)=\frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

其中，B 和 ϕ 均为 $\omega=\omega_x$ 时的值。当 $\omega=\omega_x$ 时，$\mathbf{H}(j\omega)$的值为

$$\mathbf{H}(\omega_x)=\mathbf{G}(\omega_x)=\frac{B}{A}e^{j(\phi-\theta)}$$

因为下标 x 并没有特殊的含义，因此可以认为系统函数与传输函数是一样的，即

$$\mathbf{H}(j\omega)=\mathbf{G}(\omega) \qquad [70]$$

上式中，一个参数为 ω 而另一个为 $j\omega$，这在本质上是没有区别的，这里的 j 仅仅用于更方便地将傅里叶变换和拉普拉斯变换进行区分。

式[70]表示傅里叶变换的方法与正弦稳态分析之间的直接联系。我们前面对基于相量的正弦稳态分析的讨论只是更为一般的傅里叶变换的一个特例。这里说的“特例”指的是输入和输出均为正弦函数，而使用傅里叶变换和系统函数则可以处理非正弦激励函数和响应函数的情形。

因此，为了求出网络的系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$，只需要确定相应的以 ω（或 $j\omega$）为自变量的正弦传输函数就可以了。

例题 18.8 电路如图 18.22(a)所示，当输入电压为指数衰减脉冲时，求电感两端的电压。

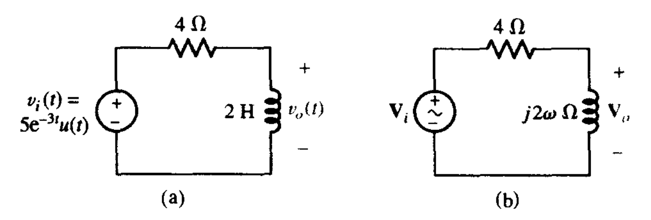


图 18.22 (a) 需要求解 $v_i(t)$激励下的响应 $v_o(t)$; (b) 可以通过正弦稳态分析确定系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)=\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_i$

解： 为了求解这一问题，需要知道系统函数，但这并不意味着必须使用冲激函数求出冲激响应，然后再求其反变换。取而代之的是，我们可以利用式[70]来求得系统函数。如图 18.22(b)所示，假设输入和输出均为相量形式的正弦电压。根据分压原理：

$$\mathbf{H}(j\omega)=\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i}=\frac{j2\omega}{4+j2\omega}$$

激励函数的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\}=\frac{5}{3+j\omega}$$

因此 $v_o(t)$的傅里叶变换可以用下式表示：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{v_o(t)\}&=\mathbf{H}(j\omega)\mathcal{F}\{v_i(t)\}\\&=\frac{j2\omega}{4+j2\omega}\frac{5}{3+j\omega}\\&=\frac{15}{3+j\omega}-\frac{10}{2+j\omega}\end{aligned}$$

最后一步用部分分式展开，可以求出傅里叶反变换为

$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{3+j\omega} - \frac{10}{2+j\omega}\right\} \\
&= 15\mathrm{e}^{-3t}u(t) - 10\mathrm{e}^{-2t}u(t) \\
&= 5(3\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-2t})u(t)
\end{aligned}
$$

因此，我们没有使用卷积和微分方程就很容易地得到了问题的解。

练习

18.16　采用傅里叶变换的分析方法，求图 18.23 所示电路在 $t = 1.5$ ms 时 $i_1(t)$的值，其中 i_s 为：(a) $\delta(t)$ A; (b) $u(t)$ A; (c) $\cos 500t$ A。

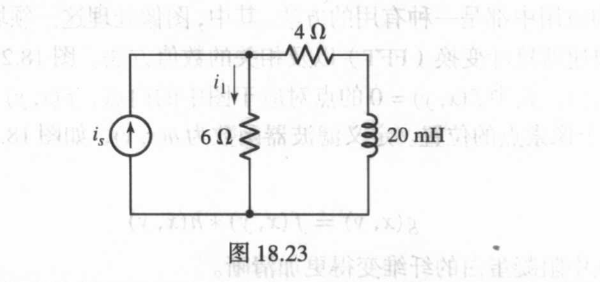


图 18.23

答案：−141.7 A；0.683 A；0.308 A。

实际应用——图像处理

虽然人们对肌肉功能已经进行了大量的研究工作，但是仍然存在着许多疑问。在这一领域中许多研究都是用脊椎动物的骨骼肌肉来进行的，特别是青蛙的腿部肌肉（见图 18.24）。



图 18.24　一副只有生物学家才会喜欢的面孔

在科学家们所采用的众多分析方法中，一种最常用的方法就是使用电子显微镜。图 18.25 显示了青蛙肌肉组织的电子显微镜照片，该照片中突出加亮了一种叫做阻凝蛋白的收缩型纤维蛋白的排列。而结构生物学家们感兴趣的是在一大片肌肉组织区域中找出这些蛋白质的周期性和无序性。为了建立一个包含以上特性的模型，人们倾向于采用一种可以自动进行此类图像分析的数字手段。未来我们将看到，这些由电子显微镜得到的图像在被高强度的噪声污染之后仍然可以自动地鉴别出容易混淆的阻凝蛋白纤维。

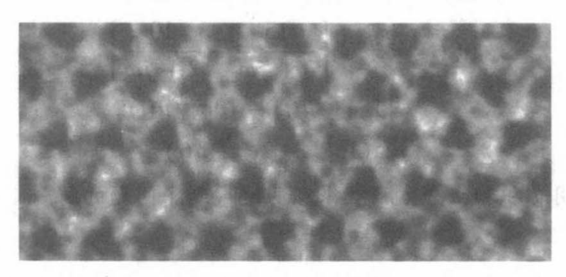


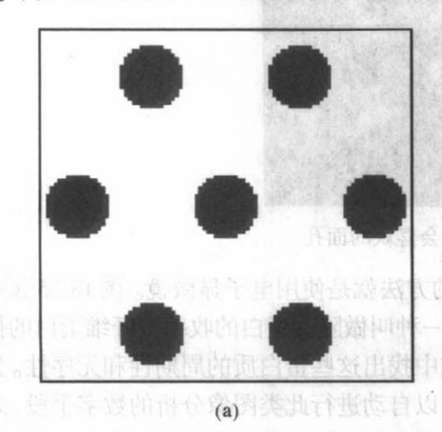
图 18.25 青蛙肌肉组织中一块区域的电子显微镜照片。这里为了清晰运用了假颜色

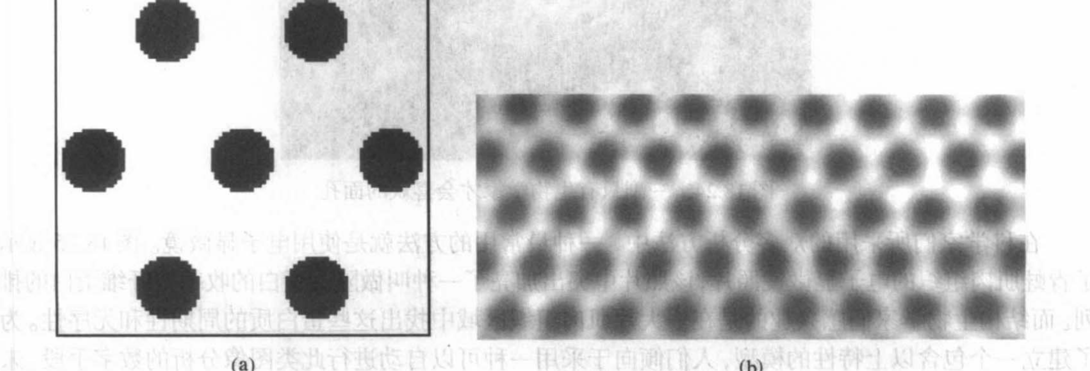
虽然我们是为了帮助分析线性时变电路才在本章中介绍了基于傅里叶变换的分析方法，但其实它在很多其他领域的应用中都是一种有用的方法。其中，图像处理这一领域就经常需要利用傅里叶分析方法，尤其是快速傅里叶变换（FFT）以及相关的数值方法。图 18.25 所示的图像可以表示为一个空间的函数 $f(x, y)$，其中 $f(x, y) = 0$ 的点对应于图中的白点，$f(x, y) = 1$ 的点对应于图中的红点，(x, y)表示图中一个像素点的位置。定义滤波器函数为 $h(x, y)$，如图 18.26(a)所示。图 18.26(b)给出了卷积积分

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

的结果，可以看到其中阻凝蛋白的纤维变得更加清晰。

在实际应用中，上述的图像处理过程都是在频域上进行的，我们可以先计算出 f 和 h 的 FFT，然后将它们相乘得到结果矩阵。最后，将结果矩阵进行傅里叶反变换就可以得到如图 18.26(b)所示的滤波后的图像。为什么这个卷积可以表示这样一个滤波的过程呢？如同滤波函数 $h(x, y)$一样，阻凝蛋白纤维的排布也具有六角对称性，从某种意义上说，阻凝蛋白纤维的排布和滤波函数都具有相同的空间频率。f 和 h 的卷积使得原图像的六边形得到了加强，并且除去了噪声点（该噪声点不具有六角对称性）。如果我们将图 18.25 中的一条水平线建模为正弦函数 $f(x) = \cos \omega_0 t$，那么这一点可以定量地来理解，其中该函数的傅里叶变换如图 18.27(a)所示，是一对间隔为 $2\omega_0$ 的对称的冲激函数。然后我们将这个函数和滤波函数 $h(x) = \cos \omega_1 t$ 进行卷积，$h(x)$的傅里叶变换如图 18.27(b)所示，当 $\omega_1 \neq \omega_0$ 时，卷积的结果为零，此时两个函数的频率（周期）不匹配。如果我们选择了一个与 $f(x)$具有相同频率的滤波器，则卷积的结果将在 $\omega = \pm\omega_0$ 处有非零值。





(a) (b)

图 18.26 (a) 空间滤波器具有六角对称性；(b) 经过卷积积分和傅里叶反变换后得到的图像，背景噪声已被消除

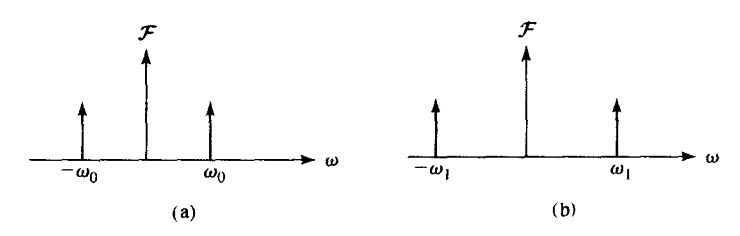


图 18.27　(a) $f(x) = \cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换；(b) $h(x) = \cos\omega_1 t$ 的傅里叶变换

结语

回到式[70]，它表明系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$ 与正弦稳态传输函数 $\mathbf{G}(\omega)$ 是等同的，因此现在可以认为系统函数等于输出相量与输入相量之比。假设输入相量的幅度为1，相角为0，则输出的相量为 $\mathbf{H}(j\omega)$。这样，如果将所有 ω 的输出幅度和相位随 ω 变化的值记录下来，那么就相当于记录了系统函数 $\mathbf{H}(j\omega)$。这也就相当于考察了无穷多个正弦输入下系统的响应，这些正弦输入的幅度均为1，相位均为0，且为持续输入。现在假设输入为单位冲激函数，然后考察冲激响应 $h(t)$。这种情况与刚才分析过的情况有什么不同吗？我们知道，单位冲激的傅里叶变换为常数1，也就是说，它包含所有的频率成分，而且这些频率成分的幅度均相同，相位均为0，系统响应为所有这些频率成分产生的响应之和。用阴极射线管示波器来观察其输出，可以明显地看出，就系统的响应而言，系统函数和冲激响应函数包含相同的信息。

因此，对于一个一般的激励函数，我们可以用两种不同的方法来描述系统响应，其中一种是时域描述，另一种是频域描述。在时域计算时，我们将激励函数与系统的冲激响应进行卷积得到响应函数。在学习卷积的时候，这一过程可以将输入看做是不同强度和时间的冲激连续集，而输出则为冲激响应连续集。

然而，在频域计算时，则用系统函数乘以激励函数的傅里叶变换来求得响应。这时，将激励函数的傅里叶变换看成是频率谱，或者说是正弦函数的连续集，将其与系统函数相乘可以得到响应函数，它也是正弦函数的连续集。

无论我们将输出看做是冲激响应的连续集还是正弦响应的连续集，由于网络的线性性质，根据叠加原理，可以通过对有所频率求和（傅里叶反变换）或者对所有时间求和（傅里叶变换）得到总的输出。

遗憾的是，这两种方法都有一定的困难和局限性。卷积积分时，如果激励函数和冲激响应函数比较复杂，则卷积积分的计算将很困难。而且，从实验的角度来看，实际上并不能得到系统的冲激响应，因为不能实际产生冲激函数。就算我们可以通过一个幅度很大的窄脉冲来作为冲激函数的近似，但是这样可能会导致系统饱和以至于超出线性工作范围。

至于频域分析，一个很大的局限是：有些我们很容易可以产生的并且在理论上经常使用的激励函数并不存在傅里叶变换；另外，如果希望求出响应函数的时域描述，则必须计算傅里叶反变换，而有些反变换很难求出。

最后要说明的是，这两种方法均不能非常方便地处理初始条件。就这一点而言，拉普拉斯变换明显要更胜一筹。

使用傅里叶变换最大的好处在于它给出了有关信号频谱特性的极为丰富的信息，特别是单位带宽内的能量或功率。对于这些信息，有些也很容易用拉普拉斯变换得到。对于这两种变换各自优点的详细讨论将留给后续的信号与系统的课程。

可能有读者会问，为什么直到现在才讨论这些内容呢？这个问题最好的答案可能是这些功能强大的分析方法会使简单问题复杂化，而且不利于理解简单网络的物理特性。举个例子来说，如果我们只对受迫响应感兴趣，那么没有必要使用拉普拉斯变换求解受迫响应和自由响应，然后再花很大的功夫求其反变换。

至此我们已经学习完了本课程。在课程的最后，祝大家在以后的学习中取得成功。

总结和复习

- 基波频率为 ω_0 的正弦波的谐波频率为 $n\omega_0$，其中 n 为整数。
- 傅里叶定理指出，如果函$f(t)$满足某些特性，则可以将其表示为无穷级数$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)$，其中，$a_0=(1/T)\int_0^T f(t)dt$，$a_n=(2/T)\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$ 和 $b_n=(2/T)\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$。
- 如果函数$f(t)$满足$f(t)=f(-t)$，则它具有偶对称性。
- 如果函数$f(t)$满足$f(t)=-f(-t)$，则它具有奇对称性。
- 如果函数$f(t)$满足$f(t)=-f(t-\frac{1}{2}T)$，则它具有半波对称性。
- 偶函数的傅里叶级数只含有常数项和余弦函数项。
- 奇函数的傅里叶级数只含有正弦函数项。
- 具有半波对称性的函数的傅里叶级数只含有奇次谐波项。
- 函数的傅里叶级数也可以表示为复数或指数形式，其中，$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t}$ 和 $\mathbf{c}_n=(1/T)\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$。
- 使用傅里叶变换可以得到时变函数的频域表达形式，这与拉普拉斯变换类似。傅里叶变换的定义式为 $\mathbf{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}f(t)dt$ 和 $f(t)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\mathbf{F}(j\omega)d\omega$。

深入阅读

下面是有关傅里叶分析的最佳读本：

A. Pinkus和S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997。

最后，若对肌肉研究感兴趣，可以参考下列书籍：

J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. New York: Plenum Press, 1981。

习题

18.1 傅里叶级数的三角函数形式

1. 求以下波形的前5个谐波频率：(a) $v_1(t)=77\cos(5t)$ V; (b) $i(t)=32\sin(5t)$ nA; (c) $q(t)=4\cos(90t-85°)$ C。
2. 确定以下波形的周期以及基频：(a) $q(t)=8.5\cos(2\pi t)$ nC; (b) $v(t)=9\sin(5.95t)$ MV; (c) $i(t)=1.113\cos(t-45°)$ pA。
3. 设 $v(t)=3-3\cos(100\pi t-40°)+4\sin(200\pi t-10°)+2.5\cos 300\pi t$ V。求：(a) V_{av}; (b) V_{eff}; (c) T; (d) $v(18\text{ ms})$。

4. (a) 画出电压 $v(t) = 2\cos 2\pi t + 1.8\sin 4\pi t$ 在时间段 $0 < t < T$ 之间的波形图；(b) 求 $v(t)$在该时间段中的最大值；(c) 求 $v(t)$在该时间段中的最大负振幅。
5. 计算下列函数的系数 a_0: (a) $5\cos 100t$; (b) $5\sin 100t$; (c) $5 + \cos 100t$; (d) $5 + \sin 100t$。
6. 计算下列函数的系数a_0: (a) $100\cos(5t - 18°)$; (b) $100\sin(5t - 18°)$; (c) $100 + 100\cos(5t - 18°)$; (d) $100 + 100\sin(5t - 18°)$。
7. 计算下列函数的系数 a_0，a_1，a_2，b_1 和 b_2: $f(t)$为: (a) 3; (b) $3\cos 3t$; (c) $3\sin 3t$; (d) $3\cos(3t - 10°)$。
8. 计算函数$f(t) = 5u(t-1) - 5u(t-2) + 5u(t-3) - 5u(t-4) + \cdots$的系数 a_0，a_1，a_2，b_1，b_2。
9. 计算函数$g(t) = 2u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-3) - 2u(t-5) + \cdots$的系数$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$，$b_1$，$b_2$和$b_3$。
10. 计算函数 $h(t) = -3 + 8\sin 2t + f(t)$的系数 a_0，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2和b_3数值，其中$f(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4) + \cdots$。
11. 图 18.28 所示波形的周期 $T = 10$ s。求: (a) 平均值; (b) 有效值; (c) a_3 的值。

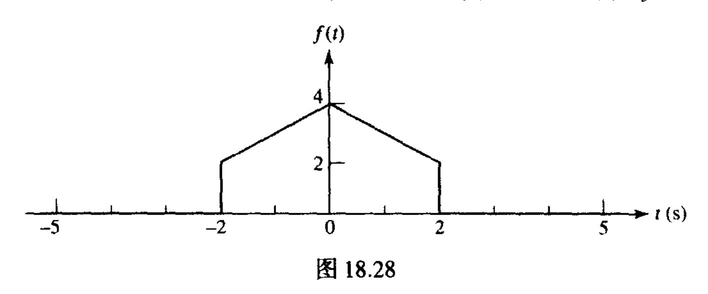


图 18.28

12. 对于图 18.29 所示的周期波形，求: (a) T; (b) f_0; (c) ω_0; (d) a_0; (e) b_2。

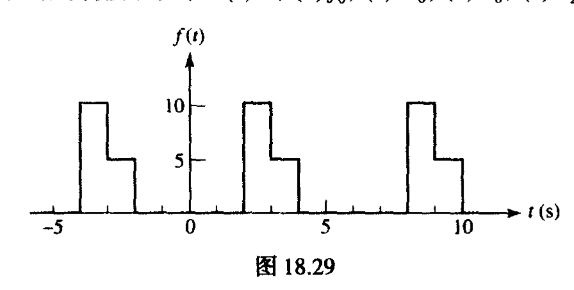


图 18.29

13. 对于图 18.29 所示的波形，求 a_3，b_3 和 $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$。
14. 用三角函数形式的傅里叶级数表示如下周期函数并求 T 以及它们的平均值: (a) $3.8\cos^2 80\pi t$; (b) $3.8\cos^3 80\pi t$; (c) $3.8\cos 79\pi t - 3.8\sin 80\pi t$。
15. 一个以 2 s 为周期的函数具有如下值: $f(t) = 0$，$-1 < t < 0$; $f(t) = 1$，$0 < t < t_1$; $f(t) = 0$，$t_1 < t < 1$。(a) 当 t_1 取何值时，能使 b_4 达到最大值; (b) 求 $b_{4,\max}$ 的值。
16. 用$g(t) = -5 + 8\cos 10t - 5\cos 15t + 3\cos 20t - 8\sin 10t - 4\sin 15t + 2\sin 20t$来表示一个电信号。求: (a) $g(t)$的周期; (b) 信号的带宽（Hz）; (c) $g(t)$的平均值; (d) $g(t)$的有效值; (e) 信号的离散幅度谱和相位谱。
17. 例题 18.1（如图 18.2 所示）的波形为半波整流器的输出。如果半个正弦波占据整个区间段，即 $-0.5 < t < -0.3$，$-0.3 < t < -0.1$，$-0.1 < t < 0.1$，依次类推，则其为全波整流器的输出。求这种情况下三角函数形式的傅里叶级数。

18.2 对称性的应用

18. (a) 指出图 18.30 所示的波形具有哪种对称性; (b) a_n, b_n 和 a_0 中哪些等于零? (c) 计算 a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 和 b_3。

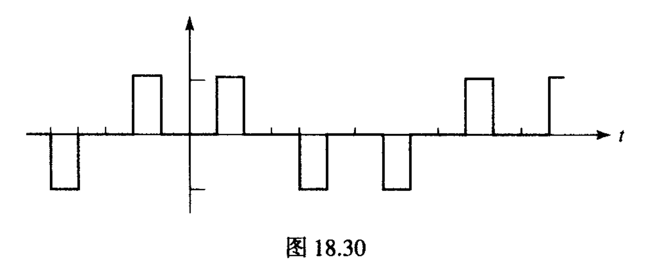


图 18.30

19. 已知周期函数 $y(t)$ 具有奇对称性，其幅度谱如图 18.31 所示。如果所有的 a_n 和 b_n 均为非负值，求: (a) $y(t)$ 的傅里叶级数; (b) $y(t)$ 的有效值; (c) 计算 $y(0.2\text{ ms})$ 的值。

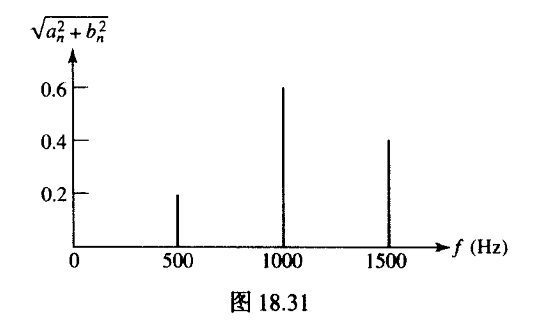


图 18.31

20. 根据图 18.32 所示的 $f(t)$ 在区间 $0<t<3$ 上的波形画一个新的函数 $g(t)$，使得 $g(t)$ 在 $0<t<3$ 时等于 $f(t)$，并且(a) $T=6$，同时具有偶对称性; (b) $T=6$，同时具有奇对称性; (c) $T=12$，同时具有偶对称性和半波对称性; (d) $T=12$，同时具有奇对称性和半波对称性; (e) 求上述各种情况下 a_5 和 b_5 的值。

21. 图 18.33 所示波形的周期为 4 ms。(a) 求直流分量 a_0; (b) 求 a_1 和 b_1 的值; (c) 求函数 $f_x(t)$，使其在图中所示的 4 ms 区间内与 $f(t)$ 相同，但周期为 8 ms 且具有偶对称性; (d) 求 $f_x(t)$ 的 a_1 和 b_1。

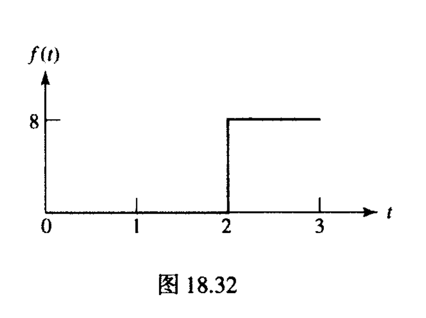


图 18.32

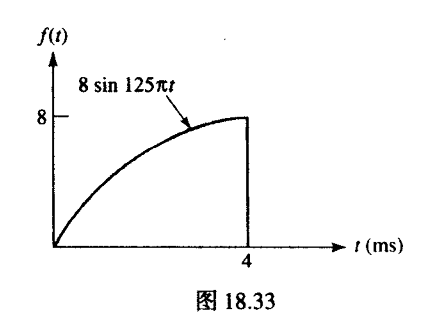


图 18.33

22. 尽可能采用对称性，求如图 18.34 所示波形的 a_0, a_n 和 b_n 的值，$1\leqslant n\leqslant 10$。

23. 函数 $f(t)$ 同时具有奇对称性和半波对称性，周期为 8 ms。已知 $f(t)=10^3t$，$0\text{ ms}<t<1\text{ ms}$，$f(t)=0$，$1\text{ ms}<t<2\text{ ms}$。求 b_n 的值，$1\leqslant n\leqslant 5$。

24. 图 18.35 所示是函数$f(t)$的一部分。如果$f(t)$为以下情况，画出$f(t)$在区间 0 s < t < 8 s 上的曲线：(a) 具有奇对称性且 T = 4 s；(b) 具有偶对称性且 T = 4 s；(c) 具有奇对称性和半波对称性且 T = 8 s；(d) 具有偶对称性和半波对称性且 T = 8 s。

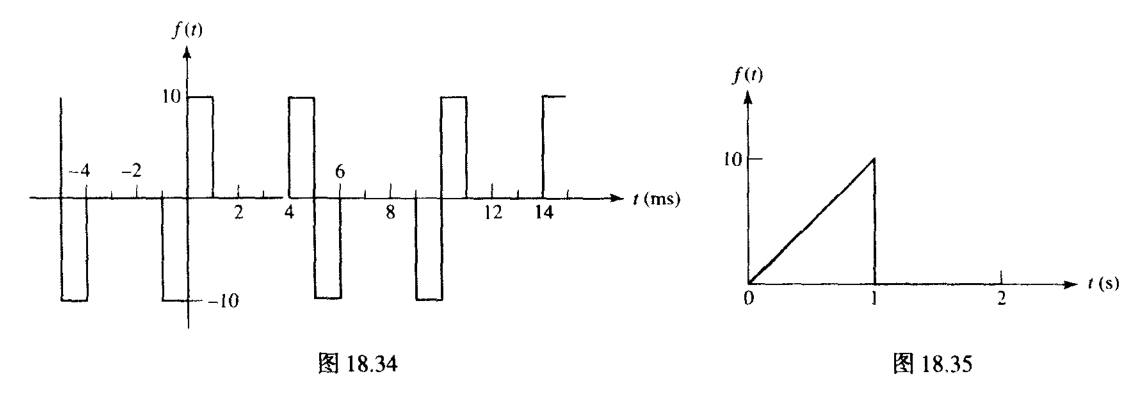


图 18.34

图 18.35

18.3 周期激励函数的完全响应

25. 将图 18.8(a)中的方波用图 18.36 中的波形替换，重新计算例题 18.2，求：(a) $i_f(t)$；(b) $i(t)$。

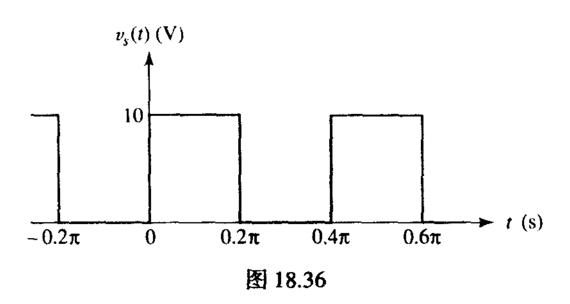


图 18.36

26. 将图 18.36 所示的波形 $v_s(t)$作用于图 18.8(b)所示的电路。采用瞬态分析法，求 t 等于下列值时 $i(t)$的值：(a) 0.2π s；(b) 0.4π s；(c) 0.6π s。

27. 一个理想电压源 v_s 与一个打开的开关以及一个 2 Ω 电阻和一个 2 F 电容串联在一起。电压源的波形如图 18.36 所示。在 t = 0 时闭合开关，求电容两端的电压响应。(a) 在频域中进行计算，并将受迫响应表示为傅里叶级数的三角函数形式；(b) 指出受迫响应的函数形式；(c) 求完全响应。

28. 图 18.37(a)所示电路的激励为图 18.37(b)所描述的波形，确定稳态电压 $v(t)$。

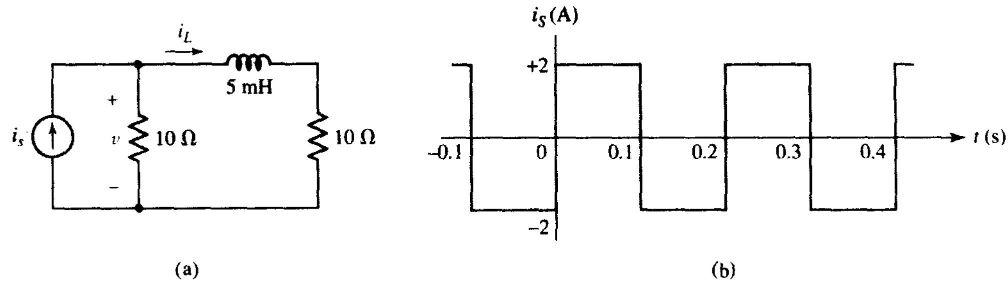


图 18.37

29. 图 18.37(a)所示电路的激励为图 18.38 所描述的波形，确定稳态电流 $i_L(t)$。

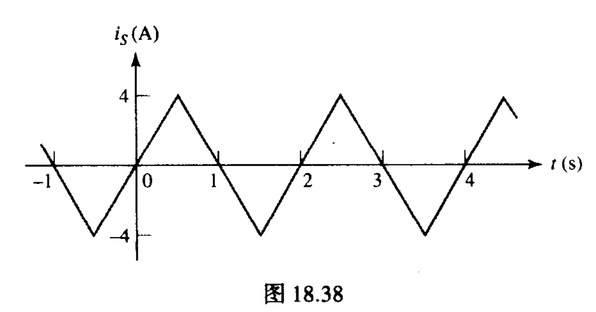


图 18.38

18.4 傅里叶级数的复数形式

30. 设图 18.39 所示的波形周期 $T = 6$ ms。求 $\mathbf{c}_3$，$\mathbf{c}_{-3}$，$|\mathbf{c}_3|$，a_3，b_3 和 $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$。

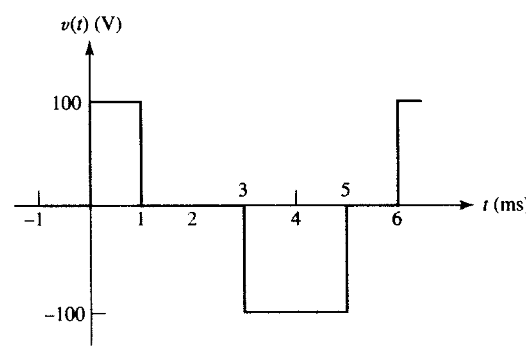


图 18.39

31. (a) 求图 18.40(b)所示周期函数傅里叶级数的复数表达式；(b) 求 $n = 0$，±1 和 ±2 时 $\mathbf{c}_n$ 的值。

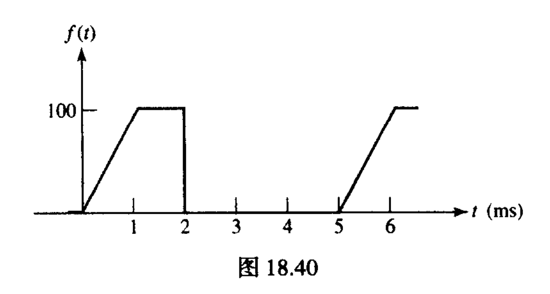


图 18.40

32. 图 18.11 所示的脉冲幅度为 8 V，宽度为 0.2 μs，以每秒 6000 个脉冲重复。(a) 求在什么频率处频谱包络的幅度为零；(b) 求谱线之间的频宽；(c) 求距离 20 kHz 最近的频谱成分的 $|c_n|$ 值；(d) 求距离 2 MHz 最近的频谱成分的 $|c_n|$ 值；(e) 将该脉冲串通过一个放大器，为了能在合理的失真范围内进行传输，求放大器的标准带宽为多少？(f) 指出频率范围 2 Mrad/s < ω < 2.2 Mrad/s 内的频率成分的数目；(g) 求 $\mathbf{c}_{227}$ 的幅度及其对应的频率。
33. 某电压波形的周期 $T = 5$ ms，其复系数值为：$\mathbf{c}_0 = 1$，$\mathbf{c}_1 = 0.2 - j0.2$，$\mathbf{c}_2 = 0.5 + j0.25$，$\mathbf{c}_3 = -1 - j2$，$\mathbf{c}_n = 0$，$|n| \geq 4$。(a) 求 $v(t)$；(b)计算 $v(1\text{ ms})$。
34. 某脉冲序列的周期为 5 μs，当 −0.6 μs < t < −0.4 μs 和 0.4 μs < t < 0.6 μs 时幅度为 1，在一个周期内的其余时刻为0。这个脉冲序列可以表示数字计算机中用二进制形式传输的十进制数字 3。

(a) 求 $\mathbf{c}_n$; (b) 计算 $\mathbf{c}_4$; (c) 求 $\mathbf{c}_0$; (d) 求 $|\mathbf{c}_n|_{max}$; (e) 求 N，使得 $|\mathbf{c}_n| \leqslant 0.1|\mathbf{c}_n|_{max}$ 时对所有的 $n > N$ 的情况都成立; (f) 传输这部分频谱需要的带宽是多少?

35. 设某周期电压 $v_s(t)$在 $0 < t < \frac{1}{96}$ s 内等于 40 V，在 $\frac{1}{96}$ s $< t < \frac{1}{16}$ s 内为 0。若 $T = \frac{1}{16}$ s，求(a) $\mathbf{c}_3$; (b) 传输给图 18.41 所示电路中负载的功率。

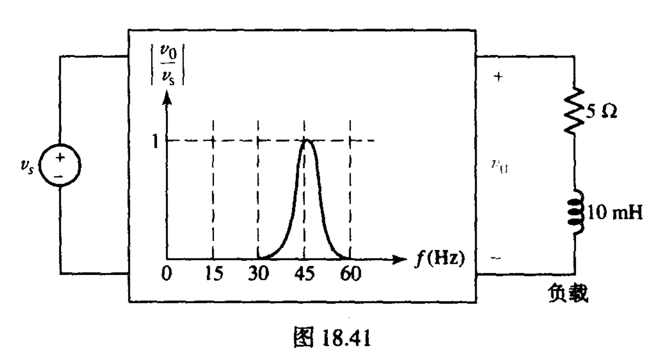


图 18.41

18.5 傅里叶变换的定义

36. 给定时域函数$f(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$。(a) 画出$f(t)$的波形; (b) 根据傅里叶变换的定义求 $\mathbf{F}(j\omega)$。
37. 根据傅里叶变换的定义求 $\mathbf{F}(j\omega)$，其中$f(t)$分别为: (a) $e^{-at}u(t), a > 0$; (b) $e^{-a(t-t_0)}u(t-t_0), a > 0$; (c) $te^{-at}u(t), a > 0$。
38. 求图 18.42 所示单个三角脉冲的傅里叶变换。
39. 求图 18.43 所示单个正弦脉冲的傅里叶变换。

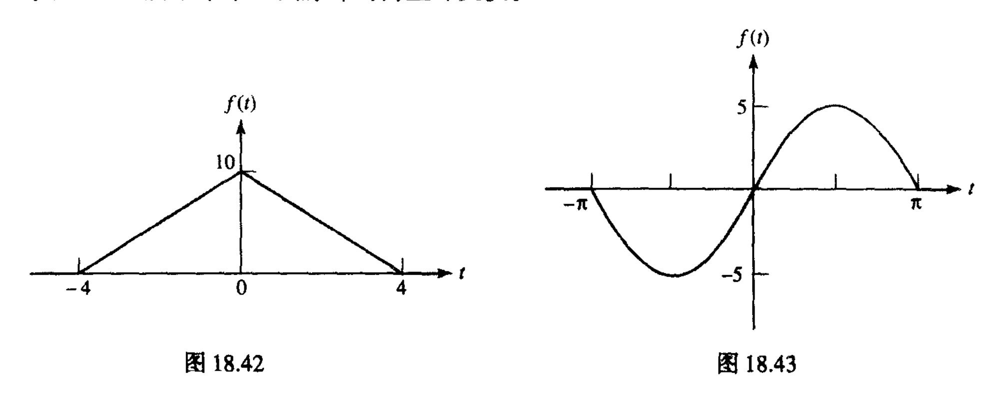


图 18.42　　图 18.43

40. 设$f(t) = (8\cos t)[u(t+0.5\pi) - u(t-0.5\pi)]$，计算 $\mathbf{F}(j\omega)$，其中 ω 为: (a) 0; (b) 0.8; (c) 3.1。
41. 利用傅里叶反变换的定义式，求$f(t)$，并求 $t = 0.8$ 时$f(t)$的值，其中 $\mathbf{F}(j\omega)$分别为: (a) $4[u(\omega+2) - u(\omega-2)]$; (b) $4e^{-2|\omega|}$; (c) $(4\cos\pi\omega)[u(\omega+0.5) - u(\omega-0.5)]$。

18.6 傅里叶变换的性质

42. 已知电压 $v(t) = 20e^{1.5t}u(-t-2)$ V，求: (a) $\mathbf{F}_v(j0)$; (b) $A_v(2)$; (c) $B_v(2)$; (d) $|\mathbf{F}_v(j2)|$; (e) $\phi_v(2)$。
43. 设流过电阻 4 Ω 的时变电流为 $i(t)$。如果 $i(t)$的傅里叶变换的幅度为 $|\mathbf{I}(j\omega)| = (3\cos 10\omega)[u(\omega + 0.05\pi) - u(\omega - 0.05\pi)]$ A/(rad/s)，求: (a) 信号提供的总能量; (b) 频率 ω_x，要求 $|\omega| < \omega_x$ 时的能量为总能量的一半。

44. 设$f(t) = 10te^{-4t}u(t)$，求：(a) 信号的1 Ω电阻能量；(b) $|\mathbf{F}(j\omega)|$；(c) $\omega = 0$和$\omega = 4$ rad/s处的能量密度。

45. 若$v(t) = 8e^{-2|t|}$ V，求：(a) 信号的1 Ω电阻能量；(b) $|\mathbf{F}_v(j\omega)|$；(c) 包含90% 1 Ω电阻能量的频率范围。

18.7 一些简单时间函数的傅里叶变换对

46. 利用傅里叶变换的定义式证明以下结论，其中$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathbf{F}(j\omega)$: (a) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\mathcal{F}\{f(t)\}$；(b) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$；(c) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|)\mathbf{F}(j\omega/k)$；(d) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = \mathbf{F}(-j\omega)$；(e) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = jd[\mathbf{F}(j\omega)]/d\omega$。

47. 求$\mathcal{F}\{f(t)\}$，其中$f(t)$为：(a) $4[\mathrm{sgn}(t)]\delta(t-1)$；(b) $4[\mathrm{sgn}(t-1)]\delta(t)$；(c) $4[\sin(10t-30°)]$。

48. 求$\mathbf{F}(j\omega)$，其中$f(t)$为：(a) $A\cos(\omega_0 t+\phi)$；(b) $3\,\mathrm{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1)$；(c) $(\sinh kt)u(t)$。

49. 求$t = 5$时$f(t)$的值，其中$\mathbf{F}(j\omega)$为：(a) $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)$；(b) $3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1)$；(c) $2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1)$。

50. 求$f(t)$，其中$\mathbf{F}(j\omega)$为：(a) $3/(1+j\omega) + 3/j\omega + 3 + 3\delta(\omega-1)$；(b) $(5\sin 4\omega)/\omega$；(c) $6(3+j\omega)/[(3+j\omega)^2+4]$。

18.8 一般周期时间函数的傅里叶变换

51. 求图18.44所示周期时间函数的傅里叶变换。

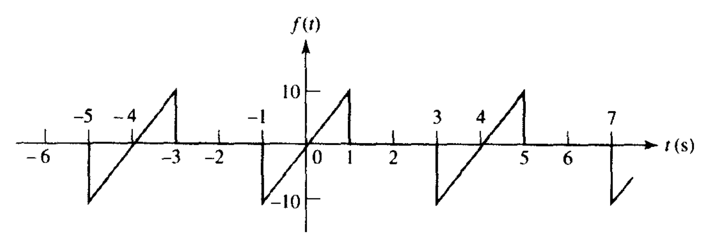


图 18.44

52. 周期函数$f(t)$在一个周期0 ms < t < 4 ms内可以用$f_1(t) = 10u(t) - 6u(t-0.001) - 4u(t-0.003)$表示，求$\mathbf{F}(j\omega)$。

53. 设$\mathbf{F}(j\omega) = 20\sum_{n=1}^{\infty}[1/(|n|!+1)]\delta(\omega-20n)$，求$f(0.05)$的值。

54. 已知输入$x(t) = 5[u(t) - u(t-1)]$，利用卷积求输出$y(t)$，其中$h(t)$分别为：(a) $2u(t)$；(b) $2u(t-1)$；(c) $2u(t-2)$。

55. 设$x(t) = 5[u(t) - u(t-2)]$和$h(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)]$，利用卷积求$y(t)$在$t = -0.4$，0.4，1.4，2.4，3.4和4.4时的值。

18.9 频域的系统函数和响应

56. 某线性系统的冲激响应为$h(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$。已知输入$x(t) = u(t)$，求$t > 0$时的输出。

57. 图18.45所示是某线性系统的单位冲激响应和系统的输入曲线。(a) 求在区间$4 < t < 6$内输出的积分表达式，不能包含任何奇异函数；(b) 求$t = 5$时的输出。

58. 已知输入信号$x(t) = 5e^{-(t-2)}u(t-2)$和冲激响应$h(t) = (4t-16)[u(t-4) - u(t-7)]$，求$t$等于下列时刻时输出信号的值：(a) $t = 5$；(b) $t = 8$；(c) $t = 10$。

59. 将$\delta(t)$作用于某线性系统，在$0 < t < \pi$时输出为$\sin t$，其余时刻都为0。如果现在的输入为$e^{-t}u(t)$，且t等于下列时刻，求输出信号的值：(a) 1；(b) 2.5；(c) 4。

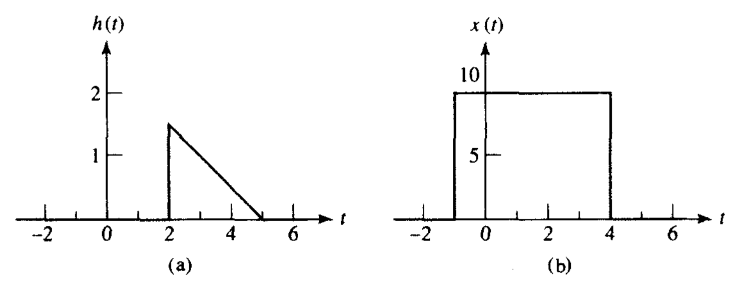


图 18.45

60. 设 $x(t) = 0.8(t-1)[u(t-1) - u(t-3)]$和 $h(t) = 0.2(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$，求下列时刻 $y(t)$的值：(a) $t = 3.8$；(b) $t = 4.8$。
61. 将信号 $x(t) = 10e^{-2t}u(t)$输入到一个线性系统中，已知系统的冲激响应为 $h(t) = 10e^{-2t}u(t)$，求输出 $y(t)$。
62. 将一个冲激信号输入到某线性系统中，产生的输出为 $h(t) = 5e^{-4t}u(t)$ V。求下列情况下响应能量占 1 Ω 电阻能量的百分比：(a) 在时间区间 0.1 s < t < 0.8 s 内；(b)在频率区间 −2 rad/s < ω < 2 rad/s 内。
63. 如果 $\mathbf{F}(j\omega) = 2/[(1+j\omega)(2+j\omega)]$，求：(a) 该信号的全部 1 Ω 电阻能量；(b) $f(t)$的最大值。
64. 求$\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{F}(j\omega)]$，如果$\mathbf{F}(j\omega)$为：(a) $1/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(b) $(1+j\omega)/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(c) $(1+j\omega)^2/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$；(d) $(1+j\omega)^3/[(j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)]$。
65. 构造一个网络使得冲激响应为 $h(t) = 2e^{-t}u(t)$。(a) 确定 $\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{V}_o(j\omega)/\mathbf{V}_i(j\omega)$；(b) 通过考察 $h(t)$或者 $\mathbf{H}(j\omega)$，发现该网络只存在一个储能元件，任意选取一个 RC 网络来产生所需的时间常数，比如取 $R = 1\ \Omega$，$C = 1$ F，为了产生响应 $\frac{1}{2}h(t)$或$\frac{1}{2}\mathbf{H}(j\omega)$，确定电路的形式；(c) 用一个理想电压放大器与该网络级联以产生合适的放大因子，问放大器的增益为多少？

18.10　系统函数的物理意义

66. 求图 18.46 所示电路的 $v_o(t)$。
67. 求图 18.47 所示电路的 $v_C(t)$。

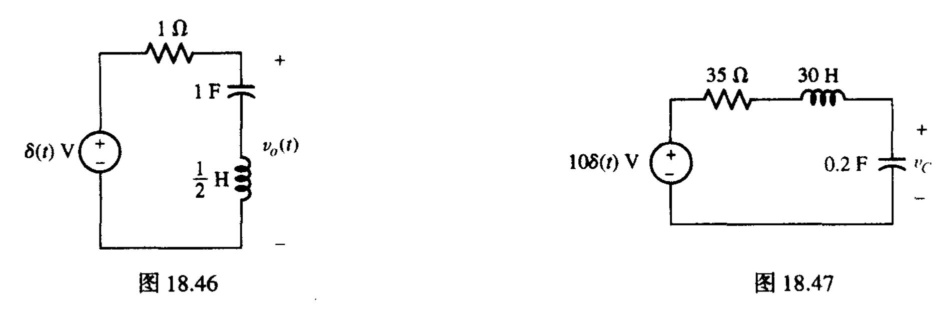


图 18.46　　图 18.47

68. 设$f(t) = 5e^{-2t}u(t)$和$g(t) = 4e^{-3t}u(t)$。(a)在时域中求卷积$f(t) * g(t)$；(b) 用频域相乘的方法求 $f(t) * g(t)$。
69. 用 $v_i(t) = 12\ \mathrm{sgn}(t)$替代图 18.22 所示电路中的电压源。用傅里叶变换法确定电感两端的电压 $v_o(t)$。
70. 一个典型系统的冲激响应为 $h(t) = 2e^{-t}\cos 4t$，求输出，其输入分别为：(a) 2；(b) $2\delta(t-1)$；(c) $2u(t+0.25) - 2u(t-0.25)$。

附录1 网络拓扑简介

在分析了许多电路问题之后才逐渐明白，前面讲到的许多电路至少在元件的安排上有很多共性。基于这一事实，可以对电路给出更为抽象的概念，即网络拓扑。本附录将介绍网络拓扑中几个基本概念，它们的具体实现留给读者去完成。

A1.1 树和通用节点分析

下面对前面讲过的常用节点分析法做一归纳。由于节点分析法适用于任何网络，因此即使不能解决更大的一类电路问题，也期望可以找到适用于任何特殊问题的一个通用节点分析法，这样可以少求解几个方程，少花一点功夫。

首先需要扩展与网络有关的定义。定义拓扑为几何学的一个分支，它研究几何图形的性质，当图形受到扭曲、弯折、折叠、伸展、挤压或打结时，只要图形的任何部位没有被割断或连接，其性质保持不变。一个球体和一个四面体在拓扑结构上是等同的，同理，正方形和圆形也是等同的。关于电路，现在不关心电路中出现的是哪种类型的元件，只关心支路和节点之间是怎样连接的。事实上，我们常常有意识地抑制元件的性质，简单地将元件用一条线表示，这样的图形称为线图或简称图。图 A1.1 就是一个电路及其对应的拓扑图。注意，所有节点都用加重的小圆点标在拓扑图上。

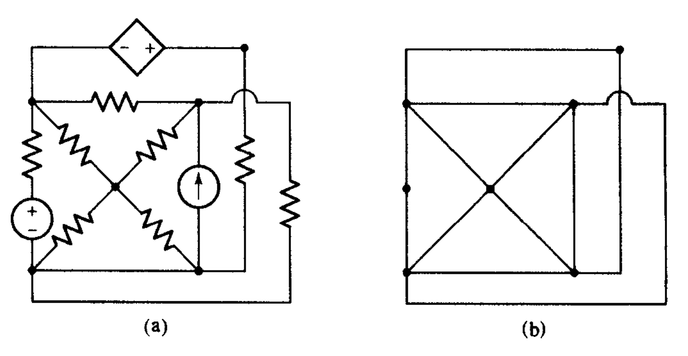


图 A1.1 (a) 已知的电路；(b) 该电路的线图

由于电路或其线图变形的拓扑性质并未改变，所以图 A1.2 中的 3 个图与图 A1.1 中的电路图在拓扑结构上是等同的。

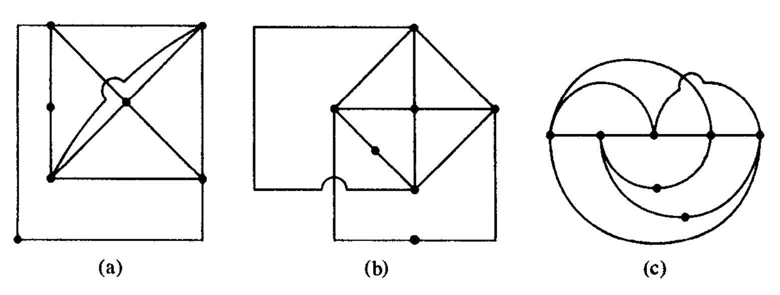


图 A1.2 图 A1.1 所示电路的可替代的几个线图

我们已讲过拓扑术语包括：

节点：两个或更多元件的公共连接点。
路径：一系列元件的集合，使得通过这些元件时不会两次通过同一节点。
支路：只包含一个简单元件的路径，它将一个节点连接到其他节点。
回路：闭合的路径。
网孔：一个不含任何其他回路的回路。
平面电路：可以在平面上画出的电路，其中没有任何支路跨过或穿过其他支路。
非平面电路：任何不是平面的电路。

图 A1.2 中的每个图形都含有 12 条支路和 7 个节点。

现在需要定义 3 个新的拓扑术语——树、余树和连枝。树定义为支路的集合，它不含任何回路但将每个节点连接到其他节点，这里的连接未必是直接的。一个网络通常可以画出许多不同的树，随着网络复杂性的增加，树的数目会迅速增加。图 A1.3(a)中的简单图形有 8 个可能的树，在图 A1.3(b),(c),(d)和(e)中用粗线画出了其中 4 个。

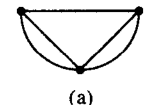
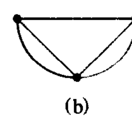
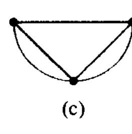
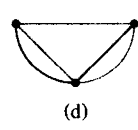
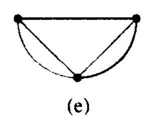

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

图 A1.3　(a) 3 节点网络的线图；(b), (c), (d), (e)图(a)中图形的 8 个不同树之中的 4 个，用粗线画出

图A1.4(a)所示是一个更复杂的图形，图A1.4(b)所示的是一个可能的树，而图A1.4(c)和图A1.4(d)只是支路的集合，不是树，因为它们都不符合树的定义。

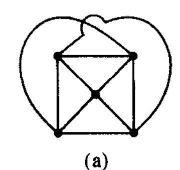
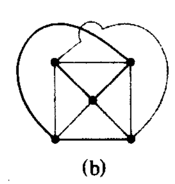
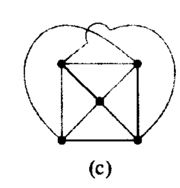
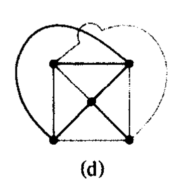

(a)

(b)

(c)

(d)

图 A1.4　(a) 线图; (b) 一个可能的树; (c, d) 不符合树定义的支路集合，余树含有 L 条支路，树含有$(N-1)$条支路

当树确定之后，那些不属于树的支路就形成了余树，或称为树的补集。在图 A1.3(b)~(e)中用细线画出的支路表示余树，它们与用粗线画出的树相对应。

一旦理解了树及其余树的构造，连枝的概念就变得非常简单了。连枝是属于余树的任何支路。显然，某一支路可以是也可以不是连枝，具体取决于所选择的树。

很容易将连枝的数目与支路和节点数联系起来。假如某图有 N 个节点，则一定需要$(N-1)$条支路来构造一个树，因为第一条支路连接两个节点，其他每条支路连接一个新的节点。因此，给定 B 条支路，连枝数 L 一定是

$$L = B - (N - 1)$$

或

$$L = B - N + 1 \qquad [1]$$

对于图 A1.3 中的每个图形都有 $3 = 5 - 3 + 1$，对于图 A1.4(b)有 $6 = 10 - 5 + 1$。一个网络可以有几个不相连的部分，可以用 $+S$ 替代 $+1$ 使得式[1]更加通用，其中 S 为分离部分的数目。当然，也

可以用一根导线将两个分离部分连接起来,从而使两个节点变成一个节点,在这根导线上没有电流。这一过程可以用于连接任意多个分离的部分，如果严格规定 $S = 1$，就不会降低式[1]的通用性。

现在讨论如何写出数量足够且又互相独立的一组节点方程。这个方法可以从同一网络获得许多不同的方程组，且所有方程组都有效。但是这种方法不能提供所有可能的方程组。下面通过3个例子来解释获取方程组的过程，然后指出使得方程组数量足够且又互相独立的原因。

对于给定网络，要求：

1. 画出图形并找出它的一个树。
2. 将所有电压源置于树中。
3. 将所有电流源置于余树中。
4. 尽可能将压控电源的控制电压所在的支路置于树中。
5. 尽可能将流控电源的控制电流所在的支路置于余树中。

后面的4个步骤将电压和树、电流和余树有效地联系在一起。

对树的$(N-1)$条支路的每一条指定一个对应的电压变量（有一对正负号），该电压跨接在支路的两端。含有电压源（独立或受控）的支路应该用其电源电压指定，含有控制电压的支路应该用其控制电压来指定。这样引入的新变量数目应该等于树的支路数目$(N-1)$减去树中的电压源数目，还要减去树中能找到的控制电压的数目。在例题 A1.3 中将发现所要求的新变量数目等于零。

有了一组变量后，现在需要写出足够多的方程以确定这些变量。应用KCL就可以得到这些方程。对电压源的处理等同于前面介绍节点分析法时采用的办法，每个电压源及其两个节点组成一个超节点或超节点的一部分。然后对参考节点以外的所有节点和超节点应用基尔霍夫电流定律，将所有连接到节点且离开节点的支路电流之和置为零，用前面指定的电压变量将电流表示出来。如果参考节点的情况一样，可以忽略一个节点。最后，当存在电流控制的受控源时，还要写出控制电流的方程，同样将它与电压变量联系起来。这与节点分析法的求解过程完全一样。

下面对图A1.5(a)所示的电路应用这个过程，其中含有4个节点和5条支路，如图A1.5(b)所示。

例题 A1.1 求图 A1.5(a)所示电路中的 v_x 值。

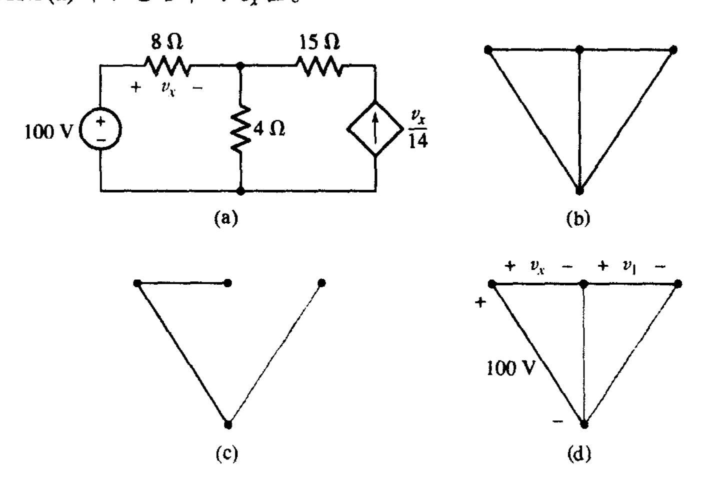


图 A1.5 (a) 通用节点分析法使用的电路例子；(b) 给定电路的图形；(c) 电压源和控制电压放在树中，而电流源放在余树中；(d) 将树图标记完整，对每条支路指定一个电压变量

解: 按照树的作图步骤 2 和步骤 3，将电压源放在树中，将电流源放在余树中。按照步骤 4，v_x 支路也可以放在树中，因为它并不形成违反树定义的回路。如图 A1.5(c)所示，这时得到含有两个支路和一个连枝的图，但并不存在树，因为右节点没有通过树枝与其他节点相连。唯一可能得到一个树的方法示于图 A1.5(d)。100 V 电压源、控制电压 v_x 和一个新电压变量 v_1 被分别指派给 3 个树枝。

这样就产生了两个未知量 v_x 和 v_1，我们需要写出关于这两个变量的两个方程。一共有 4 个节点，但由于电压源的存在使其中两个节点变成一个超节点。对余下的 3 个节点或超节点中的任意两个应用基尔霍夫电流定律。假定首先取右节点。离开右节点流向左节点的电流为 $-v_1/15$，而流向下面的是 $-v_x/14$，第一个方程为

$$-\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x}{14}=0$$

上面位于中心的节点看起来比超节点容易一些，所以设定流向左边的电流($-v_x/8$)、流向右边的电流($v_1/15$)和向下流过 4 Ω 电阻电流的这三者之和等于零。后一个电流为电阻上的端电压除以电阻 4 Ω，可是连枝上没有标出电压。当按照定义构造树的时候，从任一节点到任何其他节点都应该存在一条路径。由于树中的每条支路都赋予了一个电压，因此可以将任何连枝上的电压用支路电压表示，因此这个向下的电流就等于($-v_x+100$)/4，从而得到第二个方程:

$$-\frac{v_x}{8}+\frac{v_1}{15}+\frac{-v_x+100}{4}=0$$

两个方程的联立解为

$$v_1=-60\text{ V}\qquad v_x=56\text{ V}$$

例题 A1.2　求图 A1.6(a)所示电路中的 v_x 和 v_y。

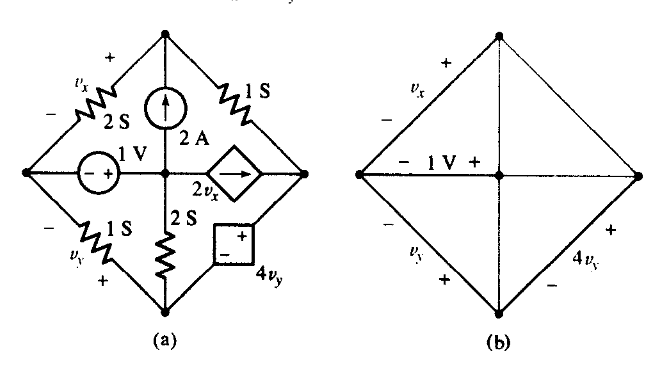


图 A1.6　(a)含有 5 个节点的电路; (b)选出一棵树，使得两个电压源和两个控制电压都成为树枝

解: 画出树图，使得两个电压源和两个控制电压都以树枝电压出现并被指定为电压变量。如图 A1.6(b)所示，4 条支路构成了一个树，其中选定树枝电压 v_x，1，v_y 和 $4v_y$。

两个电压源都定义为超节点，两次应用 KCL，其中一次针对上面的节点:

$$2v_x+1(v_x-v_y-4v_y)=2$$

另一次针对包含右节点、下面节点和受控电压源的超节点:

$$1v_y+2(v_y-1)+1(4v_y+v_y-v_x)=2v_x$$

不同于采用原来方法所预计的 4 个方程，现在只有两个方程，因此容易求出: $v_x=\frac{26}{9}$ V 和 $v_y=\frac{4}{3}$ V。

例题 A1.3 求图 A1.7(a)所示电路中的 v_x 值。

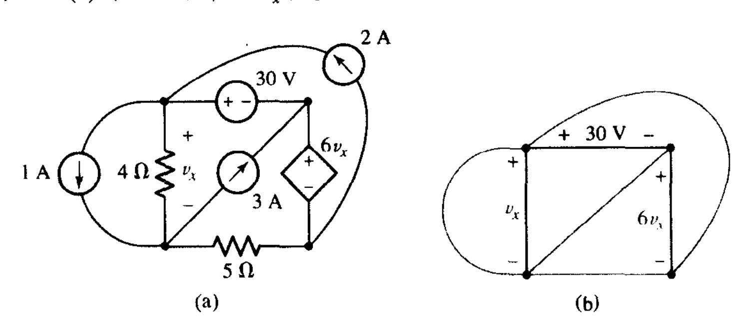


图 A1.7 (a) 只需写出一个通用节点方程的电路；(b) 所使用的树和树枝

解： 两个电压源和控制电压构建了一个具有 3 条支路的树，如图 A1.7(b)所示。因为两个上面的节点和右下节点联合构成一个超节点，所以只需写一个 KCL 方程。我们选择左下节点：

$$-1-\frac{v_x}{4}+3+\frac{-v_x+30+6v_x}{5}=0$$

求得 $v_x=-\frac{32}{3}$ V。尽管电路看起来很复杂，然而利用通用节点分析法很容易得到答案。如果采用网孔分析法或对参考点的节点电压分析法则要写出更多的方程，花费更多的力气。

下面将讨论如何找到解决问题的最佳分析方法。

在前面的例题中，如果还需要知道其他电压、电流或功率，则还要进一步分析。例如，3 A 电流源提供的电流为

$$3\left(-30-\tfrac{32}{3}\right)=-122\ \mathrm{W}$$

现在来讨论假设的树枝电压与独立节点方程的充分性问题。如果树枝电压数目足够，那么每个树枝（无论是树的还是余树的）一定能从所有树枝电压的条件中得到。对于处于树枝中的电压肯定是正确的。对于连枝，已知每个连枝连接两个节点，并且按照定义，树也必须连接这两个节点，所以每个连枝电压也可以用树枝电压表示。

只要知道电路中每条支路的电压，所有电流都可以求得。如果支路含有电流源，则电流等于给定电流源的值；如果支路含有电阻，则电流等于支路电压除以电阻；如果支路恰好含有电压源，则电流可用 KCL 求出。这样，所有电压和电流都确定，节点方程的充分性得以证实。

为证明方程的独立性，首先假定网络中只存在独立电流源。如前所述，独立电压源的存在减少了方程数目，而受控源一般会带来较多方程。在只有独立电流源的情况下，可以用$(N-1)$个树枝电压恰好写出$(N-1)$个节点方程。为了证明这$(N-1)$个方程是独立的，设想将 KCL 应用于这$(N-1)$个不同的节点。每写出一个 KCL 方程都涉及一个连接该节点与其他节点的新树枝。由于这个电路元件没有出现在此之前的任何方程中，因此这肯定是一个独立方程。依次类推到$(N-1)$个节点中的其他节点，最后得到$(N-1)$个独立方程。

练习

A1.1 (a) 按照前面给出的构造树的 5 条建议，找出图 A1.8 中有几个树？(b) 画出一个适当的树，用两个未知量写出两个方程，求 i_3；(c) 受控源提供的功率是多少？

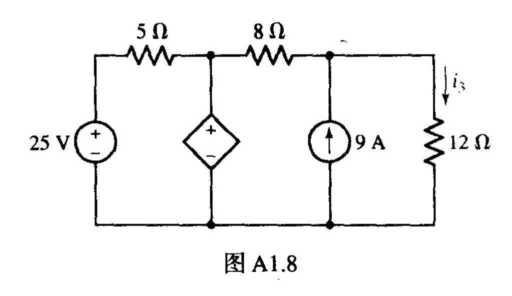


图 A1.8

答案：1；7.2 A；547 W。

A1.2 连枝和回路分析

现在考虑用树来得到一组适当的回路方程。在某些方面，这类似于写节点方程的方法。而且需要指出，尽管可以保证这样得到的任何一组方程既是足够的也是独立的，但却不能肯定这种方法可以得到任何可能的方程组。

首先利用通用节点分析的规则构造一棵树。节点和回路分析的目标是将电压源放在树中，电流源放在余树中，对于电源这是必须遵守的原则，而对控制变量则是推荐的规则。

然而现在不是给每个树枝分配一个电压，而是给余树中每个元件或每个连枝分配一个电流（当然包含参考方向）。如果有10个连枝，则正好分配10个连枝电流。任何含有电流源的连枝将分配该电流源的电流作为连枝电流。注意，每个连枝电流也可以想象为回路电流，因为连枝必须伸展到两个特定的节点上，而且在这两个节点之间必定还存在一条路径通向树，因此，每个连枝都与一个唯一的特定回路相联系，该回路包含一个连枝和一个唯一的路径通向树。显然，可以将分配的电流想象为一个回路电流或连枝电流。连枝的概念在定义电流时最有用，因为必须为每个连枝建立一个电流。在写电路方程时回路的概念更为方便，因为需要对每个回路应用KVL。

下面对图A1.9(a)所示的电路尝试定义连枝电流的步骤。按照电压源放在树枝上、电流源放在连枝上的方法，从几个可能的树中选出一个树。首先考虑含有电流源的连枝，与其联系的回路是左边的网孔，连枝电流围绕该网孔的周边流动［见图A1.9(b)］。显然，可以选择“7 A”作为这个连枝电流的标记。记住，没有其他电流会流过这个特定的连枝，所以连枝电流的大小必定正好等于电流源的大小。

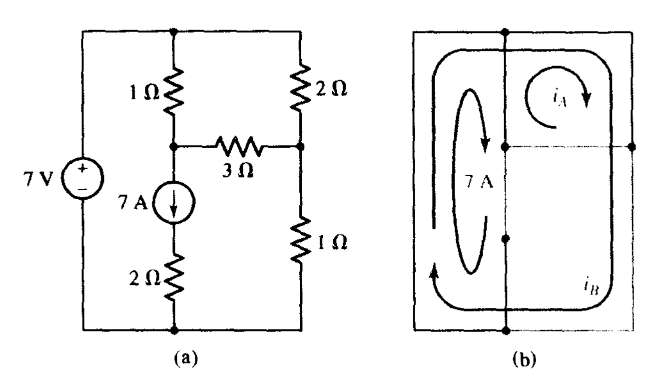


图 A1.9 (a) 简单电路；(b) 选定的树，使得电流源在连枝、电压源在树枝

下一步将注意力转移到含有3 Ω电阻的连枝上，与其相联系的回路是右上角的网孔，这个回路（或网孔）电流定义为i_A，如图A1.9(b)所示。最后一个连枝是下方的1 Ω电阻，其两个端点之间的

唯一路径是围绕整个电路的周界。这个连枝电流称为i_B，图A1.9(b)中i_B的箭头表示电流的路径和参考方向，该电流不是一个网孔电流。

注意，每个连枝只有一个电流，但每个树枝可以有从1到连枝电流总数的任何多个电流通过。使用几乎闭合的长箭头来标记回路有助于表明哪个回路电流流经哪个树枝以及它们的参考方向。

对每个回路写出一个KVL方程。使用的变量就是分配的连枝电流。因为不可能用电源电流表示电流源上的电压，并且已经使用电源电流的值作为连枝电流，因此应该放弃任何包含电流源的回路。

例题 A1.4 以图A1.9所示的电路为例，求i_A和i_B的值。

解： 首先进入i_A回路，从它的左下角开始顺时针方向流动。1 Ω电阻上的电流是(i_A-7)，在2 Ω元件上的电流是(i_A+i_B)，在连枝上为i_B，因此，

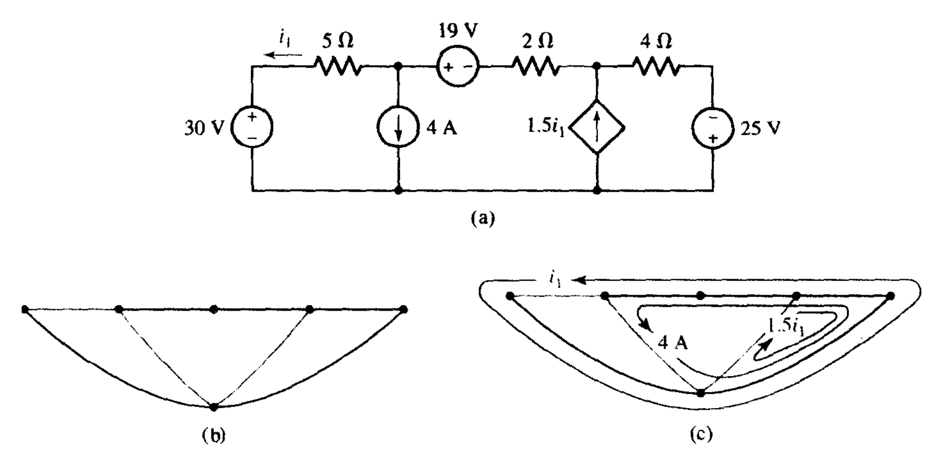
$$1(i_A-7)+2(i_A+i_B)+3i_A=0$$

对i_B连枝，从左下角开始顺时针方向流动，得到

$$-7+2(i_A+i_B)+1i_B=0$$

对于7 A连枝所属的回路不要求列出方程。解之，再次得到$i_A=0.5$ A，$i_B=2$ A。这次比原来少用了一个方程。

例题 A1.5 求图A1.10(a)所示电路中i_1的值。



图A1.10 (a) 利用通用回路分析法只要列出一个方程就能解出i_1的电路；(b) 唯一满足A1.1节给出的规则的树；(c) 用相应回路表示的3个连枝电流

解： 电路含有6个节点，因此有5条支路。由于网络中有8个元件，所以余树中有3个连枝。如果将3个电压源放在树中，两个电流源以及控制电流放在余树中，可得到图A1.10(b)所示的树。4 A电流源定义了一个回路，如图A1.10(c)所示。受控源建立了围绕右边网孔的$1.5i_1$电流回路，控制电流i_1给出围绕电路周边的余下的回路电流。注意，所有3个电流都通过4 Ω电阻。

我们只有一个未知量i_1，抛开由两个电流源定义的回路之后，环绕电路外边界应用KVL：

$$-30+5(-i_1)+19+2(-i_1-4)+4(-i_1-4+1.5i_1)-25=0$$

除了3个电压源之外，在这个回路中还有3个电阻。5 Ω电阻有一个回路电流经过，因为它也是连枝。2 Ω电阻上流经两个回路电流。4 Ω电阻上流经3个回路电流。为了避免遗漏或重复

使用电流，避免错误引用电流的方向，仔细画出一组回路电流是必须的。前面的方程是得到保证的，由此得出 $i_1 = -12$ A。

如何确认方程数目是充分的？设想一棵树，它不含回路，因此至少含有两个节点，每个节点只有一个树枝与其相连。根据已知连枝电流，应用KCL很容易求出这两个支路上的电流。如果还有其他节点只与一个树枝相连，这些树枝电流也可以立刻得到。在图A1.11所示的树中，可以求得支路 a，b，c 和 d 上的电流。现在沿着树枝移动，求得树枝 e 和 f 上的电流。这一过程可以继续，直到所有支路电流都被确定下来，因此有足够多的连枝电流用以确定所有的支路电流。考察一个含有回路的错误树所发生的情况很有益处。即使所有连枝电流为零，仍然可以有电流环绕这个"树环"。因此，连枝电流不能确定这个电流，因为连枝电流数目不够。按照定义这样的树是不可能的。

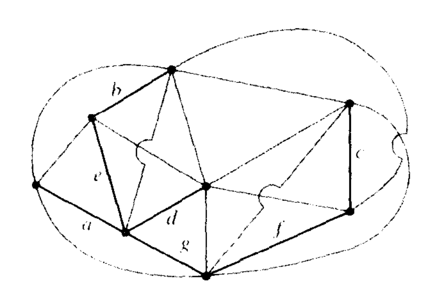


图 A1.11　说明连枝电流数目充分性的有关树的例题

为证明独立性，假定网络中唯一的电源是独立电压源。如同前面看到的一样，电路中的独立电流源导致较少的方程数目，而受控源通常会产生许多方程。如果只有独立电压源，那么用$(B - N + 1)$个连枝电流就正好写出$(B - N + 1)$个回路方程。为了证明这$(B - N + 1)$个方程的独立性，只需指出其中的每一个代表环绕一个回路的KVL，每个回路含有一个不出现在其他方程中的连枝。可以设想不同的电阻R_1，R_2，…，R_{B-N+1}包含在各个连枝中，显然，每个方程都不可能从其他方程得到，因为每个方程都含有一个不出现在其他方程中的系数。

因此连枝电流的数目足够得到完整的解，而且用来求连枝电流的回路方程组是一组独立方程。

在考察了通用节点分析法和回路分析法之后，应该知道它们各自的优缺点，从而对给定问题进行处理的时候可以做出灵活的选择。

节点法一般要求$(N - 1)$个方程，但是对于每个树枝中的独立或受控电压源可以减少一个方程，对于每个连枝电压或电流控制的受控源要增加一个方程。

回路法基本上涉及$(B - N + 1)$个方程，但是每个连枝中的独立或受控电流源将减少一个方程，而每个树枝电流控制的受控源将增加一个方程。

最后，让我们观察图A1.12中晶体管T形等效电路，正弦电源为4 sin 1000t mV，负载电阻为10 kΩ。

例题 A1.6　在图A1.12所示的电路中，求输入（发射极）电流 i_e 和负载电压 v_L，假设发射极电阻的典型值为 $r_e = 50\ \Omega$，基极电阻 $r_b = 500\ \Omega$，集电极电阻 $r_c = 20$ kΩ，共基极正向电流传输系数 $\alpha = 0.99$。

解： 尽管在下面的练习中会遇到一些具体细节，可是容易看出这个电路的分析能够通过画出需要的3个通用节点方程$(N - 1 - 1 + 1)$或两个回路方程$(B - N + 1 - 1)$的树完成。还需指出，3个方程是节点相对于参考电压的，它们是3个网孔方程。



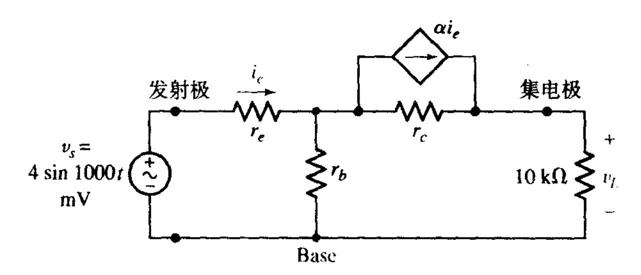


图 A1.12 正弦电压源和 10 kΩ 负载电阻连接到晶体管 T 形等效电路，输入和输出的公共连接端是晶体管的基极，这种接法称为共基极接法

无论选择哪种解法，对这个特定电路都可以得到如下答案：

$$i_e = 18.42 \sin 1000t \ \mu\text{A}$$

$$v_L = 122.6 \sin 1000t \ \text{mV}$$

由此可知，这个晶体管电路的电压增益(v_L/v_s)为 30.6，电流增益($v_L/10\,000i_e$)为 0.666，功率增益为 30.6 × 0.666 = 20.4。让晶体管工作在共发射极接法下可以获得更高的增益。

练习

A1.2 (a) 对图 A1.13(a)所示电路画出适当的树，并用通用回路分析法写出以 i_{10} 为变量的单个方程，求 i_{10}; (b)对图 A1.13(b)所示电路画出适当的树，并用通用回路分析法写出以 i_{10} 和 i_3 为变量的两个方程，求 i_{10}。

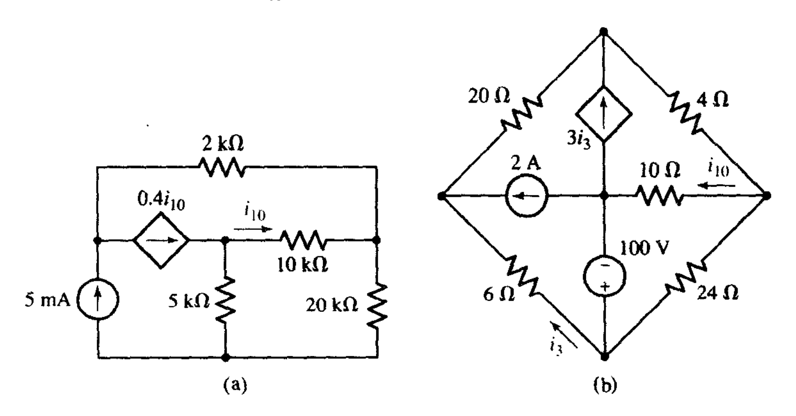


图 A1.13

A1.3 图 A1.12 所示是晶体管放大器等效电路，取 $r_e = 50\ \Omega$，$r_b = 500\ \Omega$，$r_c = 20\ \text{k}\Omega$，$\alpha = 0.99$，画出适当的树并求 i_e 和 v_L，采用: (a) 两个回路方程; (b) 3 个节点方程，其中有一个公共电压参考节点; (c) 3 个节点方程，没有公共参考节点。

A1.4 确定图 A1.12 中 10 kΩ 负载电阻所连接电路的戴维南和诺顿等效电路，采用: (a) v_L 的开路电压; (b)（向下的）短路电流; (c) 戴维南等效电阻。所有的电路参数已在练习 A1.3 中给出。

答案：A1.2：−4.00 mA；4.69 A。A1.3：18.42 sin 1000t μA；122.6 sin 1000t mV。
A1.4：147.6 sin 1000t mV；72.2 sin 1000t μA；2.05 kΩ。

附录2 联立方程求解

考虑下面表示简单系统的方程：

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \quad [1]$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \quad [2]$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \quad [3]$$

这组方程可以用系统消元法求解。这种方法尽管冗长，但当方程数目很大的时候，如果不是系统地求解将不可能得到结果。所幸的是，有很多办法可以做这件事，下面就来分析其中的几种方法。

科学计算器

对于形如方程[1]到方程[3]那样的方程组，已知方程的各个系数，如果只对未知量数值结果（而不是变量的代数关系）感兴趣，最直接的求解方法就是使用市面上出售的各种科学计算器。比如德州仪器公司的TI-86型计算器，只要键入[2nd] [SIMULT]，就可显示结果：

SIMULT
Number =

再按键[3] [ENTER]，计算器将显示：

a1, 1x1...a1, 3x3=b1
a1, 1=
a1, 2=
a1, 3=
b1=

先输入方程[1]的数据。注意，为防止数据出错，应该先花一点时间将这些方程按顺序整齐地排列好。按次序输入[7] [ENTER] [(−)] [3] [ENTER] [(−)] [4] [ENTER] [(−)] [11] [ENTER]，接着输入第二个方程。

输入完3个方程之后，按键让TI-86求解未知量$x1$，$x2$，$x3$（它们代表v_1，v_2，v_3）。计算器将显示：

x1 = 1.000
x2 = 2.000
x3 = 3.000

需要指出，每一种能够求解联立方程的计算器对如何输入所要求的信息都有各自的步骤要求，因此，在用计算器解方程的时候，无论如何都不应该将“用户手册”或“用户指南”这样的东西扔在一边。

矩阵

另一个求解方程组的有力工具是矩阵。考虑方程[1]、方程[2]和方程[3]，由方程组系数组成的阵列为

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

该阵列称为矩阵。选择符号**G**是因为矩阵的每个元素都是一个电导值。矩阵本身没有值，它只是许多元素组成的阵列。一般用黑体字母表示矩阵，用方括号将矩阵元素包含在内。

含有m行n列的矩阵称为$(m \times n)$阶矩阵，即

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

是一个(2×3)阶矩阵。上例中的**G**是一个(3×3)阶矩阵。$(n \times n)$阶矩阵又称n阶方阵。

一个$(m \times 1)$阶矩阵称为列矩阵，或列矢量。以下矩阵是一个(2×1)阶相量电压的列矩阵：

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

下面的矩阵则是一个(2×1)阶相量电流的矢量：

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

一个$(1 \times n)$阶矩阵称为行矢量。

两个$(m \times n)$阶矩阵相等是指它们对应的元素都相等。即，如果a_{jk}表示位于**A**中第j行和第k列的元素，b_{jk}表示位于**B**中第j行和第k列的元素，当且仅当对于所有$1 \leqslant j \leqslant m$和$1 \leqslant k \leqslant n$都有$a_{jk}=b_{jk}$时，则$\mathbf{A}=\mathbf{B}$。例如，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

则$\mathbf{V}_1=\mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$和$\mathbf{V}_2=\mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1+\mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$。

两个$(m \times n)$阶矩阵相加就是将它们的对应元素相加：

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

下面考虑矩阵乘积**AB**，这里**A**是$(m \times n)$阶矩阵，**B**是$(p \times q)$阶矩阵。如果$n=p$，这两个矩阵称为保角（conformal），它们的乘积存在。仅当第一个矩阵的行数等于第二个矩阵的列数时，才有两个矩阵相乘的定义。

矩阵相乘的正式定义指出：$(m \times n)$阶矩阵**A**和$(n \times q)$阶矩阵**B**的乘积是一个$(m \times q)$阶矩阵，矩阵元素为c_{jk}，$1 \leqslant j \leqslant m$和$1 \leqslant k \leqslant q$，其中，

$$c_{jk}=a_{j1}b_{1k}+a_{j2}b_{2k}+\cdots+a_{jn}b_{nk}$$

换句话说，乘积的第2行第3列元素等于**A**中第2行所有元素与**B**中第3列对应元素的乘积之和。例如，给定(2×3)阶矩阵**A**和(3×2)阶矩阵**B**，则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \end{bmatrix}$$

结果是一个(2 × 2)阶矩阵。

下面看一个矩阵相乘的数值例子，令：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

其中，$6 = 3 \times 2 + 2 \times (-2) + 1 \times 4$，$4 = 3 \times 3 + 2 \times (-1) + 1 \times (-3)$，等等。

矩阵相乘不符合交换律。例如，给定(3 × 2)阶矩阵 **C** 和(2 × 1)阶矩阵 **D**，显然可以求出乘积 **CD**，但乘积 **DC** 却是无定义的。

作为最后一个例子，令：

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 $\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B$ 和 $\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A$ 都是有定义的，但是，

$$\mathbf{t}_A\mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

而

$$\mathbf{t}_B\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

练习

A2.1　已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$，$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$和 $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$，求：(a) **A** + **B**；(b) **AB**；(c) **BA**；(d) **AV** + **BC**；(e) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$。

答案： $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} 1 & -17 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} V_1 - 3V_2 + 170 \\ 3V_1 + 5V_2 - 10 \end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}$。

逆矩阵

用矩阵形式表示方程组：

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [4]$$

为了求出电压矢量，可以用矩阵 **G** 的逆乘以式[4]的两边：

$$\mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad [5]$$

这一过程可用到恒等式 $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$，其中，**I** 是单位矩阵，它是与 **G** 同尺寸的方阵，除了对角线上的元素，其余元素均为0。单位矩阵对角线上的每个元素均为1。因此式[5]变为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

上式可以简化为

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

由于单位矩阵乘以任何矢量就是该矢量本身（作为30秒钟的习题留给读者证明），因此解方程组的问题就转化为求 **G** 的逆矩阵问题。许多科学计算器提供矩阵运算功能。

再次利用 TI-86 计算器作为例子，键入 [2nd] [MATRX]，计算器显示如图 A2.1 所示。

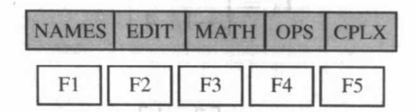


图 A2.1 TI-86 矩阵操作显示，每个函数键在菜单项之下

为产生新矩阵 **G**，按 [F2] 键，计算器将显示：

```
MATRX
Name=
```

再按 [G] [ENTER] 键，计算器又将显示：

```
MATRX:G        1     x1
          [0          ]
```

按键 [3] [ENTER] 两次，将 **G** 定义为 3 × 3 阶矩阵，显示变为

```
MATRX:G          3 x3
          [0    0    0]
          [0    0    0]
          [0    0    0]

          1,         1=0
```

键入：

[7] [ENTER] [(–)] [3] [ENTER] [(–)] [4] [ENTER]

直到将每个系数输入完毕，然后按 [EXIT] 键。

接着再次引用矩阵菜单，产生 3 × 1 维的电流矢量 **I**，输入 –11，3 和 25。可以按键 [ALPHA] [G] [ENTER] 或 [ALPHA] [I] [ENTER] 来检查刚才输入的值。

现在计算器已经准备好进行矩阵运算求解方程组了。此时只需键入

[ALPHA] [G] [x^{-1}] [I] [ENTER]

再次提醒读者注意阅读计算器用户手册以了解详细情况。

行列式

尽管矩阵本身没有“值”，但是一个方阵的行列式是有值的。确切地说，行列式是一个值，但一般把行列式阵列和它的值都称为行列式。行列式用符号Δ表示，并且用一个适当的下标表示它所指的矩阵，如：

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

注意，这里用了两条垂线将行列式包围在内。

任何行列式的值可用它的子行列式展开。为此，选出任意行j或任意列k，将该行或该列的元素乘以它的子行列式，再乘以$(-1)^{j+k}$，然后将这些乘积项相加。出现在第j行第k列的元素的子行列式是除去j行k列后形成的行列式，用Δ_{jk}表示。

例如，沿第3列将行列式Δ_G展开。首先用(-4)乘以$(-1)^{1+3}$（结果为1），接着乘以它的子行列式：

$$(-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

对第3列的其余两个元素重复这一过程，将这两个结果再求和：

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

这些子行列式只包含两行和两列。它们是2阶行列式，其值很容易通过再次用子行列式展开的方法得到，这里给出详细过程。对于第一个行列式，沿第一列展开，(-3)乘以$(-1)^{1+1}$，再乘以其子行列式，现在子行列式就是-2。接着(-4)乘以$(-1)^{2+1}$，再乘以6。因此，

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 4(-6) = 30$$

二阶行列式求值的一个容易记住的方法是“左上乘以右下减去右上乘以左下”。最后，

$$\begin{aligned} \Delta_G &= -4[(-3)(-2) - 6(-4)] \\ &\quad + 2[(7)(-2) - (-3)(-4)] \\ &\quad + 11[(7)(6) - (-3)(-3)] \\ &= -4(30) + 2(-26) + 11(33) \\ &= 191 \end{aligned}$$

作为练习，将同一个行列式沿第一行展开：

$$\begin{aligned} \Delta_G &= 7\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(62) + 3(-41) - 4(30) \\ &= 191 \end{aligned}$$

子行列式展开的方法对任何阶的行列式都适用。

下面重复以上规则，用更一般的形式确定给定行列式$\mathbf{a}$的值：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

沿任意行j以子行列式展开的形式可以得到Δ_a：

$$\begin{aligned} \Delta_a &= a_{j1}(-1)^{j+1}\Delta_{j1} + a_{j2}(-1)^{j+2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{jN}(-1)^{j+N}\Delta_{jN} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_{jn}(-1)^{j+n}\Delta_{jn} \end{aligned}$$

或沿任意列 k 展开：

$$\Delta_a = a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k}\Delta_{2k} + \cdots + a_{Nk}(-1)^{N+k}\Delta_{Nk}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} a_{nk}(-1)^{n+k}\Delta_{nk}$$

出现在 j 行和 k 列的系数 C_{jk} 就是 $(-1)^{j+k}$ 乘以子行列式 Δ_{jk}，所以 $C_{11}=\Delta_{11}$，而 $C_{12}=-\Delta_{12}$。

上式可以写成

$$\Delta_a = \sum_{n=1}^{N} a_{jn}C_{jn} = \sum_{n=1}^{N} a_{nk}C_{nk}$$

例如考虑一个 4 阶行列式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

可得

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(10+3) + 1(4+9) - 3(-2+15) = 26$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1(10+3) + 2(4+9) + 0 = 13$$

即 $C_{11}=26$，$C_{12}=-13$，求得 Δ 的值为

$$\Delta = 2C_{11} + (-1)C_{12} + (-2)C_{13} + 0$$
$$= 2(26) + (-1)(-13) + (-2)(3) + 0 = 59$$

格拉姆法则

现在考虑格拉姆法则，它可以帮助我们求得未知量的值。在解方程组时，如果数值系数没有给定，计算器就无能为力了，这时可以利用格拉姆法则。再次考虑方程[1]、方程[2]和方程[3]。定义行列式 Δ_1 为方程组右边 3 个常数代替 Δ_G 后的行列式，所以，

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

沿第一列展开：

$$\Delta_1 = -11\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -682 + 123 + 750 = 191$$

根据格拉姆法则：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1\ \text{V}$$

和

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2\ \text{V}$$

最后，

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} = \frac{1092 - 291 - 228}{191} = 3\ \text{V}$$

格拉姆法则适用于求解包含N个未知量的N个联立线性方程组，其中第i个变量v_i为

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

练习

A2.2 求下列行列式的值：(a)$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$；(b)$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$；(c)$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$；(d) 如果 $5i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$，$-2i_1 + 6i_2 - 3i_3 - i_4 = 0$，$-i_1 - 3i_2 + 4i_3 - i_4 = 0$，$-i_2 - i_3 = 0$，求$i_2$的值。

答案：4；33；-411；1.266。

附录3 戴维南定理的证明

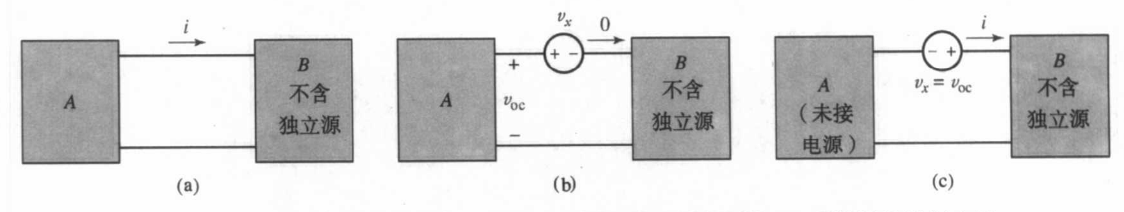
为便于参考，将第5章中5.4节给出的戴维南定理重写如下：

给定任何线性电路，将它重新划分为两个网络A和B，它们只用两根导线相连，当B断开时，定义出现在A端口的电压为开路电压υ_{oc}。如果将A中的所有独立电流源和独立电压源“置零”，用独立电压源υ_{oc}以适当的极性与被置零的无源电路相串联，则A中的所有电流和电压将保持不变。

下面证明原始网络A与它的等效电路将产生同样大小的电流流入网络B的端点。如果电流相同，那么电压也应该相同。换句话说，如果给网络B施加一定的电流，可以将其设想为一个电流源，那么这个电流源和网络B组成的电路具有一定的输入电压，它是电流的响应。因此，电流决定电压。另一方面，如果愿意，可以证明网络B的端电压没有改变，因为电压也唯一地确定了电流。如果网络B的输入电压和电流都未改变，就可以得出遍布于网络B中的电流和电压都未改变的结论。

首先对一种简单情况来证明该定理。假定网络B无源（不含独立源），完成证明之后，可以利用叠加定理将现在的定理扩展到包含独立源的情况。每个网络都可以包含受控源，只要受控源的控制变量也在同一个网络中即可。

在图A3.1(a)中从网络A通过上边导体流向网络B的电流i完全由网络A中的独立源产生。假定在流过电流i的导线中插入一个额外的电压源υ_x，该电压源称为戴维南电源，如图A3.1(b)所示，然后调节υ_x的幅度和时间变化，直到电流减小到零。按照υ_{oc}的定义，端口A上的电压一定等于υ_{oc}，因为$i=0$。网络B不含独立源，没有电流流入其端点，因此网络B端点上没有电压。根据基尔霍夫电压定律，戴维南电源的电压就是υ_{oc}，$\upsilon_x=\upsilon_{oc}$。而且联合在一起的戴维南电源和网络A并未向B提供电流，但因为网络A本身提供了电流i，叠加定理要求戴维南电源向B提供$-i$的电流。将戴维南电源反接并让它单独作用，将会在上边的导线中产生电流i，如图A3.1(c)所示。这种情况恰好与戴维南定理的结论相同：戴维南电源υ_{oc}与无源网络A串联的结果与给定网络A等效。



图A3.1 (a)一个一般的线性网络A以及一个不含独立源的网络B，受控源的控制变量必须与受控源同在一个网络中；(b)在电路中插入戴维南电源并进行调节直到$i=0$。网络B上没有电压，$\upsilon_x=\upsilon_{oc}$，所以戴维南电源提供的电流为$-i$，而网络A提供的电流为i；(c)将戴维南电源反接，网络A未接电源，因此电流为i

现在考虑网络B为有源网络的情况。设想经过上边导线由网络A流向网络B的电流i，它由i_A和i_B两部分组成，其中，i_A是网络A单独作用产生的电流，i_B是网络B单独作用产生的电流。对这两个线性网络应用叠加定理就可以将电流分成两个部分。图A3.2所示是完全响应和两个部分响应。

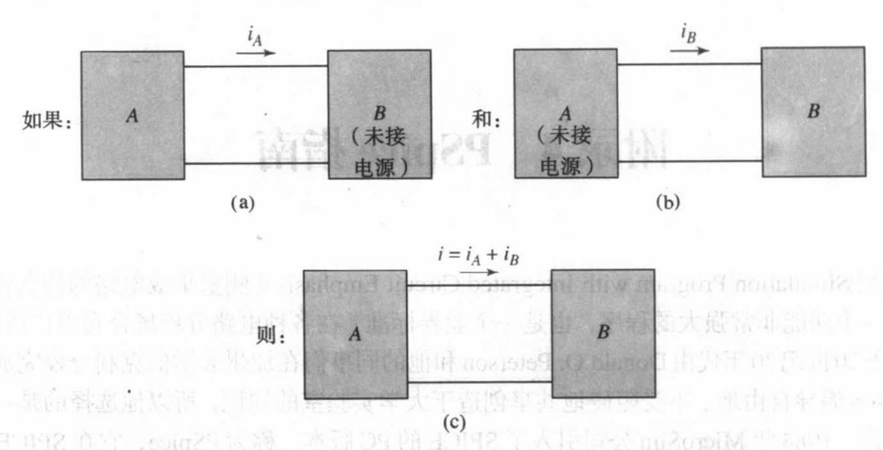


图 A3.2 应用叠加定理可以将电流 i 理解为两个部分响应之和

我们已经分析过部分响应 i_A 的情况，如果网络 B 是无源的，可以用戴维南电源和无源网络 A 替换原网络 A。换句话说，在 A，B 中的电源和戴维南电源这3个电源中，必须记住，当 A 和 B 中电源被置零且戴维南电源起作用时，将出现部分响应 i_A。为了利用叠加定理，现在让 A 保持无源，但是使 B 为有源，置戴维南电源为零，根据定义，就得到部分响应 i_B。将这些结果叠加，当 A 无源时，让戴维南电源和 B 的电源都起作用，响应为 $i_A + i_B$。它们的和就是原来的电流 i。戴维南电源和 B 的电源都起作用，而 A 中电源置零的情况是戴维南等效电路所要求的。因此，无论网络 B 的状态如何（有源或无源），都可以将有源网络 A 用其戴维南电源（即网络 A 的开路电压）与无源网络 A 的串联组合来代替。

附录4　PSpice 指南

SPICE是Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis（侧重集成电路的仿真程序）的缩写。它是一个功能非常强大的程序，也是一个业界标准，在各种电路分析场合有着广泛的应用。SPICE最早于20世纪70年代由Donald O. Peterson和他的同事们在加州大学伯克利分校完成的早期开发，Peterson倡导自由地、不受阻碍地共享创造于大学实验室的知识，所以他选择的是一种不同于盈利的模式。1984年MicroSim公司引入了SPICE的PC版本，称为PSpice，它在SPICE程序核的基础上建立了直观的图形界面。现在的SPICE有多个商用版本，此外还有相互竞争的软件产品。

本附录只简单介绍计算机辅助电路分析的基本知识，详细介绍可以参考深入阅读部分列出的参考书。参考书中涉及到的较深入的内容包括如何确定输出量对于某个元件值变化的灵敏度；如何画出输出量随输入量变化的曲线；如何确定交流输出随电源频率变化的函数；如何进行噪声和失真分析的方法；非线性器件模型；以及如何对某些类型的电路建立温度效应模型。

虽然OrCAD获得了MicroSim，Cadence又获得了OrCAD，但是流行的电路仿真软件包在此过程中的变化很小，在写这本书的时候，OrCAD 10.3专业版也已经发布，零售价约1000美金，而压缩版本OrCAD 10.0可以免费下载（www.cadence.com）。取代流行的PSpice学生版9.1的新版本略有变化，主要体现在电路图编辑中，但使用原来版本的PSpice用户对此基本上还是熟悉的。

OrCAD 10.0附带演示版的文档列出了一些受限制的方面，这在专业版（市场上可以买到）上是不受限的。最主要的限制是只有包含60个部件以下的电路才能够被保存和仿真，而大电路只能画图和浏览。我们选择OrCAD Capture作为原理图编辑器，因为现在的版本和PSpice A/D的Capture原理图编辑器基本相似。尽管目前Cadence也提供PSpice A/D的下载，但是已经不再提供技术支持了。

开始

计算机辅助电路分析包含3个独立的步骤：(1) 画原理图；(2) 电路仿真；(3) 从仿真输出的结果获得需要的信息。从start菜单上显示的窗口程序中单击Capture原理图编辑器即可进入界面 start，菜单类似于图A4.1所示的内容，选择Capture CIS Demo，打开原理图编辑器，如图A4.2所示。

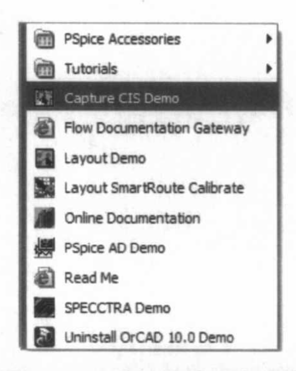
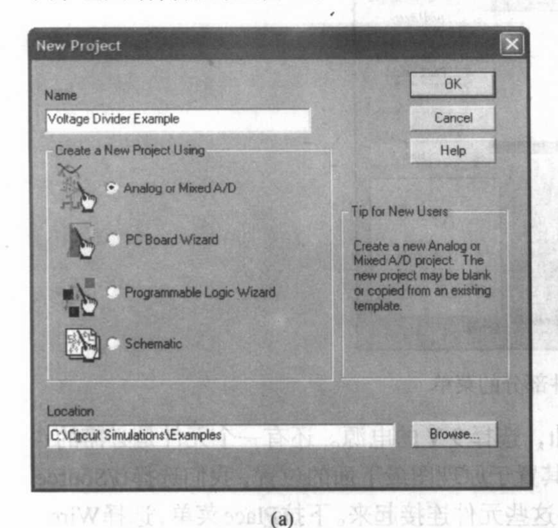


图 A4.1　Orcad 演示程序菜单

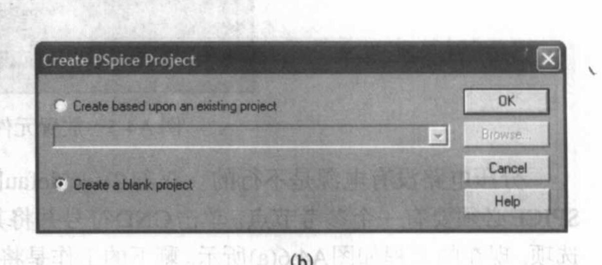


图 A4.2 Capture CIS 演示窗口

在File菜单下，选择New，然后选择Project，显示如图A4.3(a)所示的界面，提供仿真文件名和路径后，出现如图A4.3(b)所示的窗口（单击“blank project”选项）。现在看到的是如图A4.4所示原理图编辑器的主窗口。



(a)



(b)

图 A4.3 (a) 新程序窗口；(b) 创建 PSpice 程序窗口

现在可以画电路图了。为便于图解说明，我们选用一个简单的分压电路。先把所需的元件放到网格上，再用导线将它们连接起来。

下拉Place菜单，选择Part，结果如图A4.5所示。输入小写字母“r”，单击OK按钮，可以用鼠标在窗口范围内移动电阻符号。单击鼠标左键，将电阻（名为R1）置于鼠标的位置，双击则将第二个电阻（名为R2）放置在原理图中，单击鼠标右键并选择End Mode以取消放置更多的电阻。第二个电阻的方向若不合适，则单击左键鼠标高亮显示该电阻，然后键入Ctrl+R即可旋转方向。如果不清楚元件的名称，可以在列表中搜索。如果1 kΩ不是电阻所需要的值，例如，需要的是两个500 Ω的电阻，只要双击“1k”的方框即可将缺省值改成需要的数值。

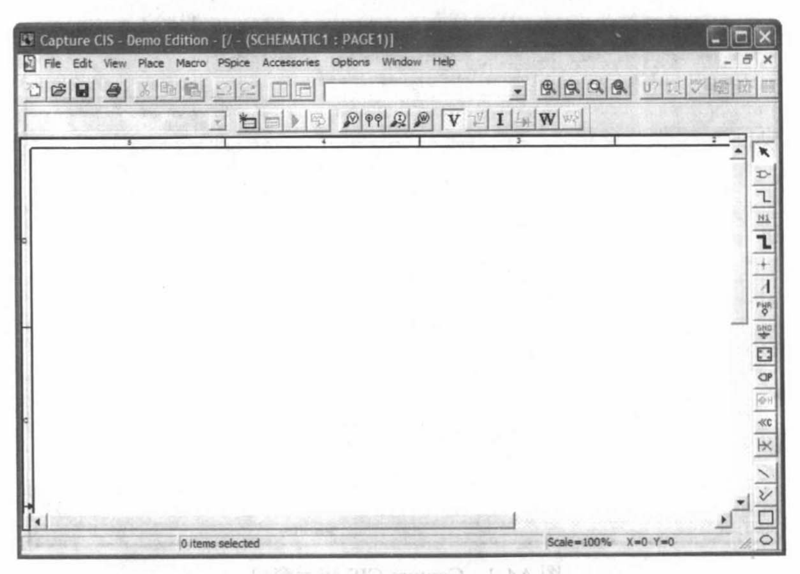


图 A4.4 Capture CIS 主窗口

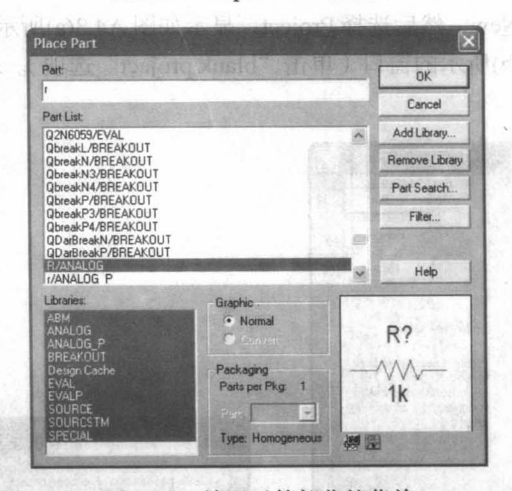
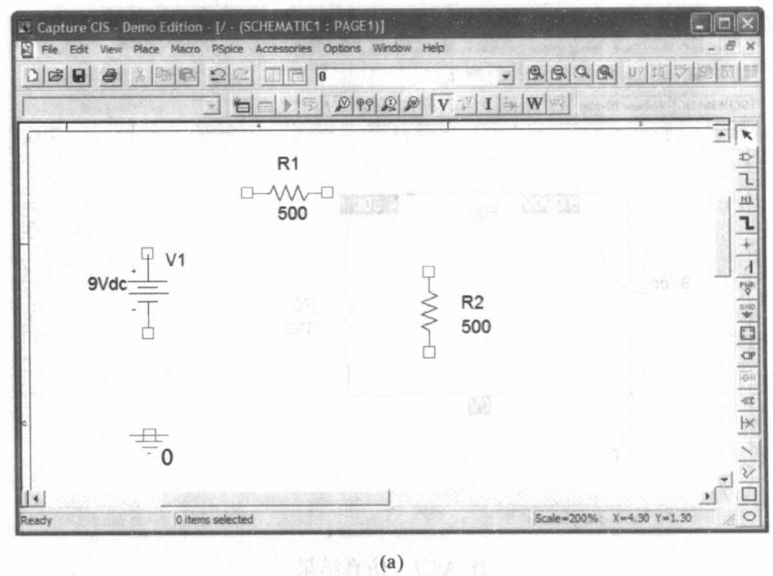


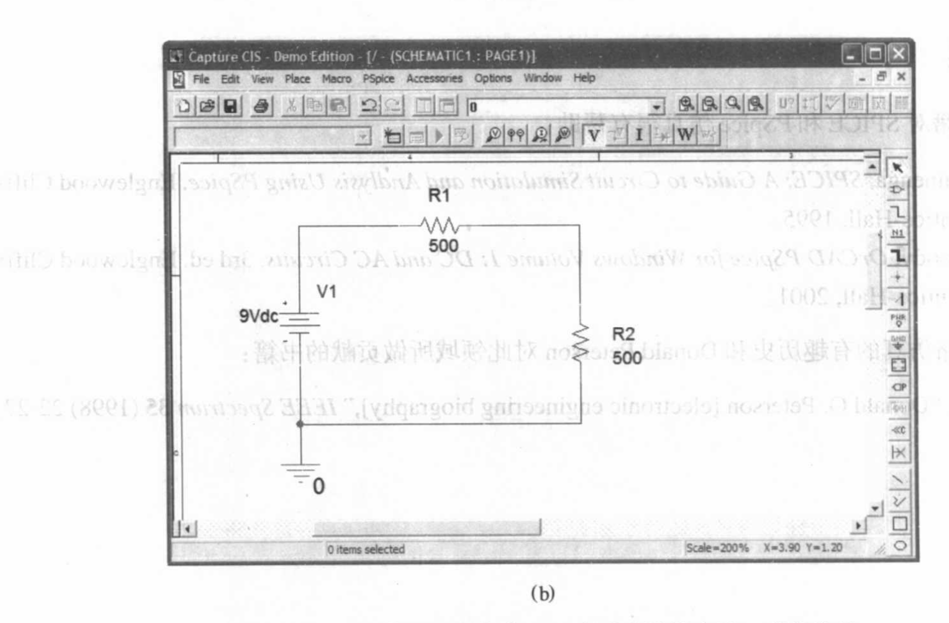
图 A4.5 放置元件部分的菜单

分压电路没有电源是不行的。双击 0Vdc default，选择 9 V 的电源。还有一个元件是必需的：SPICE必须要有一个参考节点。单击GND符号并将其置于原理图最下面的位置，我们选择0/Source选项。现在的进程如图A4.6(a)所示。剩下的工作是将这些元件连接起来。下拉Place菜单，选择Wire。利用鼠标的左右键控制连接导线（经验在这里很有用，选择任何不想要的连接导线，按下Delete键去除）。最后的电路如图A4.6(b)所示。值得注意的是，编辑器允许用户将导线穿过电阻（这样就短路了），但是这类操作很难被发现。一般情况下，当连线不合适时，会弹出警告窗口。

首先在 File 菜单中单击 Save 保存文件。从 PSpice 菜单中选择 New Simulation Profile，在对话框中输入 Voltage Divider，出现仿真设置对话框，用户可以设置各种仿真参数。对我们现在的例子来说，只需选择 OK。再次下拉 PSpice 菜单，选择 Run。仿真结果如图 A4.7 所示。




(a)



(b)

图 A4.6 (a) 元件置于网格中；(b) 完成连线的电路，准备仿真

幸运的是，仿真结果与预计的一致，即将电源电压等分给了两个等值的电阻。通过选择PSpice菜单下的View Output File可以查看仿真结果。滚动至文件最后，得到下列数值：

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(N00157)	9.0000	(N00166)	4.5000

其中，节点157是电源的正参考端，节点166是两个电阻之间的节点。这些信息可在文件的顶端查到。

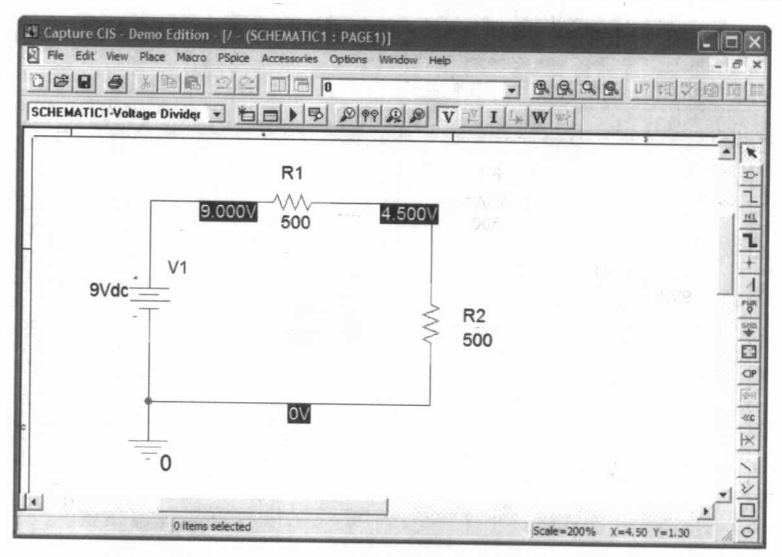


图 A4.7 仿真结果

深入阅读

以下书籍对 SPICE 和 PSpice 仿真很有帮助：

P. W. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Andlysis Using PSpice*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall, 1995。

R. W. Goody, *OrCAD PSpice for Windows Volume 1: DC and AC Circuits*, 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2001。

讲述电路仿真的有趣历史和 Donald Peterson 对此领域所做贡献的书籍：

T. Perry, “Donald O. Peterson [electronic engineering biography],” *IEEE Spectrum* **35** (1998) 22-27。

附录5 复　　数

本附录包含复数的定义、复数的基本算术运算、欧拉恒等式、复数的指数和极坐标形式。首先介绍复数的概念。

A5.1 复数

在开始学习数学时只涉及到实数，如4，$-\frac{2}{7}$和π。可是不久便遇到形如$x^2=-3$这样的代数方程。任何实数都不满足该方程，只有通过引入虚数单位（或称虚数算符）才能求解该方程，这里，虚数单位用j表示。根据定义$j^2=-1$，所以$j=\sqrt{-1}$，$j^3=-j$，$j^4=1$，等等。实数与虚数运算符的乘积称为虚数，实数与虚数之和称为复数。因此，形如$a+jb$的数（其中a和b为实数）就是复数。

说明： 数学家用符号i表示虚数算符，但在电气工程领域为避免与电流符号混淆，习惯上用j表示虚数运算符。

说明： 选择“虚”和“复”这两个词是一个误解。在这里和在数学文献中它们只是作为技术上的术语用来表示一类数。将“虚”字解释为“不属于这个现实世界的”，或将“复”解释为“复杂的”是既不恰当且违反初衷的。

下面用某个单字母表示复数，如$\mathbf{A}=a+jb$。它的复数性质由黑体字母表示。在手写稿中习惯于在字母上加一横杠。前面的复数**A**可以用一个实数成分（或实部）a和一个虚数成分（或虚部）b来描述。即表示为

$$\text{Re}\{\mathbf{A}\}=a \qquad \text{Im}\{\mathbf{A}\}=b$$

A的虚部不是jb，因为根据定义，虚部必须是实数。

应该指出，所有实数都可以被认为是虚部为零的复数，因此实数包含于复数系统之中，可以认为实数是复数的特例。在定义复数的基本算术运算时会想到，如果将每个复数的虚部置零，复数运算应该还原为相应的实数运算。

由于任何复数完全由一对实数表征，如前面提到的a和b，因此可以用直角坐标获得感观上的帮助。如图A5.1所示，用一个实轴和一个虚轴可以形成一个复平面，或称Argand图，在这个图上任何一个复数都可用一个点表示。复数$\mathbf{M}=3+j1$和$\mathbf{N}=2-j2$已经在图中标出。应该意识到复平面只是一个感观上的工具，它对后面的数学命题完全不是必须的。

当且仅当两个复数的实部相等并且虚部也相等时，则称两个复数相等。参见复平面图，对每个复平面中的点只有一个复数与之对应，反过来，对每个复数只有一个复平面中的点与之对应。这样，给定两个复数：

$$\mathbf{A}=a+jb \quad 和 \quad \mathbf{B}=c+jd$$

如果

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}$$

则

$$a = c \quad 和 \quad b = d$$

用一个实数和一个虚数的和来表示复数（如 $\mathbf{A} = a + jb$）称为复数的直角形式或者卡迪尔形式。我们很快将会给出复数的其他形式。

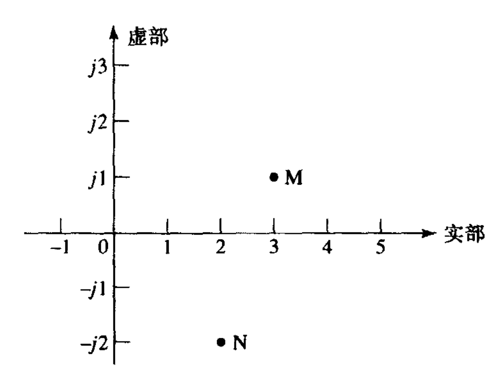


图 A5.1 在复平面上表示的复数 $\mathbf{M} = 3 + j1$ 和 $\mathbf{N} = 2 - j2$

现在定义复数的基本运算：加、减、乘、除。两个复数的和定义为另一个复数，其实部是两个复数实部之和，虚部是两个复数的虚部之和，即

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

例如：

$$(3 + j4) + (4 - j2) = 7 + j2$$

同样，可定义两个复数的差，例如：

$$(3 + j4) - (4 - j2) = -1 + j6$$

复数的加减也可以在复平面用作图法完成。每个复数用一个矢量或有向线段表示。像图 A5.2(a)那样，绘制一个平行四边形或者像图 A5.2(b)那样将两个矢量头尾相连就能得到两个矢量的和。作图法对于检查更为准确的数值解是很有帮助的。

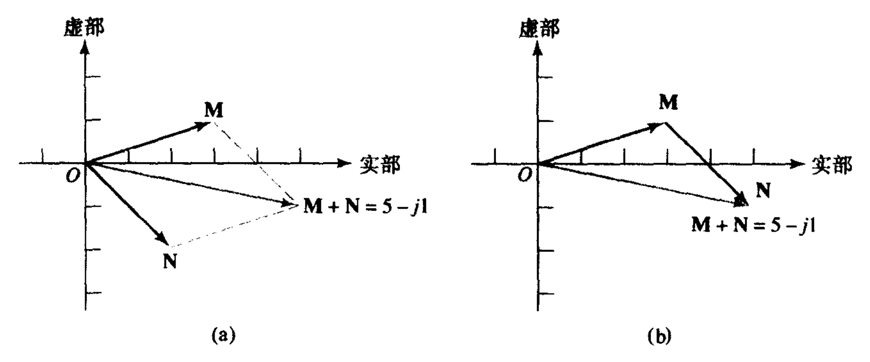


图 A5.2 (a) 通过构造一个平行四边形得到复数 $\mathbf{M} = 3 + j1$ 与 $\mathbf{N} = 2 - j2$ 的和；(b) 将两个矢量头尾相连也可以得到它们的和

两个复数相乘的定义为

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

上面的结果很容易用两个二项式相乘直接得到，其中用到了实数的代数规则并用$j^2 = -1$简化了结果。例如：

$$\begin{aligned}(3 + j4)(4 - j2) &= 12 - j6 + j16 - 8j^2 \\ &= 12 + j10 + 8 \\ &= 20 + j10\end{aligned}$$

这种方法比采用通用的乘法定义公式更容易，特别是如果直接用-1取代j^2更是如此。

在定义复数除法运算之前，应该先定义复数的共轭。复数$\mathbf{A} = a + jb$的共轭为$a - jb$，用$\mathbf{A}^*$表示。由此，任何复数的共轭只要改变该复数虚部的符号就可得到。比如，

$$\mathbf{A} = 5 + j3$$

则

$$\mathbf{A}^* = 5 - j3$$

显然，对于任何复杂的复数表达式，将其中每个复数项替换为它的共轭（即将每个j替换为$-j$）就可得到复数的共轭表达式。

加、减、乘运算的定义表明：复数与其共轭之和是一个实数；复数与其共轭之差是一个虚数；复数与其共轭之积是一个实数。显而易见的是，如果$\mathbf{A}^*$是$\mathbf{A}$的共轭，则$\mathbf{A}$是$\mathbf{A}^*$的共轭，换句话说，$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$。一个复数与其共轭称为一对共轭复数。

说明：在物理问题中，一个复数总是伴随着它的共轭。

两个复数的商定义为

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{(\mathbf{A})(\mathbf{B}^*)}{(\mathbf{B})(\mathbf{B}^*)}$$

因此，

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

为使分母成为一个实数，用分母的共轭同乘以分子分母，这个过程称为分母有理化。下面看一个数值例子：

$$\begin{aligned}\frac{3 + j4}{4 - j2} &= \frac{(3 + j4)(4 + j2)}{(4 - j2)(4 + j2)} \\ &= \frac{4 + j22}{16 + 4} = 0.2 + j1.1\end{aligned}$$

两个直角形式的复数相加减是很简单的运算，可是两个直角形式的复数相乘或相除却是相当笨拙的过程。我们将会发现，指数或极坐标形式的复数乘除运算是非常简单的。这两种复数形式将在A5.3节和A5.4节介绍。

练习

A5.1 设$\mathbf{A} = -4 + j5$，$\mathbf{B} = 3 - j2$和$\mathbf{C} = -6 - j5$，求：(a) $\mathbf{C} - \mathbf{B}$; (b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + 5\mathbf{C}$; (c) $j5\mathbf{C}^2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$; (d) $\mathbf{B}\,\mathrm{Re}[\mathbf{A}] + \mathbf{A}\,\mathrm{Re}[\mathbf{B}]$。

A5.2 **A**，**B**，**C**的值与前题相同，求：(a) [(**A** − **A***)(**B** + **B***)*]*；(b) (1/**C**) − (1/**B**)*；(c) (**B** + **C**)/(2**BC**)。

答案：A5.1：−9 − *j*3；−47 − *j*9；27 − *j*191；−24 + *j*23。A5.2：−*j*60；−0.329 + *j*0.236；0.0662 + *j*0.1179。

A5.2 欧拉恒等式

在第9章中曾经提到含虚数的时间函数，而且关心的是这些函数关于实数t的微分和积分。对复函数进行微积分与实函数对t的微积分过程完全一样。也就是说，在微积分运算中像对待实常数那样对待复常数。如果$\mathbf{f}(t)$是一个复时间函数：

$$\mathbf{f}(t) = a\cos ct + jb\sin ct$$

则

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = -ac\sin ct + jbc\cos ct$$

及

$$\int \mathbf{f}(t)\,dt = \frac{a}{c}\sin ct - j\frac{b}{c}\cos ct + \mathbf{C}$$

其中，积分常数**C**一般是一个复数。

有时必须对复变量函数做关于该复变量的微分或积分。一般来说，进行微分或积分运算的函数要满足一定条件才能顺利完成运算。这里所遇到的所有函数都满足这些条件，采用与实变量相同的方法可以求得关于复变量的微分和积分。

至此，必须利用一个非常重要的基本关系式，称为欧拉恒等式。因为它在非直角形式的复数表示上极其有用，因此这里给出它的证明。

大学微积分学的教材都给出了这个证明，它基于$\cos\theta$，$\sin\theta$和e^z的幂级数展开：

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

或

$$\cos\theta + j\sin\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

及

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

所以，

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

结论为

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad [1]$$

如果取 $z = -j\theta$，则

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \qquad [2]$$

将式[1]和式[2]相加或相减即可得到在研究并联和串联*RLC*电路的欠阻尼自由响应时未加证明就用过的两个表达式：

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \qquad [3]$$

$$\sin\theta = -j\tfrac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \qquad [4]$$

练习

A5.3 利用式[1]~式[4]，求：(a) e^{-j1}; (b) e^{1-j1}; (c) $\cos(-j1)$; (d) $\sin(-j1)$。

A5.4 当 $t = 0.5$ 时，求：(a) $(d/dt)(3\cos 2t - j2\sin 2t)$; (b) $\int_0^t (3\cos 2t - j2\sin 2t)\,dt$。当 $\mathbf{s} = 1 + j2$ 时，求：(c) $\int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{s}^{-3}\,d\mathbf{s}$; (d) $(d/d\mathbf{s})[3/(\mathbf{s}+2)]$。

答案：A5.3：$0.540 - j0.841$；$1.469 - j2.29$；1.543；$-j1.175$。A5.4：$-5.05 - j2.16$；$1.262 - j0.460$；$-0.06 - j0.08$；$-0.0888 + j0.213$。

A5.3 指数形式

给定欧拉恒等式：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

用正实数 C 乘以等式两边：

$$Ce^{j\theta} = C\cos\theta + jC\sin\theta \qquad [5]$$

式[5]的右边由一个实数与一个虚数之和组成，因此是一个直角形式的复数，我们称它为复数**A**，其中 $\mathbf{A} = a + jb$。令两个复数的实部相等：

$$a = C\cos\theta \qquad [6]$$

虚部也相等：

$$b = C\sin\theta \qquad [7]$$

然后将式[6]的平方与式[7]的平方相加：

$$a^2 + b^2 = C^2$$

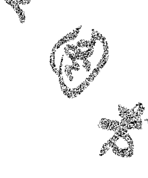
或者

$$C = +\sqrt{a^2 + b^2} \qquad [8]$$

用式[6]除以式[7]，可得

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

即



$$\theta = \arctan\frac{b}{a} \tag{9}$$

得到式[8]和式[9]之后即可根据已知的 a 和 b 确定 C 和 θ。例如，$\mathbf{A}=4+j2$，令 $a=4$，$b=2$，求得 C 和 θ:

$$C = \sqrt{4^2+2^2} = 4.47$$
$$\theta = \arctan\tfrac{2}{4} = 26.6^\circ$$

可以用以上结果将 **A** 写成如下形式：

$$\mathbf{A} = 4.47\cos 26.6^\circ + j4.47\sin 26.6^\circ$$

但是式[5]左边的形式更有用：

$$\mathbf{A} = C\mathrm{e}^{j\theta} = 4.47\mathrm{e}^{j26.6^\circ}$$

这种形式的表达式称为复数的指数形式。其中，正实数因子 C 称为幅度，出现在指数部分的实数 θ 称为幅角。数学家总是以弧度表示 θ，即将它写成

$$\mathbf{A} = 4.47\mathrm{e}^{j0.464}$$

但工程师习惯以度（degree）表示 θ。在指数中使用度的符号（°）可以避免混淆。

概括来说，给定一个直角形式的复数：

$$\mathbf{A} = a + jb$$

若希望将它表示成指数形式：

$$\mathbf{A} = C\mathrm{e}^{j\theta}$$

可以利用式[8]和式[9]求得 C 和 θ。如果给定指数形式的复数，则可以利用式[6]和式[7]求得 a 和 b。

若 **A** 是一个数值表达式，则指数（或极坐标）形式与直角形式之间的转换可以借助于大多数科学计算器的内建运算功能实现。

使用式[9]的反正切函数确定角度 θ 时会出现疑问。这个函数是多值的，必须从许多可能性中选出一个适当的角度。可以选一个角度使正弦和余弦的符号与按照式[6]、式[7]得到的 a 和 b 的值相符。例如，将下式转换为指数形式：

$$\mathbf{V} = 4 - j3$$

幅度为

$$C = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$$

角度为

$$\theta = \arctan\tfrac{-3}{4} \tag{10}$$

需要选择一个 θ 值，使得 $\cos\theta$ 为正值，因为 $4=5\cos\theta$。而且使得 $\sin\theta$ 为负值，因为 $-3=5\sin\theta$。因此得到 $\theta=-36.9^\circ$，323.1°，-396.9°，等等。这些值都是正确的，一般选择最简单的一个，这里是 -36.9°。需要指出，式[10]的另一个答案 $\theta=143.1^\circ$ 是不对的，因为那样的话 $\cos\theta$ 为负，而 $\sin\theta$ 为正。

正确选择角度的一个简单方法是在复平面中用图示法表示复数。首先给定直角形式的一个复数 $\mathbf{A}=a+jb$，它位于复平面的第一象限，如图 A5.3 所示。从原点画一条线到表示复数的那一点即可形成一个直角三角形，其斜边显然就是该复数的指数形式的幅度。换句话说，$C=\sqrt{a^2+b^2}$。而且，

斜线与正实轴形成的逆时针角就是指数形式的幅角 θ，因为 $a = C\cos\theta$，$b = C\sin\theta$。如果现在给定位于另一个象限内的直角形式的复数，比如 $\mathbf{V} = 4 - j3$，如图A5.4所示，图中正确的角显然应该是 $-36.9°$ 或 $323.1°$。只需想象一下这个草图（往往不用画出）即可。

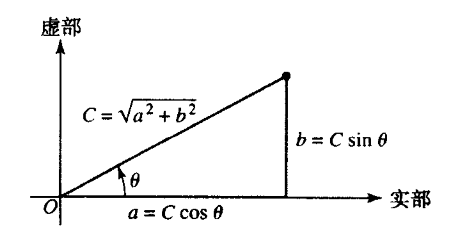


图 A5.3 通过正确选择复数直角形式的实部和虚部,或者选择指数形式的幅度和幅角，可以在复平面中用一个点表示一个复数

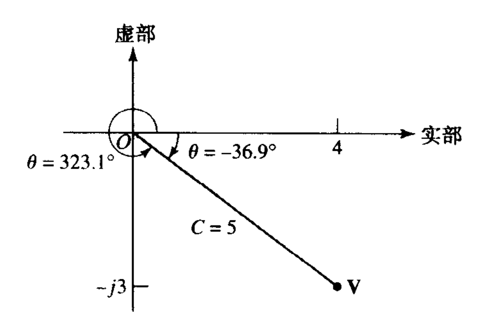


图 A5.4 在复平面中表示复数 $\mathbf{V} = 4 - j3 = 5e^{-j36.9°}$

如果复数直角形式的实部为负,则处理起来往往更容易些,因为可以避免出现超过90°的情况。例如，给定：

$$\mathbf{I} = -5 + j2$$

将上式写成

$$\mathbf{I} = -(5 - j2)$$

将$(5 - j2)$转换成指数形式：

$$\mathbf{I} = -Ce^{j\theta}$$

其中，

$$C = \sqrt{29} = 5.39 \qquad 和 \qquad \theta = \arctan\frac{-2}{5} = -21.8°$$

因此得到

$$\mathbf{I} = -5.39e^{-j21.8°}$$

前面的负号可以取消，只要将幅角增加或减小 180° 即可，参见复平面中的草图。结果可用指数形式表示为

$$\mathbf{I} = 5.39e^{j158.2°} \qquad 或 \qquad \mathbf{I} = 5.39e^{-j201.8°}$$

注意,从电子计算器反正切模式得到的角度总是小于90°,所以无论是arctan[(−3)/4]还是arctan[3/(−4)],结果都是 −36.9°。但是具有直角－极坐标转换功能的计算器在任何情况下都会给出正确的角度。

最后，关于复数的指数表示形式还应该指出一点，当且仅当两个指数形式复数的幅度相等且幅角等效时，才称它们相等。角度相差360°倍数的角称为等效角。例如，如果$\mathbf{A}=Ce^{j\theta}$，$\mathbf{B}=De^{j\phi}$，而且$\mathbf{A}=\mathbf{B}$，则$C=D$，$\theta=\phi\pm(360^\circ)n$，其中$n=0$，1，2，3，…。

练习

A5.5 用角度$-180^\circ<\theta\leqslant180^\circ$以指数形式表示下列复数：(a) $-18.5-j26.1$；(b) $17.9-j12.2$；(c) $-21.6+j31.2$。

A5.6 以直角形式表示下列复数：(a) $61.2e^{-j111.1^\circ}$；(b) $-36.2e^{j108^\circ}$；(c) $5e^{-j2.5}$。

答案：A5.5：$32.0e^{-j125.3^\circ}$；$21.7e^{-j34.3^\circ}$；$37.9e^{j124.7^\circ}$。A5.6：$-22.0-j57.1$；$11.19-j34.4$；$-4.01-j2.99$。

A5.4 极坐标形式

要介绍的第3种（也是最后一种）复数表示形式除了符号上的细微差别外，本质上与指数形式相同。用角符号（∠）代替组合符号e^j。这样一来，指数形式的复数**A**为

$$\mathbf{A}=Ce^{j\theta}$$

可以将上式写成更简洁的形式：

$$\mathbf{A}=C\underline{/\theta}$$

我们称这种形式为复数的极坐标形式，它暗示用极坐标表示（复）平面中的一个点。

显然，从直角坐标到极坐标形式的转换或从极坐标到直角坐标形式的转换基本上与直角坐标形式和指数形式之间的转换相同。对C，θ，a，b存在同样的关系式。

将复数

$$\mathbf{A}=-2+j5$$

写成指数形式为

$$\mathbf{A}=5.39e^{j111.8^\circ}$$

写成极坐标形式为

$$\mathbf{A}=5.39\underline{/111.8^\circ}$$

为看出指数和极坐标形式的优越性，考虑两个指数或极坐标形式的复数相乘和相除。给定：

$$\mathbf{A}=5\underline{/53.1^\circ}\qquad 和 \qquad \mathbf{B}=15\underline{/-36.9^\circ}$$

它们的指数形式为

$$\mathbf{A}=5e^{j53.1^\circ}\qquad 和 \qquad \mathbf{B}=15e^{-j36.9^\circ}$$

可以写出两个复数的乘积，其幅度为它们的幅度乘积，其幅角为其幅角之代数和，这个规则与普通指数乘法相同：

$$(\mathbf{A})(\mathbf{B})=(5)(15)e^{j(53.1^\circ-36.9^\circ)}$$

或

$$\mathbf{AB}=75e^{j16.2^\circ}=75\underline{/16.2^\circ}$$

根据极坐标形式的定义，显然：

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = 0.333\underline{/90^\circ}$$

复数的加减以直角形式进行操作最为简单。进行指数或极坐标形式的复数加减运算时应该首先将其转化为直角坐标形式。反之，进行直角坐标形式的乘除运算时应该先将它们转化为指数或极坐标形式，除非两个数恰好是很小的整数。例如，若要求$(1-j3)$乘以$(2+j1)$，则直接相乘更容易些，结果得到$(5-j5)$。如果数字大小适合心算，那么将它们转换为极坐标形式就浪费时间了。

应该努力熟悉复数的3种不同表示形式并能够迅速从一种形式转换为另一种形式。这3种形式的关系可以用下面长长的公式加以总结：

$$\mathbf{A} = a + jb = \text{Re}[\mathbf{A}] + j\text{Im}[\mathbf{A}] = Ce^{j\theta} = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{j\arctan(b/a)}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\underline{/\arctan(b/a)}$$

从一种形式到另一种形式的转换大多使用计算器就可以很快完成，很多计算器具有求解复数线性方程的能力。

复数是一种方便的数学技巧，它便于对实际物理状况进行分析。

练习

A5.7 出于纯粹的计算乐趣，请用6位有效数将下列复数运算的结果表示为极坐标形式：(a) $[2-(1\underline{/-41^\circ})]/(0.3\underline{/41^\circ})$; (b) $50/(2.87\underline{/83.6^\circ}+5.16\underline{/63.2^\circ})$; (c) $4\underline{/18^\circ}-6\underline{/-75^\circ}+5\underline{/28^\circ}$。

A5.8 求$\mathbf{Z}$的直角形式，假定：(a) $\mathbf{Z}+j2=3/\mathbf{Z}$; (b) $\mathbf{Z}=2\ln(2-j3)$; (c) $\sin\mathbf{Z}=3$。

答案： A5.7：$4.691\,79\underline{/-13.2183^\circ}$；$6.318\,33\underline{/-70.4626^\circ}$；$11.5066\underline{/54.5969^\circ}$。A5.8：$\pm1.414-j1$；$2.56-j1.966$；$1.571\pm j1.763$。

附录6　MATLAB使用简介

MATLAB是一个功能极其强大的软件包，这里将对使用MATLAB所要求的几个基本概念提供一个简要介绍。本书对使用MATLAB完全是任选的，但随着它越来越广泛地成为各种电气工程领域中的常用工具，因此有必要给学生提供一个机会以开始探索这个软件的某些特点，特别是了解二维和三维函数作图、矩阵运算、解联立方程和处理代数表达式等功能。许多学校为学生提供完全版的MATLAB，但是在本书写作的时候，MathWorks公司（http://www.mathworks.com/academia/student_version/）以非常低的价格推出了一个学生版。

开始

一般通过点击程序的图标进入MATLAB，接着打开一个如图A6.1所示的典型窗口。可以从File菜单或直接在窗口中输入命令以执行程序。MATLAB有详细的在线帮助资源，这对于初学者和高级用户都是很有帮助的。典型的MATLAB程序很像C程序，但这里并不要求读者熟悉C程序。

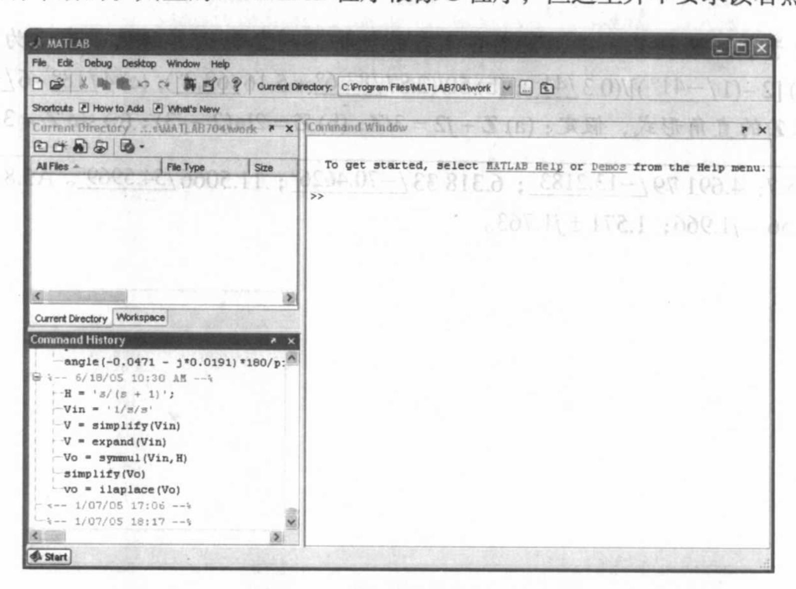


图 A6.1　MATLAB 命令窗口

变量和数学运算

用户应该意识到所有变量都是矩阵，有时不过是简单的1 × 1阶矩阵，只有这样才能深刻理解MATLAB。变量名最多可以有19个字符长度，这对于编写具有良好可读性的程序非常有益。首字符必须是字母，但后面的字符可以是任何字母或数字，也可以采用下划线（_）。MATLAB中的变量名对字母大小写是敏感的。MATLAB中包括一些预先定义的变量。本书用到的预定义变量如下：

eps	机器精度
realmin	计算机处理的最小浮点（正）数
realmax	计算机处理的最大浮点数
inf	无穷大（定义为1/0）
NaN	字面意义“不是一个数（Not a Number）”，包括像0/0这样的情况
pi	π(3.141 59...)
i, *j*	均为虚数单位的定义$\sqrt{-1}$，用户可以给*i*和*j*赋以其他值

利用命令who可以得到当前已定义变量的完整列表。用等号（=）给变量赋值。如果语句以分号（;）结束，那么将出现另一个提示符。如果简单地用回车键结束（即按Enter键），则变量会重复出现。例如：

```
EDU» input_voltage = 5;
EDU» input_current = 1e−3
input_current =
1.0000e−003
EDU»
```

在MATLAB中很容易定义复变量，例如：

```
EDU» s = 9 + j*5;
```

该语句产生一个值为$9+j5$的复变量**s**。

说明：采用第二种颜色以区别程序产生的文本和用户输入的文本，从而便于阅读。

除了1 × 1阶矩阵，所有其他矩阵都用方括号定义。例如，矩阵$\mathbf{t}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$在MATLAB中表示为

```
EDU» t = [2   − 1; 3   0];
```

注意，矩阵元素按行输入，行元素之间用空格隔开，行之间用分号（;）隔开。矩阵的算术运算与普通变量相同，例如，$t+t$可表示成

```
EDU» t + t
ans =
   4  −2
   6   0
```

算术运算包括：

^	乘方	\	左除
*	乘	+	加
/	右（普通）除	−	减

运算次序很重要。优先次序是乘方、乘除、加减。

```
EDU» x = 1 + 5 ^ 2 * 3
x =
76
```

读者开始时对左除的概念可能会感到奇怪，但它在矩阵代数中很有用。例如：

```
EDU» 1/5
ans =
  0.2000
EDU» 1\5
ans =
  5
EDU» 5\1
ans =
  0.2000
```

同样，在进行矩阵运算时，比如等式 **Ax = B**，其中，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}，求 \mathbf{x}$$

```
EDU» A = [2 4; 1 6];
EDU» B = [-1; 2];
EDU» x = A\B

x =

  -1.7500
   0.6250
```

上面的语句同样也可以写成

```
EDU» x = A^-1*B

x =

  -1.7500
   0.6250
```

或者

```
EDU» inv(A)*B

ans =

  -1.7500
   0.6250
```

在可能产生疑问的地方，可以利用括号帮助解决。

一些有用的函数

由于篇幅的限制，不能将 MATLAB 中所有函数都列出。一些比较基本的函数包括：

ads(x)	$\|x\|$	log 10(x)	$\log_{10} x$		
exp(x)	e^x	sin(x)	$\sin x$	asin(x)	$\arcsin x$
sqrt(x)	$\sqrt{x}$	cos(x)	$\cos x$	acos(x)	$\arccos x$
log(x)	$\ln x$	tan(x)	$\tan x$	atan(x)	$\arctan x$

有关复变量运算的函数包括：

real(s)	Re { s }
imag(s)	Im { s }
abs(s)	$\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $\mathbf{s} \equiv a + jb$
angle(s)	arctan(b/a)，其中 $\mathbf{s} \equiv a + jb$
conj(s)	**s** 的复共轭

另一个非常有用而又常常被遗忘的命令是help。

偶尔也会用到矢量，比如在作图时。这时命令 linspace（最小，最大，点数）的价值是无可估量的：

```
EDU» frequency = linspace(0,10,5)

frequency =

        0    2.5000    5.0000    7.5000   10.0000
```

linspace( )的同类命令是 logspace( )。

作图

用MATLAB作图非常容易。例如，执行下列MATLAB程序就能得到如图A6.2所示的结果：

```
EDU» x = linspace(0,2*pi,100);
EDU» y = sin(x);
EDU» plot(x,y);
EDU» xlabel('Angle (radians)');
EDU» ylabel('f(x)');
```

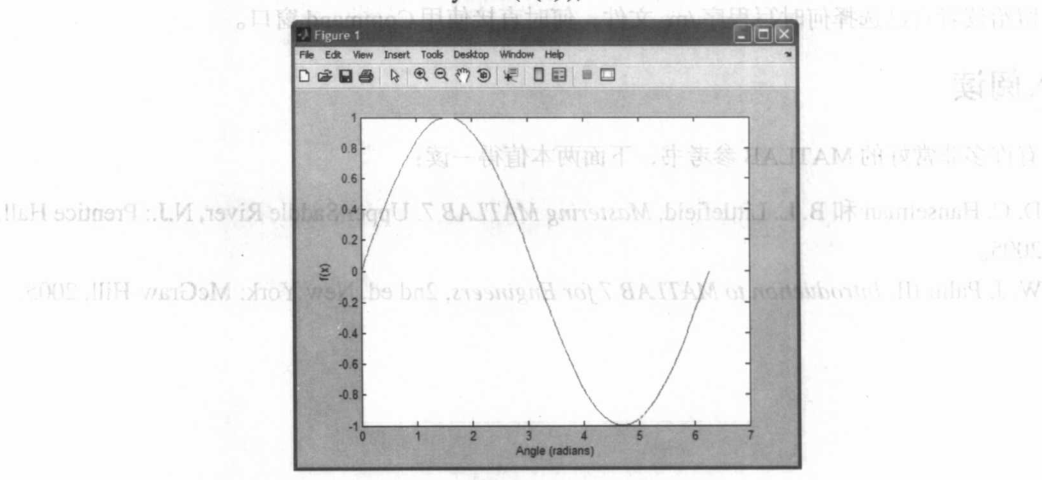


图 A6.2 用MATALB绘制 sin(x)，$0 < x < 2\pi$ 曲线图的例子。变量x定义为100个元素的矢量，各元素之间等间距

编写程序

虽然本书的MATLAB例题是以命令窗口中输入的命令行出现的，但是通过编写程序来计算可能更方便（重复的时候需要谨慎）。在MATLAB中是写m-文件来实现的。其实也就是一个保存为扩展名“.m”的文本文件（例如：first_program.m）。举个例子，下拉File菜单，选择New M-File，打开m-文件编辑器窗口。（注意，如果愿意也可以使用其他编辑器，例如WordPad。）

键入

r = input('Hello, World')

如图 A6.3 所示。

接着将文件保存为 first_program.m 并放到合适的路径，然后关闭编辑器。在 File 菜单下，选择 Open，找到 first_program.m，再次打开编辑器窗口（所以，前面也可以跳过关闭操作）。按下 F5，或者在 Debug 菜单下选择 Run，在命令窗口可以看到问候词，MATLAB 则等待键盘响应，所以按下 Enter 键。

将上述方法拓展到前面作图的例子，要求正弦波形的幅度可由用户任意改变，程序如图 A6.4 所示。



图 A6.3　用 m- 文件编辑器产生的文件例子



图 A6.4　产生正弦波形的文件，文件名为 example1.m

留给读者自己选择何时写程序 /m- 文件，何时直接使用 Command 窗口。

深入阅读

有许多非常好的 MATLAB 参考书，下面两本值得一读：

D. C. Hanselman 和 B. L. Littlefield, *Mastering MATLAB 7*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2005。

W. J. Palm III, *Introduction to MATLAB 7 for Engineers*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2005。

附录7　拉普拉斯变换补充定理

在第14章的基础上，本附录将给出拉普拉斯变换的几个补充定理，它们一般用于解决更高深的问题。

周期时间函数的变换

时移定理在估计周期时间函数的变换中非常有用。假定对于$t>0$，$f(t)$的周期为T。我们知道，$t<0$时$f(t)$的情况对（单边）拉普拉斯变换没有影响，因此$f(t)$可以写成

$$f(t)=f(t-nT)\qquad n=0,1,2,\cdots$$

如果定义一个新的时间函数，它只在$f(t)$的第一个周期不为零：

$$f_1(t)=[u(t)-u(t-T)]f(t)$$

原来的$f(t)$可以表示为无穷多个这类函数之和，它们之间具有T的整数倍时延，即

$$\begin{aligned}f(t)&=[u(t)-u(t-T)]f(t)+[u(t-T)-u(t-2T)]f(t)\\&\quad+[u(t-2T)-u(t-3T)]f(t)+\cdots\\&=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\cdots\end{aligned}$$

或

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(t-nT)$$

这个求和的拉氏变换正是变换的求和：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}\{f_1(t-nT)\}$$

所以由时移定理得出

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-nT\mathbf{s}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$$

其中，

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\mathcal{L}\{f_1(t)\}=\int_{0^-}^{T}\mathrm{e}^{-\mathbf{s}t}f(t)\,dt$$

由于$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})$不是n的函数，它可以从求和式中移出，成为

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\mathbf{F}_1(\mathbf{s})[1+\mathrm{e}^{-T\mathbf{s}}+\mathrm{e}^{-2T\mathbf{s}}+\cdots]$$

对方括号中的表达式应用二项式定理，可将其简化为$1/(1-\mathrm{e}^{-T\mathbf{s}})$。所以可得出结论：周期为$T$的时间函数$f(t)$的拉氏变换为

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{F}_1(\mathbf{s})}{1-\mathrm{e}^{-T\mathbf{s}}}\qquad[1]$$

其中，

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{[u(t) - u(t-T)]f(t)\} \qquad [2]$$

是这个时间函数第一个周期的变换。

为了演示这个周期函数变换定理的应用，我们将其用于熟悉的矩形脉冲串，如图A7.1所示。可以将这个周期函数写成解析式：

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_0[u(t-nT) - u(t-nT-\tau)] \qquad t > 0$$

容易算出函数 $\mathbf{V}_1(\mathbf{s})$为

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{s}) = V_0 \int_{0^-}^{\tau} \mathrm{e}^{-\mathbf{s}t}\,dt = \frac{V_0}{\mathbf{s}}(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}\tau})$$

为了获得所要求的变换，只要用其除以$(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}T})$即可：

$$\mathbf{V}(\mathbf{s}) = \frac{V_0}{\mathbf{s}} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}\tau})}{(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}T})} \qquad [3]$$

应该注意到几个不同定理是怎样出现在式[3]中的。分母中的系数$(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}T})$说明函数的周期性，分子中的$\mathrm{e}^{-\mathbf{s}\tau}$源于负方波的时延，它关闭了脉冲。系数 $V_0/\mathbf{s}$ 当然是 $v(t)$所涉及的阶跃函数 $v(t)$的变换。

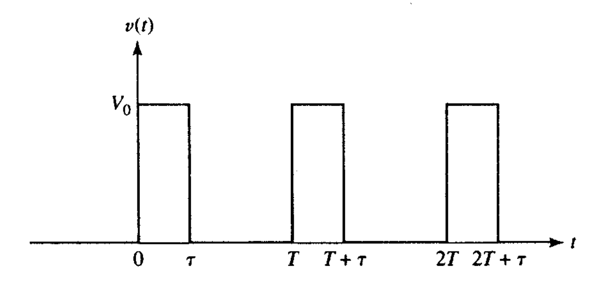


图 A7.1 周期性矩形脉冲串，其变换为$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = (V_0/\mathbf{s})(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}\tau})/(1 - \mathrm{e}^{-\mathbf{s}T})$

例题 A7.1 确定图 A7.2 所示周期函数的变换。

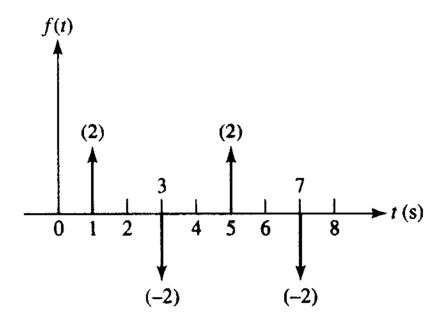


图 A7.2 基于单位冲激函数的周期函数

解： 首先写出描写$f(t)$的方程，它由交替出现的正负冲激函数组成：

$$f(t) = 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-5) - 2\delta(t-7) + \cdots$$

定义一个新的函数f_1，注意，周期$T = 4$ s：

$$f_1(t) = 2[\delta(t-1) - \delta(t-3)]$$

可以利用表14.2中给出的有关时间周期性的运算求出F(s)：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\frac{1}{1-e^{-T\mathbf{s}}}\mathbf{F}_1(\mathbf{s}) \qquad [4]$$

其中，

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=\int_{0^-}^{T} f(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt=\int_{0^-}^{4} f_1(t)e^{-\mathbf{s}t}\,dt$$

有几种方法求出这个积分。最容易的方法是认识到如果积分上限增加到∞，其值保持不变，因此可以利用时移定理，所以，

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{s})=2[e^{-\mathbf{s}}-e^{-3\mathbf{s}}] \qquad [5]$$

用式[4]中的系数乘以式[5]就可以完成例题：

$$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\frac{2}{1-e^{-4\mathbf{s}}}(e^{-\mathbf{s}}-e^{-3\mathbf{s}})=\frac{2e^{-\mathbf{s}}}{1+e^{-2\mathbf{s}}}$$

练习

A7.1 确定图A7.3所示周期函数的拉普拉斯变换。

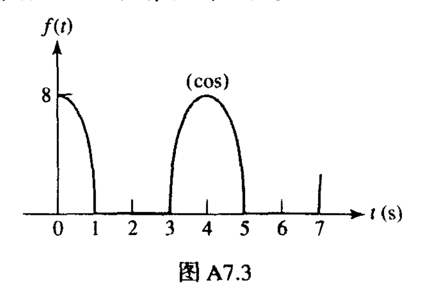


图 A7.3

答案：$\left(\frac{8}{\mathbf{s}^2+\pi^2/4}\right)\frac{\mathbf{s}+(\pi/2)e^{-\mathbf{s}}+(\pi/2)e^{-3\mathbf{s}}-\mathbf{s}e^{-4\mathbf{s}}}{1-e^{-4\mathbf{s}}}$。

频移

下面的定理建立的是$\mathbf{F}(\mathbf{s})=\mathcal{L}\{f(t)\}$和$\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$之间的关系。考虑$e^{-at}f(t)$的拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}=\int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t}e^{-at}f(t)\,dt=\int_{0^-}^{\infty} e^{-(\mathbf{s}+a)t}f(t)\,dt$$

仔细看一看结果，右边的积分与F(s)的定义相同，只有一点例外：$(\mathbf{s}+a)$代替了s，因此，

$$e^{-at}f(t)\Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{s}+a) \qquad [6]$$

我们得出这样的结论：频域中用$(\mathbf{s}+a)$代替s，意味着时域中乘以了因子e^{-at}。该结论被称为频移定理。将该定理应用到指数衰减正弦函数上立即可以得到其变换。根据已知的余弦函数的变换：

$$\mathcal{L}\{\cos\omega_0 t\}=\mathbf{F}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega_0^2}$$

得到$e^{-at}\cos\omega_0 t$的变换一定是$\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)$：

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos\omega_0 t\}=\mathbf{F}(\mathbf{s}+a)=\frac{\mathbf{s}+a}{(\mathbf{s}+a)^2+\omega_0^2} \qquad [7]$$

练习

A7.2 求$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(5t+0.2\pi)u(t)\}$。

答案：$(0.588s + 4.05)/(s^2 + 4s + 29)$。

频域微分

接下来讨论**F**(s)对s的微分，其结果为

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}(s) = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} -te^{-st} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}[-tf(t)]\,dt$$

它就是$[-tf(t)]$的拉普拉斯变换。因此可以得到结论：在频域对s的微分导致时域函数乘以$-t$，或表示成

$$-tf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\mathbf{F}(s) \qquad [8]$$

假设现在$f(t)$是阶跃斜坡函数$tu(t)$，我们已经知道其变换为$1/s^2$。现在用频域微分的定理确定$1/s^3$的反变换：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{2}{s^3} \Leftrightarrow -t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = -t^2u(t)$$

和

$$\frac{t^2u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{s^3} \qquad [9]$$

继续上述过程，得到

$$\frac{t^3}{3!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^4} \qquad [10]$$

因此，

$$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^n} \qquad [11]$$

练习

A7.3 求$\mathcal{L}\{t\sin(5t+0.2\pi)\,u(t)\}$。

答案：$(0.588s^2 + 8.09s - 14.69)/(s^2 + 25)^2$。

频域积分

若频域**F**(s)对s积分，对$f(t)$会造成什么影响呢？我们可以从变换的定义开始讨论：

$$\mathbf{F}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

从 s 到 ∞ 进行频域积分：

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{s}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt\right] ds$$

交换积分次序可得

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{s}^{\infty} e^{-st}\,ds\right] f(t)\,dt$$

进行内层积分可得

$$\int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[-\frac{1}{t}e^{-st}\right]_{s}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{0^-}^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt$$

然后得到

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_{s}^{\infty} \mathbf{F}(s)\,ds \qquad [12]$$

例如，已经建立了以下的变换对：

$$\sin\omega_0 t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

则

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin\omega_0 t u(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty}\frac{\omega_0\,ds}{s^2+\omega_0^2} = \text{arctam}\frac{s}{\omega_0}\bigg|_{s}^{\infty}$$

从而得到

$$\frac{\sin\omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{\omega_0} \qquad [13]$$

练习

A7.4 求$\mathcal{L}\{\sin^2 5t\, u(t)/t\}$。

答案：$\frac{1}{4}\ln[(s^2+100)/s^2]$。

时间缩放定理

接下来讨论拉普拉斯变换的时间缩放定理，即计算$f(at)$的变换。假设$\mathcal{L}\{f(t)\}$的变换已知，则推导过程很简单：

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s/a)\lambda} f(\lambda)\,d\lambda$$

其中进行了变量 $at=\lambda$ 的代换。最后的积分项表明：除了 s 被 s/a 代替外，还需用因子 $1/a$ 乘以$f(t)$的拉普拉斯变换，即

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathbf{F}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad [14]$$

作为对此定理的最基本应用，考虑1 kHz余弦函数的变换。假设1 rad/s的余弦变换是已知的：

$$\cos t u(t) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + 1}$$

则

$$\mathcal{L}\{\cos 2000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2000\pi} \frac{\mathbf{s}/2000\pi}{(\mathbf{s}/2000\pi)^2 + 1} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + (2000\pi)^2}$$

练习

A7.5 求$\mathcal{L}\{\sin^2 5t\, u(t)\}$。

答案：$50/[\mathbf{s}(\mathbf{s}^2 + 100)]$。

工程电路分析（第七版）

Engineering Circuit Analysis, Seventh Edition

本书是作者长期教学经验的结晶，已被国外许多著名大学选为电子、电力工程领域入门课程的教材。作者从3个最基本的科学定律（欧姆定律、基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律）推导出了电路分析中常用的分析方法及分析工具。作者注重将理论和实践相结合，不论是很多例题、练习、章后习题还是文中涉及的应用实例都取自于业界的典型应用。

这本经典教材的标志性特色是以学生为本——以学生能够自己学会电路分析的精髓为目的。在介绍专业术语时定义清晰，各章首先详细解释基本知识，然后结合具体实例对基本结论加以说明。各章都有难度等级不同的习题，使学生能够定期自我检查知识掌握程度。基本概念的全面介绍以及不断重复的策略对巩固学习效果而言非常重要。书中通过各种要点、提示文字、精美图片、实物照片和表格等，充分体现了作者丰富的教育学理念，使读者阅读本书时欲罢不能。

基本原理的提出总是伴随着适当的设计实例，并用计算机辅助分析检验设计结果。纵观全书，作者以一种非常规的方式提出电路分析中用到的各种基本概念和基本原理，突出了作者的一个理念——电路分析充满乐趣。



书号：7-121-03096-9
定价：55.00 元

本书特色

- 第1章给出解题基本策略，使学生最初就能建立有条不紊的电路分析方法。后续各章环环相扣，加上精心挑选的例题，反复强调解题方法的重要性。
- 贯穿全书的实际应用实例将理论和现实世界联系起来，联系的纽带是设计和解题时的基本概念。
- 用 PSpice 和 MATLAB 实例仿真了相应章节中的具体电路性能，如直流分析、瞬态分析、变量控制和方程求解等。
- 通过某些章节后所附的基于设计的习题，帮助学生掌握比较复杂的设计过程。

教学辅助支持

本书的在线 ARIS 作业管理系统提供了 eProfessor 录像、算法题、解题手册、网络分析指南、考试复习资料、PSpice 手册、状态变量分析补充内容以及教材内容更新。教师可以得到 Word 格式和 COSMOS 格式习题解答以及 PowerPoint 文件。









责任编辑：周宏敏
责任美编：毛惠庚





ISBN 978-7-121-04642-1

定价：65.00 元

[General Information]
书名=工程电路分析　（第七版）
SS号=11868750